МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
1 (14) (29), 1977

Петар Р. Лазов

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

(Примљено: 28. 03. 1977)

1. В [1] найдены необходимые и достаточные условия при которых дифференциальное уравнение

$$A(x)\,y^{(\mu)}=\sum_{l=0}^{n} B_{\nu_l}(x)\,y^{\nu_l}, \qquad \nu_n\geq 2,$$

где $A(x)$, $B_{\nu_l}(x)\,(l=\overline{0,\,n})$ — полиномы с степенью a, соответственно b_{ν_k}, имеет полиномиальные решения.

В [2] тот же самый проблем решен для дифференциального уравнения

$$A(x)\,y=\sum_{l=0}^{n} B_{\nu_l}(x)\,(y')^{\nu_l}, \qquad \nu_n\geq 2.$$

Для дифференциального уравнения

$$A(x)\,y^{(\mu)}=\sum_{l=0}^{n} B_{\nu_l}(x)\,(yy')^{\nu_l}, \qquad \nu_n\geq 2,$$

в [3] найдены все возможые значения для степеней полиномиальных решений, также как и необходимые и достаточные условия существования этих решений.

Предметом рассмотрения в этой работе, является нелинейное дифференциальное уравнение

$$(1) \qquad A(x)\,y^{(\mu)}=\sum_{l=0}^{n} B_{\nu_l}(x)\,(y^k y')^{\nu_l}, \quad \prod_{l=0}^{n}|B_{\nu_l}(x)|\not\equiv 0,$$

$$0\leq\nu_0<\nu_1<\cdots<\nu_n,\ \nu_n\geq 2,\ \mu, k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\ y^{(\mu)}=\frac{d^{(\mu)}y}{dx^{(\mu)}}.$$

2. Необходимые условия существования полиномиальных решений уравнения (1) утверждает следующая теорема.

Теорема 1. *Дифференциальное уравнение* (1) *может иметь полиномиальные решения только тогда, когда существует целое неотрицательное число m такое, что между числами*

$$a+m-\mu,\ b_{\nu_l}+\nu_l\{m(k+1)-1\}, \qquad (l=\overline{0,\,n}),$$

существуют хотя бы два, которые самые большие и между собой равны. Эта теорема вытекает из результатов, найденных в [5].

На основании теоремы 1 *непосредственно находим следующие возможные значения для степеней полиномиальных решений уравнения* (1):

$$m = \frac{a - \mu - b_{\nu_l} + \nu_l}{(k+1)\nu_l - 1} \qquad (l = \overline{0, n}),$$

(2)

$$m = \frac{1}{k+1}\left(\frac{b_{\nu_i} - b_{\nu_j}}{\nu_j - \nu_i} + 1\right) \qquad (i = \overline{0, n-1};\ j > i).$$

Следствие 1. *Дифференциальное уравнение* (1) *не может иметь больще чем* $n+1$ *полиномиальных решений с различными степенями.*

3. Найдем необходимые и достаточные условия при которых уравнение (1) имеет полиномиальные решения. При этом предположим, что степень этих решений даётся только одним из соотношений (2). Также предположим, что выполнены коэффициентные условия

$$b_{\nu_l} < \frac{(\nu_j - \nu_l - 1)\, b_{\nu_i} + (1 + \nu_l - \nu_i)\, b_{\nu_j}}{\nu_j - \nu_i} \qquad (l = \overline{0, n};\ l \neq i, j), \tag{3}$$

$$a - \mu + \frac{1}{k+1} < \frac{\{(k+1)\nu_j - k - 2\}\, b_{\nu_i} + \{k + 2 - (k+1)\nu_i\}\, b_{\nu_j}}{(k+1)(\nu_j - \nu_i)}. \tag{4}$$

Полиномы S и Q определим как

$$-B_{\nu_i} = B_{\nu_j} S^q + Q, \quad S = [\sqrt[q]{-B_{\nu_i}/B_{\nu_j}}], \qquad (q = \nu_j - \nu_i), \tag{5}$$

где $[\sqrt[q]{-B_{\nu_i}(x)/B_{\nu_j}(x)}\,]$ представляет полиномиальную часть разложения $\sqrt[q]{-B_{\nu_i}(x)/B_{\nu_j}(x)}$ по целым убывающим степеням x. При этом, согласно результате, найденного в [1], справедливо

$$dg\, Q < b_{\nu_j} + (q-1)\, dg\, S. \tag{6}$$

Определим и полином $L = L(\omega_t, x)$ как

$$L = \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq i, j}}^{n} B_{\nu_l} (\omega_t S)^{\nu_l} - Q\, (\omega_t S)^{\nu_i}, \tag{7}$$

где $w_t\, (t = \overline{1, q};\ q = \nu_j - \nu_i)$ — корни уравнения $\omega^q = 1$.

Используя (3), (4) и (6), легко получается

(8)

$$\max\{dg\, Ay^{(\mu)},\ dg\, B_{\nu_l}(y^k y')^{\nu_l}\ (l = \overline{0, n};\ l \neq i, j),\ dg\, Q\, (y^k y')^{\nu_i}\} <$$
$$< dg\, B_{\nu_j} \cdot (y^k y')^{\nu_j - 1}.$$

Если (5) заменить в (1), находим

$$Ay^{(\mu)} = \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq i, j}}^{n} B_{\nu_l}(y^k y')^{\nu_l} - Q\, (y^k y')^{\nu_i} + B_{\nu_j}\, (y^k y')^{\nu_i}\, \{(y^k y')^q - S^q\}. \tag{9}$$

Из (8) вытекает, что в уравнении (9) только для члена

$$\xi = B_{\nu_j}(y^k y')^{\nu_i}\, \{(y^k y')^q - S^q\}$$

справедливо

$$dg\,\xi > dg\,B_{\nu_j}(y^k y')^{\nu_j - 1}.$$

Отсюда следует, что уравнение (9) может представлять тождество, только тогда, когда $y^k y' = \omega_t S$ т.е.

$$y^{k+1} = (k+1)\,\omega_t\, IS + c, \tag{10}$$

где $Ix^p = x^{p+1}/(p+1)$, а c — константа. Если с $\Omega_\lambda\,(\lambda = \overline{1, k+1})$ обозначим корни уравнения $\Omega^{k+1} = 1$, тогда, на основании (7) и (10), приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Диференциальное уравнение* (1), *для которого выполняются коэффициентные условия* (3) *и* (4), *имеет полиномиальные решения тогда и только тогда, когда для некоторого* $1 \le t \le q$ *и некоторого* $1 \le \lambda \le k+1$ *существует константа* c, *такая что*

$$\text{(I)} \qquad \{(k+1)\,\omega_t\, IS + c\}^{\frac{1}{k+1}} \text{ — полином}$$

$$\text{(II)} \qquad \Omega_\lambda A\{\sqrt[k+1]{(k+1)\,\omega_t\, IS + c}\}^{(\mu)} = L,$$

и этими решениями являются только функции

$$y = \Omega_\lambda \sqrt[k+1]{(k+1)\,\omega_t\, IS + c}.$$

Доказательство, Если полином $y = y(x)$, определенный с (10) является решением уравнения (1), тогда, с помощью (5) и (7) легко получается соотношение (II). Обратно, если справедливо (II), тогда

$$A\,\Omega_\lambda \{\sqrt[k+1]{(k+1)\,\omega_t\, IS + c}\}^{(\mu)} = \sum_{\substack{l=0\\ l \ne i,j}}^{n} B_{\nu_l}(\omega_t S)^{\nu_l} + B_{\nu_j}(\omega_t S)^{\nu_j} +$$

$$+ (\omega_t S)^{\nu_i}\{-Q - B_{\nu_j}(\omega_t S)^q\}$$

или, с учётом (5),

$$\Omega_\lambda A\{\sqrt[k+1]{(k+1)\,\omega_t\, IS + c}\}^{(\mu)} = \sum_{l=0}^{n} B_{\nu_l}(\omega_t S)^{\nu_l}.$$

Это значит, что полиномы, определенные с (10) являются решениями уравнения (1). Так как это единственно возможные полиномиальные решения того же уравнения, доказательство закончено.

4. Если $\nu_0 \ne 0$ и $k \ne 0$, тогда уравнение (1) можно написать в виде

$$Ay^{(\mu)} = y^k\{B_{\nu_0}(y^k)^{\nu_0 - 1}(y')^{\nu_0} + \cdots + B_{\nu_n}(y^k)^{\nu_n - 1}(y')^{\nu_n}\}. \tag{11}$$

Предположим, что

$$y^{(\mu)} \ne 0. \tag{12}$$

Пусть $y = y(x)$ — полиномиальное решение уравнения (11) которое имеет свойство (12). Пусть r — нуль кратности ν для полинома $y(x)$. Тогда правая часть уравнения (11) становится полиномом, для которого r — нуль кратности $\ge k\nu$. Если $k\nu \ge \mu$ тогда, с учётом того, что r — нуль кратности $k\nu - \mu$ для полинома $y^{(\mu)}(x)$, r должно быть нулём кратности $\ge \mu$ для полинома $A(x)$. Если же $k\nu < \mu$, тогда r дожно быть нулём кратности $\ge k\nu$ для полинома $A(x)$, и тогда справедлива

Теорема 3. *Пусть* ν_0, $k \neq 0$. *Тогда класс функций* $y = y(x)$, *определенных как*

$$y = c(x - r_1)^{p_1}(x - r_2)^{p_2} \dots (x - r_s)^{p_s},$$

где c — *константа*, $r_1, r_2, \dots, r_s$ — *нули полинома* $A(x)$, $p_1, p_2, \dots, p_s$ — *целые неотрицательные числа, содержит все полиномиальные решения уравнения* (1), *которые обладают свойством* (12).

Нахождение полиномиальных решений дифференциального уравнения (1), *для которых условие* (12) *не выполнено, сводится к нахождению полиномиальных решений одного обыкновенного алгебраического уравнения (подстановка* $y^k y' = z$).

5. *Для* $r = 0$ *уравнение* (1) *гласит*

$$A(x)y = \sum_{l=0}^{n} B_{\nu_l}(x)(y^k y')^{\nu_l}. \tag{1a}$$

Используя результат, полученный в 3, *найдём необходимые и достаточные условия, при которых уравнение* (1a) *имеет параметрические решения вида*

$$x = F_r(t),\ y = \Phi_m(t), \qquad (r, m = 1, 2, \dots), \tag{13}$$

где $F_r(t)$, $\Phi_m(t)$ — *полиномы от* t *с степенью* r, *соответственно* m. *Принимая во внимание, что* $y' = \dot{y}/\dot{x}$, *уравнение* (1a) *становится*

$$A^*(t)y = \sum_{l=0}^{n} B^*_{\nu_l}(t)(y^k \dot{y})^{\nu_l}, \tag{14}$$

где полиномы $A^*(t)$ *и* $B^*_{\nu_l}(t)$ *определены как*

$$A^*(t) = A(F_r(t)) \cdot \dot{F}_r(t)^{\nu_n},$$

$$B^*_{\nu_l}(t) = B_{\nu_l}(F_r(t)) \cdot \dot{F}_r(t)^{\nu_n - \nu_l}.$$

Таким же одразом как и в 2, *возможные значения для чисел* m *и* r *находятся из условия, чтобы между числами*

$$ar + \nu_n(r - 1) + m,$$

$$rb_{\nu_l} + (\nu_n - \nu_l)(r - 1) + \nu_l\{(k + 1)m - 1\}, \qquad (l = \overline{0, n}),$$

существовали хотя бы два равные между собой:

$$m = \frac{r}{k+1}\left(\frac{b_{\nu_i} - b_{\nu_j}}{\nu_j - \nu_i} + 1\right) \qquad (i = \overline{0, n-1};\ j > i), \tag{15}$$

$$m = r\frac{a - b_{\nu_l} + \nu_l}{(k+1)\nu_l - 1} \qquad (l = \overline{0, n}). \tag{16}$$

Для $k = 0$ *возможен и так называемый „особый случай“:*

$$m = r\alpha/\beta_1, \tag{17}$$

где α *и* β_1 — *коэффициенты членов с степенью* a, *соответственно* b_1, *полиномов* A *и* B_1.

Теорема 4. *Дифференциальное уравнение* (1a) *может иметь только такие решения вида* (13), *для которых числа* m *и* r *связаны некоторим из соотношений* (15), (16) *(или* (17) *для* $k = 0$).

Если условия (3) *и* (4) *поставим для чисел* a^* *и* $b^*_{\nu_l}$ *определенных как*

$$a^* = ar + \nu_n (r-1),$$

$$b^*_{\nu_l} = rb_{\nu_l} + (\nu_n - \nu_l)(r-1), \qquad (l = \overline{0, n}),$$

тогда получаются следующие коэффициентные условия:

$$b_{\nu_l} < \frac{(\nu_j - \nu_l - 1)\, b_{\nu_i} + (1 + \nu_l - \nu_i)\, b_{\nu_j}}{\nu_j - \nu_i} - \frac{r-1}{r} \qquad (l = \overline{0, n};\ l \neq i, j), \tag{18}$$

$$a + \frac{1}{k+1} < \frac{\{(k+1)\nu_j - k - 2\}\, b_{\nu_i} + \{k + 2 - (k+1)\nu_i\}\, b_{\nu_j}}{(k+1)(\nu_j - \nu_i)} - \frac{r-1}{r}. \tag{19}$$

Согласно этому, если числа m *и* r *связаны только одним из соотношений* (15) *и если выполнены коэффициентные условия* (18) *и* (19), *тогда уравнение* (14) *может представлять тождество только для*

$$y^{k+1} = \Phi_m^{k+1} = (k+1)\, \omega_\rho\, IS^* + c, \tag{20}$$

где c — *константа*, ω_ρ $(\rho = \overline{1, q})$ — *корни уравнения* $\omega^q = 1$, *а* $S^*(t)$ — *полином од* t, *определенный как*

$$-B^*_{\nu_i} = B^*_{\nu_j} (S^*)^q + Q^*, \quad S^*(t) = \left[\sqrt[q]{-B^*_{\nu_i}(t) / B^*_{\nu_j}(t)}\right], \qquad (q = \nu_j - \nu_i). \tag{21}$$

Полином $L^* = L^*(\omega_\rho, t)$ *определим как*

$$L^* = \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq i,j}}^{n} B^*_{\nu_l} \cdot (\omega_\rho S^*)^{\nu_l} - Q^* \cdot (\omega_\rho S^*)^{\nu_i}. \tag{22}$$

Значит, если предположим, что числа m *и* r *связаны только одним из соотношений* (15) *тогда, на основании* (20), (21) *и* (22), *приходим к следующему результату.*

Теорема 5. *Дифференциальное уравнение* (1a), *для которого выполняются коэффициентные условия* (18) *и* (19), *имеет параметрические решения вида* (13) *тогда и только тогда для некоторого* $1 \leq \rho \leq q$ *и некоторого* $1 \leq \lambda \leq k+1$ *существует константа* c *такая, что*

$$\Phi_m = \Omega_\lambda \sqrt[k+1]{(k+1)\, \omega_\rho\, IS^* + c}, \tag{III}$$

$$\Omega_\lambda A^* \sqrt[k+1]{(k+1)\, \omega_\rho\, IS^* + c} = L^*. \tag{IV}$$

Для $k = 0$ *из теоремы* 5 *вытекает результат, найденный в* [4].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Г. Орещенко, *Целые решения одного нелинейного дифференциального уравнения*, Дифференц. уравн. 10 (2), 1974, 253—257.

[2] П. Р. Лазов, Д. С. Димитровски, *Егзистенција на полиномни решенија на една класа диференцијални равенки од Клеро-ов тип*, Годишен Зборник на ПМФ — Скопје, Кн. 25—26, 1975/76, 35—40.

[3] П. Р. Лазов, *За една нелинеарна диференцијална равенка*, Спец. издан. на Мат. фак. — Скопје, кн. 3 (20), 1977, 35—40.

[4] П. Р. Лазов, *Параметрическое решение одного класса дифференциальных уравнений типа Клеро*, Билтен на ДМФ од СРМ, Кн. 26, 1975/76, 33—34.

[5] П. Р. Лазов, *Степени на полиномните решенија на алгебарските диференцијални равенки*, Билтен на ТМФ — Скопје, Кн. 7, бр. 2, 1976, 53—58.