МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
1 (14) (29). 1977

Пешар Р. Лазов

ПОЛИНОМНА РЕШЕЊА ДВЕЈУ НЕЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

(Примљено 25. октобра 1976.)

1.1. Посматрајмо диференцијалну једначину

(E) $$y' = y^n + A(x)y - B(x), \qquad n = 2, 3, \ldots ,$$

где су $A(x)$ и $B(x)$ полиноми тј.

$$A = \sum_{k=0}^{a} \alpha_k x^k, \quad B = \sum_{k=0}^{b} \beta_k x^k.$$

За $n = 2$ једначина (E) представља Riccati-еву, а за $n = 3$ Abel-ову диференцијалну једначину. Једначина (E) може имати полиномна решења само када су бројеви a и b везани одређеним релацијама, које ћемо наћи.

Нека је најпре испуњено

(1) $$b = nm + t, \quad m \geq \frac{a}{n-1}; \quad t = \overline{1, n-1}; \quad \beta_b \neq 0.$$

Предпоставимо да под овим условима једначину (E) задовољава неки полином степена m. Тада члан са леве стране исте једначине постаје полином степена $m-1$, први члан са десне стране постаје полином степена nm, а други члан полином степена $a+m$. Како је $a + m \leq (n-1)m + m = nm$ и $nm < nm + t$ то, да би тако добивена једначина представљала идентитет, потребно је да буде $\beta_b = 0$, што се противи услову (1). На сличан начин, ако се претпостави да једначина (E) има за решење полином степена $m+1$, излази да полиномно решење дегенерише у полином степена m. Ако је

$$b = mn, \quad m \geq \frac{a}{n-1},$$

тада једначину (E) могу задовољити полиноми степена m.

Нека је

(2) $$b < na/(n-1)$$

и нека важи

(3) $$a \neq m_0 (n-1); \quad m_0 = 1, 2, \ldots .$$

Претпоставимо да једначина (E), за коју важе (2) и (3), има полиномно решење степена m. Обзиром на (2) не може бити $m = b/n$, а обзиром на (3) не може бити $m = a/(n-1)$. Дакле једначина (E), за коју важе (2) и (3), може имати полиномна решења само степена $m = b - a \, (b \geq a)$.

На крају, нека је

(4) $$a = m_0(n-1); \quad m_0 = 1, 2, \ldots .$$

Пре свега, овде важи све оно што и у случају када је уместо (4) испуњено (3). Међутим, могућ је и случај $m = m_0$. Нека је $b = m_0 - 1$, $m = m_0$; тада, замењујући $y = c_{m_0} x^{m_0} + \cdots + c_0 = H$ у једначини (E), добићемо једначину коју ћемо означити са (Б). Да би једначина (Б) представљала идентитет, за степене $x^i \, (i = \overline{m_0, nm_0})$ треба да важи

(5) $$H^n + AH = 0 \qquad \text{т.j.} \;\; A = -H^{n-1}.$$

Обзиром на (5), једначина (Б) постаје

$$m_0 c_{m_0} x^{m_0 - 1} + \cdots + c_1 = \beta_{m_0 - 1} x^{m_0 - 1} + \cdots + \beta_0 \cdot$$

Ова једначина не може бити идентички задовољена, па услов (2) овде гласи:

$$m_0 - 1 \leq b < nm_0 .$$

Теорема 1. *Диференцијална једначина* (E) *може имати полиномна решења само ако су бројеви a и b везани неком од релација*:

(i) $b = pn$ за $p \geq \dfrac{a}{n-1}$ $\quad (m = p)$

(ii) $a \leq b < a \dfrac{n}{n-1}$ $\quad (m = b - a)$

(iii) $\dfrac{a}{n-1} - 1 \leq b < a \dfrac{n}{n-1}$ за a-мултипл од $n-1$ $\quad \left(m = \dfrac{a}{n-1}\right)$.

Пример 1. За $n = 2$ т.j. за *Riccati*-еву једначину

(6) $$y' = y^2 + Ay - B$$

из теореме 1 излази: Једначина (6) може имати полиномна решења само ако су бројеви a и b везани неком од релација

(7) $$b = 2p \text{ за } p \geq a; \quad a - 1 \leq b < 2a.$$

У [1] показано је да једначина (6) може имати полиномна решења у једном од случајева:

$$b = 2p \text{ за } p \geq a; \quad 0 \leq b < 2a.$$

Дакле, релације (7) коригују резултат нађен у [1].

На сличан начин, за $n = 3$ из теореме 1 излази резултат нађен у [3] за Abel-ову једначину

$$y' = y^3 + Ay - B.$$

1.2. Нека је дат полином $y = H_m(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$. Означавамо са $(b_t)_{y^n}$ коефицијенте који су дефинисани на следећи начин

$$\sum_{t=0}^{mn} (b_t)_{y^n} x^t \equiv \left(\sum_{k=0}^{m} c_k x^k \right)^n .$$

Како је по дефиницији

$$\sum_{t=0}^{mn} (b_t)_{y^n} x^t = \left(\sum_{k=0}^{m} c_k x^k \right)^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{m} c_i x^i \right) = \left(\sum_{t=0}^{m(n-1)} (b_t)_{y^{n-1}} x^t \right) \left(\sum_{i=0}^{m} c_i x^i \right),$$

за налажење кофицијената $(b_t)_{y^n}$ имамо следеће рекурентне обрасце

$$(b_t)_{y^n}=\sum_{i=0}^{\max i}(b_{t-i})_{y^{n-1}}\,c_i \qquad \max i=\min(t,\,m) \quad t=0,\,1,\,\ldots,\,(n-1)\,m,$$

$$(b_{m\,(n-1)+r})_{y^n}=\sum_{j=0}^{m-r}(b_{m\,(n-1)-j})_{y^{n-1}}\,c_{j+r} \qquad r=\overline{1,\,m}. \qquad (B)_{y^n}$$

То значи да коефицијенти $(b_t)_{y^n}$ можемо изразити преко коефицијената $(b_t)_{y^2}$ који су дефинисани релацијом

$$\sum_{t=0}^{2m}(b_t)_{y^2}\,x^t\equiv\left(\sum_{k=0}^{m}c_k\,x^k\right)^2.$$

За ове коефицијенте имамо следеће изразе:

$$\begin{array}{c}(b_{2m-j})_{y^2}=\\ j=\overline{0,\,m}\end{array}\begin{cases}c_{m-l}^2+2\sum\limits_{k=0}^{l-1}c_{m-k}\,c_{m-2l+k}, & j=2l\\[2mm] 2\sum\limits_{k=0}^{l}c_{m-k}\,c_{m-(2l+1)+k}, & j=2l+1\end{cases}$$

а) m-парно

$$(b_{m-k})_{y^2}=\begin{cases}2\sum\limits_{i=0}^{[(m-k)/2]}c_{m-k-i}\,c_i, & k=2p+1\\[2mm] 2\sum\limits_{i=0}^{[(m-k)/2]}c_{m-k-i}\,c_i+c_{\frac{m}{2}-p}^2, & k=2p\end{cases}$$

б) m-непарно

$$(b_{m-k})_{y^2}=\begin{cases}2\sum\limits_{i=0}^{[(m-k)/2]}c_{m-k-i}\,c_i, & k=2p\\[2mm] 2\sum\limits_{i=0}^{[(m-k)/2]}c_{m-k-i}\,c_i+c_{\frac{m-1}{2}-p}^2, & k=2p+1\end{cases}$$

$$k=\overline{1,\,m}\begin{cases}k=2p, & p=\overline{1,\,\frac{m}{2}}\\[2mm] k=2p+1, & p=\overline{0,\,\frac{m-1}{2}}.\end{cases} \qquad (B)_{y^2}.$$

1.3, Претпоставимо да су услови теореме 1 испуњени и да је полином

$$y=\omega_\nu\sum_{k=0}^{m}c_k\,x^k, \tag{8}$$

где су $\omega_\nu\,(\nu=\overline{1,\,n})$-корени једначине $\omega^n=1$, решење једначине (Е). Тада, на основу дефиниције коефицијената $(b_t)_{yn}$, налазимо следећи систем једначина:

$$\omega_\nu\,(t+1)\,c_{t+1}=(b_t)_{yn}+\omega_\nu \sum_{\max(0,\,t-a)}^{\min(t,\,m)} \alpha_{t-j}\,c_j-\beta_t$$

$$(t\leq m-1)\quad (t\leq mn)\qquad (t\leq a+m)\quad (t\leq b)$$

(9) $$t=0,\,1,\,\ldots\,,\,\max(mn,\,a+m,\,b).$$

Теорема 2. *Диференцијална једначина* (E), *за коју су испуњени услови теореме* 1, *има полиномна решења ако и само ако за неко* $1\leq\nu\leq n$ *важи систем једначина* (9). *Ова су решења дата са* (8).

Претпоставимо да је испуњено

(10) $$a<\frac{n-2}{n}\,b.$$

Услов (10) обухваћен је условом (i). Дакле једначина (E), за коју важи (10), може имати полиномна решења само ако је b мултипл од n.

У [2] добивен је следећи резултат:

Теорема 3. *Нека је b мултипл од n и нека је испуњено* (10). *Тада једначина* (E) *има полиномна решења ако и само ако за неко* $1\leq\nu\leq n$

(11) $$\omega_\nu\,S'=\omega_\nu\,AS-Q,$$

и та су решења само функције

(8 а) $$y=\omega_\nu\,S.$$

При томе полиноми S и Q су дефинисани као

$$B=S^n+Q,\qquad S=[\sqrt[n]{B}],$$

где је $[\sqrt[n]{B}]$-полиномни део развоја $\sqrt[n]{B(x)}$ по целим степенима од x. Дакле, ако је испуњено (10), тада релација (11) даје систем једначина (9), а полином (8 а) једнак је полиному (8).

Ако важи (10), тада из система једначина (9) налазимо

(12) $$(b_t)_{yn}=\beta_t\qquad (t=\overline{mn-m,\,mn}),$$

па из (8 а) и (8) излази следећи резултат

Став. Ако дефинишемо полином S као

(13) $$S=\left[\sqrt[n]{\sum_{t=0}^{mn}\beta_t\,x^t}\right]\equiv\sum_{k=0}^{m} c_k\,x^k,$$

тада за коефицијенте c_k $(k=\overline{0,\,m})$ важе рекурентни обрасци (12).

Релације (12) могу послужити као један метод за одређивање коефицијената S-полинома. Тако на пример, за $n=2$ излази да коефицијенти c_k S-полинома, дефинисаног као

$$S=\left[\sqrt{\sum_{t=0}^{2m}\beta_t\,x^t}\right]\equiv\sum_{k=0}^{m} c_k\,x^k,$$

задовољавају следећи систем једначина

$$\beta_{2m-j}=\begin{cases} c_{m-l}^2+2\sum\limits_{k=0}^{l-1} c_{m-k}\,c_{m-2l+k}, & j=2l\\ 2\sum\limits_{k=0}^{l} c_{m-k}\,c_{m-(2l+1)+k}, & j=2l+1, \end{cases} \quad j=\overline{0,\,m}$$

одакле сукцесивно налазимо $c_m, c_{m-1}, \ldots, c_0$. Овај смо резултат добили у [4].

2.1. Нека је дата диференцијална једначина

$$(Д) \qquad y^{(\mu)}=(\gamma y^{(r)}+2\,\alpha\, yy')^n+B(x), \qquad B\neq 0, \qquad y^{(r)}=\frac{d^r y}{dx^r},$$
$$\mu,\ r=0,\ 1,\ \ldots,\ n=2,\ 3,\ \ldots,$$

где су $B(x)$-полином степена b, а α, γ — константе. Једначина (Д) такође обухвата Riccati-еву и Abel-ову једначину.

Ако су μ и r различити од нуле, тада ниједна константа не задовољава једначину (Д). Ако је бар један од бројева μ, r једнак нули, тада једначина (Д) има за решење неку константу ако и само ако $B=\text{const}$.

Слично као и у 1.1., констатује се да једначина (Д) може имати полиномна решења ($\neq$const.) само ако

$$(14) \qquad b=n(2m-1); \qquad m=1,\ 2,\ \ldots .$$

Полиноме S и Q дефинисаћемо као

$$(15) \qquad -B=S^n+Q, \qquad S=[\sqrt[n]{-B}].$$

У [2] показано је да важи

$$(16) \qquad \deg Q=l<(n-1)\deg S.$$

Ако је $y(x)$ полином степена m, тада је члан $R=2\,\alpha yy'+\gamma y^{(r)}$ полином степена $2m-1$. Обзиром на (15), једначина (Д) постаје

$$y^{(\mu)}=R^n-S^n-Q.$$

На основу (16), лако се констатује да последња једначина може бити задовољена само за $R=\omega_\nu S$ т.ј.

$$(17) \qquad 2\,\alpha\, yy'+\gamma\, y^{(r)}=\omega_\nu\, S.$$

Из (17), (15) и (Д), налазимо

$$(18) \qquad y^{(\mu)}+Q=0.$$

Нека је

$$(8б) \qquad y=c_m x^m+c_{m-1}x^{m-1}+\cdots+c_0,$$

као и

$$S=\sum_{k=0}^{2m-1} S_k x^k, \qquad Q=\sum_{k=0}^{l} q_k x^k.$$

Тада, обзиром да је $2yy' = (y^2)'$, на основу дефиниције коефицијената $(b_t)_{y^2}$, из (17) налазимо следећи систем једначина

$$\alpha(t+1)(b_{t+1})_{y^2} + \gamma c_{t+r} r! \binom{t+r}{r} = \omega_\nu S_t \qquad t = \overline{0, 2m-1}, \tag{I}$$

$$(t \leq m-r)$$

а из (18):

$$c_{t+\mu} \mu! \binom{t+\mu}{\mu} + q_t = 0; \qquad t = 0, 1, \ldots, l = m - \mu. \tag{II}$$

При томе претпостављамо да је $\mu \leq m$. Ако је $\mu > m$, тада из (18) следи да је $Q \equiv 0$.

Теорема 4. *Нека је испуњено* (14). *Тада диференцијална једначина* (Д) *има полиномна решења ако и само ако за неко* $1 \leq \nu \leq n$ *важе системи једначина* (I) *и* (II) *и ова су решења функције* (8б). *Ако* (14) *није испуњено, тада једначина* (Д) *нема полиномна решења.*

Пример 2. За једначину

$$y' = \left(\frac{115}{54} y'' + \frac{1}{2} yy'\right)^2 - (x^6 + 4x^5 + 2x^4 + 2x^3 + \beta_4 x^2 + \beta_5 x^5 + \beta_6); \qquad \beta_4, \beta_5, \beta_6 = \text{const.}$$

$$b = 6, \ \mu = 1, \ r = 2, \ n = 2, \ m = 2,$$

$$S = [\sqrt{x^6 + 4x^5 + 2x^4 + 2x^3 + \beta_4 x^2 + \beta_5 x + \beta_6}] = x^3 + 2x^2 - x + 3$$

па систем једначина (I) гласи

$$\frac{1}{2} \omega_\nu c_1 + \frac{115}{27} c_2 = 3\omega_\nu, \quad \frac{1}{2}(c_1^2 + 2c_0 c_2) = -\omega_\nu,$$

$$\frac{3}{2} c_1 c_2 = 2\omega_\nu, \quad c_2^2 = \omega_\nu,$$

одакле налазимо $\omega_\nu = 1$, $c_2 = 1$, $c_1 = \frac{4}{3}$, $c_0 = -\frac{19}{7}$.

Како је $Q = (\beta_4 - 13)x^2 + (\beta_5 + 6)x + (\beta_6 - 9)$, из (II) добијамо

$$\beta_4 = 13, \quad \beta_5 = -8, \quad \beta_6 = \frac{23}{3}; \tag{19}$$

посматрана једначина има полиномно решење $y = x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{19}{7}$ и то само када су константе β_4, β_5 и β_6 дате са (19).

2.2. За $\mu = 0$ једначина (Д) гласи

$$y = (\gamma y^{(r)} + 2\alpha yy')^n + B(x). \tag{ДД}$$

За једначину (ДД) из (17) и (18), излази следећи резултат:

Теорема 5. *Диференцијална једначина* (ДД) *за коју важи услов* (14), *има полиномно решење* ($\neq$const.) *ако и само ако за неко* $1 \leq \nu \leq n$

$$-\gamma Q^{(r)} + 2\alpha QQ' = \omega_\nu S, \tag{20}$$

и то је решење само функција $y = -Q$.