ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Петар Р. Лазов

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$A(x)y^{(\mu)}=\sum_{\ell=0}^{n} B_{\nu_\ell}(x)\{A_0(x)y+A_1(x)y'+\ldots+A_r(x)y^{(r)}\}^{\nu_\ell},$$

(E) $$\nu_n>\nu_{n-1}>\ldots>\nu_0\geq 0,\quad \mu=0,1,2,\ldots,\quad y^{(r)}=\frac{d^r y}{dx^r},$$

где $A(x)$, $B_{\nu_\ell}(x)$ $(\ell=\overline{0,n})$, $A_p(x)$ $(p=\overline{0,r})$ — полиномы степени a, соответственно b_{ν_ℓ} и a_p. Полиномиальные решения уравнения (E), которые удовлетворяют линейному уравнению

$$A_0y+A_1y'+\ldots+A_ry^{(r)}=0,$$

определяются соотношением $y^{(\mu)}=0$ (для $\nu_0\neq 0$), соответственно соотношением $Ay^{(\mu)}=B_0$ (для $\nu_0=0$).

В дальнейшем предположим, что

(1) $$\varphi=A_0y+A_1y'+\ldots+A_ry^{(r)}\neq 0.$$

Предположим, что некоторый полином $y=y(x)$ с степенью m, который обладает свойством (1), является решением уравнения (E). Если обозначим

$$\deg(A_0y+A_1y'+\ldots+A_ry^{(r)})=\delta(m),$$

тогда

$$\delta(m)=\max(a_0+m,\ a_1+m-1,\ \ldots,\ a_r+m-r).$$

Предположим, что число m дается только одним из соотношений

(2) $$\delta(m)=\frac{b_{\nu_i}-b_{\nu_j}}{\nu_j-\nu_i}\quad (i=\overline{0,n-1};\ j>i).$$

Также предположим, что для чисел b_{ν_k} и a выполняется

(3) $$b_{\nu_k}<\frac{(\nu_j-\nu_k-1)b_{\nu_i}+(\nu_k+1-\nu_i)b_{\nu_j}}{\nu_j-\nu_i}\quad (k=\overline{0,n};\ k\neq i,j),$$

(4) $$a+m-\mu<\frac{(\nu_j-1)b_{\nu_i}+(1-\nu_i)b_{\nu_j}}{\nu_j-\nu_i},$$

причем m определяется из (2).

Полиномы S и Q определим как

(5) $$-B_{\nu_i} = B_{\nu_j} S^q + Q \qquad (q = \nu_j - \nu_i),$$

где S -представляет полиномиальную часть разложения $\sqrt[q]{-B_{\nu_i}(x)/B_{\nu_j}(x)}$ по целым убывающим степеням x .Как известно [1] .

(6) $$\deg Q < \deg B_{\nu_j} + (q-1)\deg S .$$

Определим и полином L в виде

(7) $$L = \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq i,j}}^{m} B_{\nu_\ell} (\omega_t S)^{\nu_\ell} - Q(\omega_t S)^{\nu_i},$$

где ω_t $(t=\overline{1,q})$-корни уравнения $\omega^q = 1$.

Если (5) заменим в (E),находим

(8) $$Ay^{(\mu)} = \sum_{\ell=0}^{m} B_{\nu_\ell} \varphi^{\nu_\ell} - Q\varphi^{\nu_i} + B_{\nu_j} \varphi^{\nu_i} (\varphi^q - S^q) .$$

Из (3),(4) и (6) таким же образом,как и в [2],получается

$$\max\{\deg Ay^{(\mu)}, \deg(B_{\nu_k}\varphi^{\nu_k}) \ (k=\overline{0,m};\ k\neq i,j), \deg(Q\varphi^{\nu_i})\} <$$

(9) $$< \deg(B_{\nu_j}\varphi^{\nu_j - 1}) .$$

Из (9) вытекает,что уравнение (8) может иметь только такие полиномиальные решения,для которых

(10) $$\varphi = A_0 y + A_1 y' + \ldots + A_r y^{(r)} = \omega_t S .$$

ТЕОРЕМА. Дифференциальное уравнение (E),для которого выполняются (3) и(4), имеет решением полином $y=y(x)$,который обладает свойством (1),тогда и только тогда, когда для некоторого $1 \le t \le q$

(I) $$A_0 y + A_1 y' + \ldots + A_r y^{(r)} = \omega_t S$$

(II) $$Ay^{(\mu)} = L .$$

Доказательство. Если (10) заменить в (E),тогда на ~~основании~~ основании (5) и (7),легко получается (II).Если же справедливо (II),тогда

$$Ay^{(\mu)} = \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq i,j}}^{m} B_{\nu_\ell}(\omega_t S)^{\nu_\ell} + (\omega_t S)^{\nu_i}\{-Q - B_{\nu_j}(\omega_t S)^q\} + B_{\nu_j}(\omega_t S)^{\nu_j}$$

или,имея в виду (5),

$$Ay^{(\mu)} = \sum_{\ell=0}^{m} B_{\nu_\ell}(\omega_t S)^{\nu_\ell} .$$

Значит полином $y=y(x)$,для которого выполняется (10),является решением уравнения (E). Так как уравнение (E) может иметь только такие полиномиальные решения, для которых справедливо (10), доказательство закончено.

ПРИМЕР. Для уравнения

$$y = x^2+1+x^8(xy+\tfrac{1}{2}y'-xy'')^2 - x^2(xy+\tfrac{1}{2}y'+xy'')^4 ,$$

$$\nu_i=2,\ \nu_j=4,\ q=2,\ b_{\nu_i}=8,\ b_{\nu_j}=2,\ \delta(m)=m+1=3,\ \mu=0 ,$$

(11) $$A\equiv 1,\ S=[\sqrt{x^8/x^2}]=x^3,\ Q=0,\ L=x^2+1 ,$$

и соотношение (II) гласит: $y=x^2+1$, а соотношение (I):

$$x(x^2+1)+\tfrac{1}{2}(x^2+1)'-x(x^2+1)''=\omega_t x^3 .$$

Последнее соотношение представляет тождество при $\omega_t=1$, и уравнение (11) имеет полиномиальное решение : $y=x^2+1$.

2. При $r=0$ и $A_0\equiv 1$, уравнение (E) принимает вид

(12) $$Ay^{(\mu)}=\sum_{\ell=0}^{n} B_{\nu_\ell}\, y^{\nu_\ell} .$$

Из теоремы, т.е. из (I) и (II) вытекает, что уравнение (12) имеет полиномиальные решения тогда и только тогда, когда для некоторого $1\le t\le q$

$$A\omega_t S^{(\mu)}=L ,$$

и что этими решениями являются только функции $y=\omega_t S$.

Этот результат получен в [1] .

При $A_0=A_1= \ldots =A_{r-1}\equiv 0$, $A_r\equiv 1$ и $\mu=0$, уравнение (E) принимает вид

(13) $$Ay=\sum_{\ell=0}^{n} B_{\nu_\ell}\{y^{(r)}\}^{\nu_\ell}$$

Из теоремы, т.е. из (I) и (II) вытекает, что уравнение (13) имеет полиномиальные решения с свойством $y^{(r)}\ne 0$, тогда и только тогда, когда для некоторого $1\le t\le q$, существуют константы $c_0, c_1, \ldots, c_{r-1}$ такие, что справедливо

$$A\Big(\omega_t I^r S+\sum_{k=0}^{r-1} c_k x^k\Big)=L ,$$

и что этими решениями являются только функции $y=\omega_t I^r S+\sum_{k=0}^{r-1} c_k x^k$.

При этом оператор I определяется как

$$I x^k = x^{k+1}/(k+1) .$$

Этот результат получен нами в [2] .

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Г.Орещенко: Целые решения одного нелинейного дифференциального уравнения, Дифференц. уравн., 10(2), 1974, 253-257.
2. П.Р.Лазов, Д.С.Димитровски: Об одном обобщенном дифференциальном уравнении Клеро, Билтен на ДМФ од СРМ, Кн. 25, 1974, 15-18, Скопје.

Петар Р. Лазов

ПОЛИНОМНИ РЕШЕНИЈА НА ЕДНА КЛАСА АЛГЕБАРСКИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

- Р Е З И М Е -

Во овој труд се најдени потребните и доволни услови под кои диференцијалната равенка (E) има полиномни решенија. Притоа, како специјален случај се јавуваат резултатите најдени во [1] и [2].