ПОЛИНОМНИ РЕШЕНИЈА НА ЕДЕН СИСТЕМ ОД АЛГЕБАРСКИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Петар Р. Лазов

1. Нека е даден системот од алгебарски диференцијални равенки

$$A_{11}(x)\,y^{(l_{11})} + A_{12}(x)\,z^{(l_{12})} = B_{10}(x) + B_{1m}(x)\,y^{m_1} + B_{1k}(x)\,z^{k_1}$$

$$A_{21}(x)\,y^{(l_{21})} + A_{22}(x)\,z^{(l_{22})} = B_{20}(x) + B_{2m}(x)\,y^{m_2} + B_{2k}(x)\,z^{k_2},$$

(1) $$m_1, m_2, k_1, k_2 = 1,2,3,\dots, \quad y^{(l)} = \frac{d^l y}{dx^l}, \quad l_{ij} = 1,2,3,\dots \ (i,j=1,2),$$

каде што $A_{ij}(x)$ ($i,j=1,2$), $B_{i0}(x)$, $B_{im}(x)$, $B_{ik}(x)$ ($i=1,2$) се полиноми респективно со степен a_{ik}, b_{i0}, b_{im}, b_{ik}.

Да претпоставиме дека системот од равенки (1) има решенија од вид

(2) $$y = \phi_m(x), \quad z = F_r(x),$$

каде што се $\phi_m(x)$, $F_r(x)$ –полиноми со степен m односно r. Тогаш првиот член од левата страна на првата равенка од системот (1) постанува полином со степен $a_{11}+m-l_{11}$,вториот полином со степен $a_{12}+r-l_{12}$,додека членовите од десната страна на истата равенка постануваат полиноми респективно со степен b_{10} , $b_{1m}+m_1 m$,односно $b_{1k}+k_1 r$.На сличен начин,членовите од левата страна на втората равенка постануваат полиноми соодветно со степен $a_{21}+m-l_{21}$, $a_{22}+r-l_{22}$,а членовите од десната страна на истата равенка полиноми со степен b_{20} , $b_{2m}+m_2 m$, $b_{2k}+k_2 r$.Оттука,на сличен начин како и во [1],се доаѓа до следниот резултат.

ТЕОРЕМА 1. Системот од алгебарски диференцијални равенки (1) може да има решенија од видот (2) само ако постојат два цели ненегативни броја m и r такви,да

(i) меѓу броевите определени како

$$a_{11}+m-l_{11},\ a_{12}+r-l_{12},\ b_{10},\ b_{1m}+m_1 m,\ b_{1k}+k_1 r$$

има барем два броја,кои се најголеми и меѓусебно еднакви;

(ii) меѓу броевите определени како

$a_{21}+m-l_{21}\;,\; a_{22}+r-l_{22}\;,\; b_{20}\;,\; b_{2m}+n_2 m\;,\; b_{2k}+k_2 r$
има барем два броја,кои се најголеми и меѓусебно еднакви.

Врз основа на теоремата 1 можат да се најдат сите можни вредности за степените на полиномите $\Phi_{1m}(x)$ и $F_r(x)$.

2. Ќе ги најдеме потребните и доволни услови под кои системот од равенки (1) има решенија од видот (2),претпоставувајќи дека броевите m и r се дадени како

$$m=\frac{b_{10}-b_{1m}}{n_1}\;,\quad r=\frac{b_{20}-b_{2k}}{k_2}\,. \tag{3}$$

Исто така ќе претпоставиме дека се исполнети коефициентните услови

$$\max\left\{a_{11}-l_{11}+\frac{b_{10}-b_{1m}}{n_1},\; a_{12}-l_{12}+\frac{b_{20}-b_{2k}}{k_2},\; b_{1k}+k_1\frac{b_{20}-b_{2k}}{k_2}\right\} < \frac{(n_1-1)b_{10}+b_{1m}}{n_1}\,, \tag{4}$$

$$\max\left\{a_{21}-l_{21}+\frac{b_{10}-b_{1m}}{n_1},\; a_{22}-l_{22}+\frac{b_{20}-b_{2k}}{k_2},\; b_{2m}+n_2\frac{b_{10}-b_{1m}}{n_1}\right\} < \frac{(k_2-1)b_{20}+b_{2k}}{k_2}\,. \tag{5}$$

Полиномите S_1, S_2, Q_1, Q_2 ќе ги дефинираме како

$$-B_{10}=B_{1m}S_1^{n_1}+Q_1\;,\quad S_1=\left[\sqrt[n_1]{-B_{10}/B_{1m}}\right], \tag{6}$$

$$-B_{20}=B_{2k}S_2^{k_2}+Q_2\;,\quad S_2=\left[\sqrt[k_2]{-B_{20}/B_{2k}}\right], \tag{7}$$

каде што $\left[\sqrt[n_1]{-B_{10}/B_{1m}}\right]$ претставува полиномен дел од развојот на $\sqrt[n_1]{-B_{10}(x)/B_{1m}(x)}$ по цели степени од x. Врз основа на резултатот даден во [2], важи

$$dg\,Q_1 < dg\,S_1^{n_1-1}+b_{1m}\,, \tag{8}$$

(9) $$dg\,Q_2 < dg\,S_2^{k_2-1} + b_{2k}\,.$$

Ако релациите (6) и (7) се заменат во (1),се добива

(10) $$A_{11}y^{(l_{11})} + A_{12}z^{(l_{12})} = -Q_1 + B_{1m}\left(y^{m_1} - S_1^{m_1}\right) + B_{1k}z^{k_1}$$

(10a) $$A_{21}y^{(l_{21})} + A_{22}z^{(l_{22})} = -Q_2 + B_{2k}\left(z^{k_2} - S_2^{k_2}\right) + B_{2m}y^{m_2}.$$

Врз основа на (4) и (8) излегува

$$\max\left\{dg\,A_{11}y^{(l_{11})},\ dg\,A_{12}z^{(l_{12})},\ dg\,Q_1,\ dg\,B_{1k}z^{k_1}\right\} <$$

$$< b_{1m} + (m_1-1)\,dg\,S_1\,.$$

Значи,во равенката (10) само за членот

$$\xi = B_{1m}\left(y^{m_1} - S_1^{m_1}\right)$$

важи

$$dg\,\xi > b_{1m} + (m_1-1)\,dg\,S_1\,.$$

Оттука излегува дека равенката (10) може да претставува идентитет само за $y=\omega_i S_1$,каде што ω_i $(i=\overline{1,m_1})$ се корени на равенката $\omega^{m_1}=1$.На наполно сличен начин,од (5) и (9) излегува дека равенката (10a) може да претставува идентитет само за $z=\Omega_j S_2$,каде што Ω_j $(j=\overline{0,k_2})$ се корени на равенката $\omega^{k_2}=1$.Значи системот од равенки (1) може да има само такви решенија од видот (2),кои се определени како

(11) $$y=\omega_i S_1,\quad z=\Omega_j S_2 \qquad (i=\overline{1,m_1}\,;\ j=\overline{1,k_2})\,.$$

ТЕОРЕМА 2. Системот од алгебарски диференцијални равенки (1) за кој се исполнети коефициентните услови (4) и (5),има решенија од видот (2),каде што броевите m и r се дадени со (3),ако и само ако за некое $1\le i\le m_1$ и некое $1\le j\le k_2$

(I) $$\omega_i A_{11}S_1^{(l_{11})} + \Omega_j A_{12}S_2^{(l_{12})} = -Q_1 + \Omega_j^{k_1}B_{1k}S_2^{k_1}$$

(II) $$\omega_i A_{21}S_1^{(l_{21})} + \Omega_j A_{22}S_2^{(l_{22})} = -Q_2 + \omega_i^{m_2}B_{2m}S_1^{m_2},$$

и овие решенија се само функциите (11).

Доказ: Ако функциите (11) ги замениме во (10) и (10а),непосредно се добиваат релациите (I) и (II).Обратно,ако се исполнети релациите (I) и (II) тогаш,со оглед на (6) и(7),важи

$$A_{11}(\omega_i S_1)^{(l_{11})} + A_{12}(\Omega_j S_2)^{(l_{12})} = B_{10} + B_{1n}(\omega_i S_1)^{n_1} + B_{1k}(\Omega_j S_2)^{k_1}$$

$$A_{21}(\omega_i S_1)^{(l_{21})} + A_{22}(\Omega_j S_2)^{(l_{22})} = B_{20} + B_{2n}(\omega_i S_1)^{n_2} + B_{2k}(\Omega_j S_2)^{k_2}$$

Тоа значи дека функциите (11) се решение на системот од равенки (1).Како овие функции се единствено можни решенија од видот (2),доказот е завршен. За $A_{12}=A_{21}\equiv 0$, $l_{11}=l_{22}=1$, $n_1=n_2$, $k_1=k_2$, од теоремата 2 излегува резултатот најден во [1]. ~~ИXИXТXЕXЕXАXТXXXЕXXX~~

ЛИТЕРАТУРА

~~1. Полиномиальные решения одной системы нелинейных дифференциальных уравнений~~

I. П.Р.Лазов:Полиномиальные решения одной системы нелинейных дифференциальных уравнений.Билтен на ДМФ од СРМ,Скопје,Кн.25,1974,41-44.

2. Л.Г.Орещенко:Целые решения одного нелинейного дифференциального уравнения,Дифференц.уравн.,10(2),1974,253-257.

Петар Р. Лазов

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

- Р Е З Ю М Е -

В работе во-первых найдены необходимые условия при которых система алгебраических дифференциальных уравнений (1) имеет решения вида (2).Затем, предполагая что числа m и r даются с (3),получены необходимые и достаточные условия существования тех же решений.Причём функции (2) определены и в явном виде.