ЗА ЕДНА НЕЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА

Петар Р.Лазов

1. Потребните услови за егзистенција на полиномни решенија на диференцијалната равенка

$$A(x)y^{(\mu)}=\sum_{k=0}^{n}B_{\nu_k}(x)(yy')^{\nu_k}, \quad \prod_{k=0}^{n}|B_{\nu_k}|\neq 0,$$

(1) $$0\leq\nu_0<\nu_1<\ldots<\nu_n, \quad \nu_n\geq 2, \quad y^{(\mu)}=\frac{d^{\mu}y}{dx^{\mu}},$$

каде што $A(x)$ и $B_{\nu_k}(x)$ $(k=\overline{0,n})$ се полиноми со степен a односно b_{ν_k}, ги утврдува следната теорема

ТЕОРЕМА 1. Равенката (1) може да има полиномни решенија само ако постои цел ненегативен број m, таков да меѓу броевите

$$a+m-\mu, \quad b_{\nu_k}+\nu_k(2m-1) \quad (k=\overline{0,n}),$$

има барем два, кои се најголеми и меѓусебно еднакви.

Оваа теорема произлегува од резултатите, до кои имаме дојдено во [2].

Врз основа на теоремата 1 директно ги наоѓаме следните можни вредности з а степените на полиномните решенија на равенката (1):

(2) $$m=\frac{1}{2}\left(\frac{b_{\nu_i}-b_{\nu_j}}{\nu_j-\nu_i}+1\right) \qquad (i=\overline{0,n-1};\ j>i)$$

(3) $$m=\frac{a-\mu-b_{\nu_k}+\nu_k}{2\nu_k-1} \qquad (k=\overline{0,n}).$$

ПОСЛЕДИЦА 1. Равенката (1) не може да има повеќе од $n+1$ полиномни решенија со различен степен.

2. Претпоставувајќи дека равенката (1) може да има само такви полиномни решенија чиј степен m е даден со само една од релациите (2), ќе ги најдеме потребните и доволни услови за егзистенција на овие решенија. На сличен начин како и во [3], се покажува дека оваа претпоставка ги опфаќа следните коефициентни услови:

(4) $$a-\mu+\frac{1}{2}<\frac{(2\nu_j-3)b_{\nu_i}+(3-2\nu_i)b_{\nu_j}}{2(\nu_j-\nu_i)}$$

$$b_{\nu_k} < \frac{(\nu_j-\nu_k-1)b_{\nu_i}+(\nu_k+1-\nu_i)b_{\nu_j}}{\nu_j-\nu_i} \qquad (k=\overline{0,n};\ k\neq i,j) \tag{5}$$

Ако полиномите S и Q ги дефинираме како

$$-B_{\nu_i}=B_{\nu_j}S^2+Q\,,\quad S=\left[\sqrt[q]{-B_{\nu_i}/B_{\nu_j}}\right] \qquad (q=\nu_j-\nu_i), \tag{6}$$

каде што S го претставува полиномниот дел од развојот на $\sqrt[q]{-B_{\nu_i}(x)/B_{\nu_j}(x)}$ по цели степени од x, тогаш равенката (1) станува

$$Ay^{(\mu)}=\sum_{\substack{k=0\\k\neq i,j}}^{n}B_{\nu_k}(yy')^{\nu_k}-Q(yy')^{\nu_i}+\{(yy')^q-S^q\}B_{\nu_j}(yy')^{\nu_i}. \tag{7}$$

Ако полиномот $y=y(x)$ чиј степен m е определен со само една од релациите (2), ~~тыкыкх~~ е решение на равенката (7) тогаш, на потполно сличен начин како и во [4], се покажува дека истата равенка може да претставува идентитет само за $yy'=\omega_t S$ т.е.

$$y^2=2\omega_t IS+C. \tag{8}$$

Овде ω_t $(t=\overline{1,q})$ се корени на равенката $\omega^q=1$, C-константа, а $Ix^k=x^{k+1}/(k+1)$.

Ако (8) се замени во (7), се добива

$$\pm A\{(2\omega_t IS+C)^{1/2}\}^{(\mu)}=\sum_{\substack{l=0\\l\neq i,j}}^{n}B_{\nu_l}(\omega_t S)^{\nu_l}-Q(\omega_t S)^{\nu_i}. \tag{9}$$

Обратно, ако важи (9), тогаш

$$\pm A\{(2\omega_t IS+C)^{1/2}\}^{(\mu)}=\sum_{\substack{l=0\\l\neq i,j}}^{n}B_{\nu_l}(\omega_t S)^{\nu_l}+B_{\nu_j}(\omega_t S)^{\nu_j}+$$

$$+(\omega_t S)^{\nu_i}\{-Q-B_{\nu_j}(\omega_t S)^q\}$$

или, со оглед на (6),

$$\pm A\{(2\omega_t IS+C)^{1/2}\}^{(\mu)}=\sum_{l=0}^{n}B_{\nu_l}(\omega_t S)^{\nu_l}.$$

Тоа значи дека полиномите определени со (8) се решенија на равенката (1). Према тоа, ако бројот m е даден со само една од релациите (2), тогаш важи

ТЕОРЕМА 2. Диференцијалната равенка (1) има полиномни решенија ако и само ако за некое $1\leq t\leq q$ постои константа C таква, да е

(i) $\sqrt{2\omega_t IS+C}$ –полином

(ii) исполнета релацијата (9).

и овие решенија се само функциите $y=\pm(2\omega_t IS+c)^{1/2}$.

ПОСЛЕДИЦА 2. Диференцијалната равенка

$$\sum_{k=1}^{N} A_{\mu_k}(x)\, y^{(\mu_k)} + A(x) y^{(\mu)} = \sum_{\ell=0}^{n} B_{\nu_\ell}(x)(yy')^{\nu_\ell},$$

за која

$$a_{\mu_k}-\mu_k < a-\mu \qquad (k=\overline{1,N}),$$

има полиномни решенија ако и само ако за некое $1\le t\le \ell$ постои константа c таква,да

(j) $\sqrt{2\omega_t \hat{I} S+c}$ -полином

$$\pm \sum_{k=1}^{N} A_{\mu_k}\left\{(2\omega_t IS+c)^{1/2}\right\}^{(\mu_k)} \pm A\left\{(2\omega_t \hat{I}S+c)^{1/2}\right\}^{(\mu)} =$$

(jj)
$$= \sum_{\substack{\ell=0\\ \ell\ne i,j}}^{n} B_{\nu_\ell}(\omega_t S)^{\nu_\ell} - Q(\omega_t S)^{\nu_i},$$

и овие решенија се само функциите $y=\pm\sqrt{2\omega_t IS+c}$

3. Во [1] имаме дадено алгоритам за наоѓање на полиномните решенија на равенката (1)со помош на нулите на полиномот $B_0(x)$,за случај кога е $\nu_0=0$. Ако е пак $\nu_0\ne 0$,тогаш равенката (1)може да се запише како

(10)
$$Ay^{(\mu)} = y\left\{B_{\nu_0} y^{\nu_0-1}(y')^{\nu_0} + B_{\nu_1} y^{\nu_1-1}(y')^{\nu_1} + \ldots + B_{\nu_n} y^{\nu_n-1}(y')^{\nu_n}\right\}.$$

Ако се претпостави дека

(11)
$$y^{(\mu)}\ne 0,$$

тогаш за равенката (10),па према тоа и за равенката (1),важи следниот алгоритам за полиномните решенија на истата.

ТЕОРЕМА 3. Нека е $\nu_0\ne 0$.Тогаш класата на функции $y(x)$,определени како

$$y=k(x-z_1)^{p_1}(x-z_2)^{p_2}\ldots(x-z_s)^{p_s},$$

каде што се K-константа,$z_1, z_2, \ldots, z_s$ -нули на полиномот $A(x)$,а $p_1, p_2, \ldots, p_s$ -цели ненегативни броеви,ги содржи сите полиномни решенија на равенката (1) кои го имаат својството (11).

Оваа теорема се јавува како директна последица на резултатот,до кој имаме дојдено во [5 ,т.1].

Наоѓањето на полиномните решенија на диференцијалната равенка (1), за кои $y^{(\mu)}=0$,се сведува на наоѓање на полиномни решенија на една обична алгебарска равенка (со смена $yy'=z$).

4. За $\mu=0$ равенката (1) гласи

(1a) $$A(x)y=\sum_{k=0}^{n}B_{\nu_k}(x)(yy')^{\nu_k}$$

Користејќи се со резултатот најден во 2.,ќе ги најдеме потребните и доволни услови под кои равенката (1a)има параметарски решенија од вид

(12) $$x=F_r(t),\quad y=\phi_m(t)\qquad (r,m=1,2,\dots),$$

каде што се $F_r(t)$, $\phi_m(t)$ –полиноми.

Земајќи во обзир дека е $y'=\dot{y}/\dot{x}$,равенката (1a) станува

(13) $$A^*(t)y=\sum_{k=0}^{n}B^*_{\nu_k}(t)(y\dot{y})^{\nu_k},$$

каде што полиномите $A^*(t)$ и $B^*_{\nu_k}(t)$ $(k=\overline{0,n})$се дефинирани како

$$A^*(t)=A(F_r(t))\cdot \dot{F}_r(t)^{\nu_n},$$

$$B^*_{\nu_k}(t)=B_{\nu_k}(F_r(t))\cdot \dot{F}_r(t)^{\nu_n-\nu_k}.$$

Слично како и во 1.,можните вредности за броевите m и r се определуваат од условот да меѓу броевите

$$ar+\nu_n(r-1)+m$$

$$rb_{\nu_k}+(\nu_n-\nu_k)(r-1)+\nu_k(2m-1)\qquad (k=\overline{0,n}),$$

постојат барем два меѓусобно еднакви:

(14) $$m=\frac{r}{2}\left(\frac{b_{\nu_i}-b_{\nu_j}}{\nu_j-\nu_i}+1\right)\qquad (i=\overline{0,n-1};\ j>i),$$

(15) $$m=r\,\frac{a-b_{\nu_k}+\nu_k}{2\nu_k-1}\qquad (k=\overline{0,n}).$$

ТЕОРЕМА 4. Диференцијалната равенка (1a)може да има само такви решенија од видот (12),за кои броевите m и r се сврзани со некоја од релациите (14) или (15).

Ако ги поставиме условите (4) и (5)за броевите a^* и $b^*_{\nu_k}$ определени како

$$a^* = ar + \nu_m (r-1)$$

$$b^*_{\nu_k} = r b_{\nu_k} + (\nu_m - \nu_k)(r-1) \qquad (k=\overline{0,m}),$$

тогаш се добива

(16) $$a + \frac{1}{2} < \frac{(2\nu_j - 3) b_{\nu_i} + (3 - 2\nu_i) b_{\nu_j}}{2(\nu_j - \nu_i)} - \frac{r-1}{r}$$

(17) $$b_{\nu_k} < \frac{(\nu_j - \nu_k - 1) b_{\nu_i} + (\nu_k + 1 - \nu_i) b_{\nu_j}}{\nu_j - \nu_i} - \frac{r-1}{r} \; (k=\overline{0,m};\ k \neq i,j) .$$

Значи,ако се исполнети (16)и (17),тогаш равенката (13) може да претставува идентитет само за

$$y^2 = \phi_m^2 = 2\omega_\lambda I S^* + C ,$$

каде што полиномот $S^*(t)$ е определен како

$$-B^*_{\nu_i} = B^*_{\nu_j} (S^*)^q + Q^* , \quad s^* = \left[\sqrt[q]{-B^*_{\nu_i}(t) / B^*_{\nu_j}(t)}\right] \quad (q = \nu_j - \nu_i) .$$

Према тоа,ако претпоставиме дека броевите m и r се сврзани со само една од релациите (14),тогаш важи

ТЕОРЕМА 5. Диференцијалната равенка (1а),за која се исполнети условите (16) и (17),има решенија од видот (12) ако и само ако за некое $1 \le \lambda \le q$ постои константа C таква,да е

(r) $$\phi_m = \pm \sqrt{2\omega_\lambda I S^* + C} .$$

(rr) $$\pm A^* \sqrt{2\omega_\lambda I S^* + C} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i,j}}^{m} B^*_{\nu_k} \cdot (\omega_\lambda S^*)^{\nu_k} - Q^* \cdot (\omega_\lambda S^*)^{\nu_i} .$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. П.Р.Лазов: Полиномни решенија на нелинеарните диференцијални равенки од прв ред,Билтен на ТМФ (во печат).

2. П.Р.Лазов:Степени на полиномните решенија на алгебарските диференцијални равенки,Билтен на ТМФ (во печат).

3. П.Р.Лазов: Об однои теореме Л.Г.Орешенко (во печат).

4. П.Р.Лазов,Д.С.Димитровски:Годишен зборник на ПМФ,Кн.25-26,1975/76, 93-99,Скопје.

5. П.Р.Лазов,Д.С.Димитровски:Годишен зборник на ПМФ,Кн,25-26,1975/76, 107-112,Скопје.

Петар Р.Лазов,

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

- Р Е З Ю М Е -

В работе во-первых получены все возможные значения для степеней полиномиальных решений уравнения (1), а затем найдены необходимые и достаточные условия существования тех же решений. Также даётся алгоритм для их нахождения с использованием нулей полинома $A(x)$. В конце найдены необходимые и достаточные условия при которых уравнение (1а) имеет параметрические решения вида (14).