MATEMATIČKI VESNIK
3(16)(31),1979

Petar Lazov

DVE PRIMEDBE U VEZI SA PARAMETARSKIM REŠAVANJEM ALGEBARSKIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA PRVOG REDA

(Primljeno 15.Oktobra.1978)

1. Opšta algebarska diferencijalna jednačina prvog reda

$$(1.1)\qquad P(x,y,y')=0,\qquad (y'=\frac{dy}{dx}),$$

gde je $P(x,y,y')$ polinom po svojim promenljivim, može se napisati kao

$$(1.2)\qquad \sum_{i=0}^{N} B_{\nu_i}(x)y^{\mu_i}(y')^{\mu_i'}=0,\quad N=1,2,\ldots;\ \mu_i,\ \mu_i'=0,1,2,\ldots,$$

gde su $B_{\nu_i}(x)$ $(i=\overline{0,N})$ polinomi po x.

Ako jednačina (1.2) ima rešenja oblika

$$(1.3)\qquad x=F_r(t),\quad y=\phi_m(t),\quad r,m=1,2,\ldots,$$

gde su $F_r(t)$, $\phi_m(t)$ polinomi po t stepena r odnosno m, ista prelazi u oblik

$$(1.4)\qquad \sum_{i=0}^{N} B_{\nu_i}^*(t)y^{\mu_i}\dot{y}^{\mu_i'}=0,\quad (\dot{y}=\frac{dy}{dt}),$$

gde

$$(1.5)\qquad B_{\nu_i}^*(t)=\dot{F}_r(t)^{\mu'-\mu_i'}\cdot B_{\nu_i}(F_r(t)),\quad \mu'=\max_{i=\overline{0,N}}\mu_i'.$$

1.1. Ako sa b_{ν_i} označimo stepen polinoma $B_{\nu_i}(x)$, a sa β_i-koeficijent člana sa stepenom b_{ν_i} tada, za

$$x = F_r(t) = a_r t^r + \ldots + a_o, \; y = \phi_m(t) = c_m t^m + \ldots + c_o$$

jednačina *(1.4)* postaje

$$(1.6) \qquad \sum_{i=0}^{N} (ra^r t^{r-1} + \ldots)^{\mu' - \mu_i} (\beta_i a_r^{b_{\nu_i}} t^{rb_{\nu_i}} + \ldots)(c_m t^m + \ldots)^{\mu_i} (mc_m t^{m-1} + \ldots)^{\mu_i'} = 0.$$

Članove $\xi_i t^{d_i}$, gde su

$$(1.7) \qquad \xi_i = r^{\mu' - \mu_i'} a_r^{\mu' - \mu_i' + b_{\nu_i}} \beta_i c_m^{\mu_i + \mu_i'} m^{\mu_i'},$$

$$(1.8) \qquad d_i = m(\mu_i + \mu_i') + r(b_{\nu_i} + \mu' - \mu_i') - \mu',$$

nazvaćemo glavnim članovima. U jednačini *(1.6)* glavni članovi odredjuju izraze sa najvišim stepenima, pa se ista može napisati u obliku

$$(1.9) \qquad \sum_{i=0}^{N} (\xi_i t^{d_i} + \eta_i) = 0,$$

pri čemu

$$dg\, \eta_i < d_i.$$

Obzirom na poslednju nejednačinu, relacija *(1.9)* ne može predstavljati identitet ako medju brojevima definisanim sa *(1.8)* postoji jedan koji je najveći, pa se može formulisati sledeći rezultat.

TEOREMA 1. Opšta algebarska diferencijalna jednačina prvog reda *(1.2)* može imati rešenja oblika *(1.3)* samo ako egzistiraju dva prirodna broja m i r takva, da medju brojevima definisanim sa *(1.8)* postoje bar dva broja d_i i d_j takva da

$$d_i = d_j \quad (i \neq j;\; i,j = \overline{0,N})$$

$$(1.10) \qquad d_k < d_i \quad (k \neq i,j;\; k = \overline{0,N}).$$

DEFINICIJA. Ako za brojeve d_i i d_j, koji zadovoljavaju uslov *(1.10)*, važi

$$(1.11) \qquad \mu_j + \mu_j' = \mu_i + \mu_i',$$

tada odgovarajuće vrednosti brojeva m i r zovemo *singularne*, a ostale moguće vrednosti *nesingularne*.

Pojam *singularni eksponent* prvi put je uveden u[1] za Rikatijevu diferencijalnu jednačinu.

Pomoću teoreme 1 direktno nalazimo nesingularne vrednosti za m i r:

$$m = r\,\frac{b_{\nu_i} - b_{\nu_j} + \mu'_j - \mu'_i}{\mu_j - \mu_i + \mu'_j - \mu'_i} \qquad (i,=\overline{0,N-1};\ j>i;\ \mu_j+\mu'_j \neq \mu_i+\mu'_i). \tag{1.12}$$

Ako medju brojevima definisanim sa (1.8) postoje q njih sa osobinom (1.11) ($i \neq j$; $i,j=p_1,p_2,\ldots,p_q$) tada, na osnovu teoreme 1 i (1.7), izlazi da singularne vrednosti mogu biti samo oni celi pozitivni brojevi m i r, koji zadovoljavaju neku od jednačina:

$$\begin{aligned}
&\beta_{p_1}(m/r)^{\mu'_{p_1}} + \beta_{p_2}(m/r)^{\mu'_{p_2}} = 0\\
&\vdots\\
&\beta_{p_1}(m/r)^{\mu'_{p_1}} + \beta_{p_q}(m/r)^{\mu'_{p_q}} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\beta_{p_1}(m/r)^{\mu'_{p_1}} + \beta_{p_2}(m/r)^{\mu'_{p_2}} + \beta_{p_3}(m/r)^{\mu'_{p_3}} = 0\\
&\vdots\\
&\beta_{p_1}(m/r)^{\mu'_{p_1}} + \beta_{p_{q-1}}(m/r)^{\mu'_{p_{q-1}}} + \beta_{p_q}(m/r)^{\mu'_{p_q}} = 0\\
&\vdots\\
&\beta_{p_1}(m/r)^{\mu'_{p_1}} + \beta_{p_2}(m/r)^{\mu'_{p_2}} + \ldots + \beta_{p_q}(m/r)^{\mu'_{p_q}} = 0\\
&\vdots\\
&\beta_{p_{q-1}}(m/r)^{\mu'_{p_{q-1}}} + \beta_{p_q}(m/r)^{\mu'_{p_q}} = 0.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

POSLEDICA 1. Opšta algebarska diferencijalna jednačina prvog reda *(1.2)* može imati samo takva rešenja oblika *(1.3)*, za koja su brojevi m i r vezani nekom od relacija *(1.12)* ili nekom od relacija *(1.13)*.

Podvlačimo da su nesigularni eksponenti odredjeni brojevima b_{ν_i}, dok su sigularni odredjeni koeficijentima β_i.

Ako uslov *(1.10)* ne mogu jednovremeno zadovoljiti više od dva broja d_i i $d_j (q=2)$, tada su singularne vrednosti za m i r vezane relacijom

$$(1.14)\qquad m = r(-\beta_i/\beta_j)^{\frac{1}{\mu'_j-\mu'_i}}$$

1.2. Dobivene ćemo rezultate primeniti na dva konkretna tipa algebarskih diferencijalnih jednačina prvog reda.

Za algebarsku diferencijalnu jednačinu

$$(1.15)\qquad \left(\sum_{i=1}^{\rho} A_{\mu_i}(x)y^{\mu_i-1}\right)y' = \sum_{j=0}^{n} B_{\nu_j}(x)y^{\nu_j},$$

$$1 \leqslant \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_\rho,\ 0 \leqslant \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_n,$$

imamo:

$$\mu_j=\nu_j,\ \mu'_j=0\ (j=\overline{0,n}),\ \mu_{n+i}=\mu_i-1,\ \mu'_{n+i}=1\ (i=\overline{1,\rho}),\ N=n+\rho,$$

pa iz *(1.12)* sledi da su nesigularne vrednosti za m i r vezane relacijama:

$$m = r\frac{a_{\mu_i}-a_{\mu_k}}{\mu_k-\mu_i}\qquad (i=\overline{1,\rho-1};\ k>i)$$

$$(1.16)\qquad m = r\frac{b_{\nu_j}-b_{\nu_k}}{\nu_k-\nu_j}\qquad (j=\overline{0,n-1};\ k>j)$$

$$m = r\frac{b_{\nu_j}-a_{\mu_i}+1}{\mu_i-\nu_j}\qquad (i=\overline{1,\rho};\ j=\overline{0,n};\ \mu_i\neq\nu_j).$$

Uslov *(1.11)* ovde glasi

$$(1.17)\qquad \nu_j = \mu_i$$

i njega ne mogu zadovoljiti jednovremeno više od dva člana jednačine *(1.15)*. Dakle, ako za q članova važi *(1.17)*, tada iz *(1.14)* sledi da su singularne vrednosti za m i r vezane nekom od relacija:

$$(1.18)\qquad m = r\left(\frac{\beta_{\mu_s}}{\alpha_{\mu_s}}\right), \qquad s = p_1, p_2, \ldots, p_q.$$

Za $r=1$ relacije *(1.16)* i *(1.18)* dobivene su u [2], a za $\rho=1$ u [3].

Na sličan način, za algebarsku diferencijalnu jednačinu

$$A(x)y = \sum_{i=0}^{n} B_{\nu_i}(x)(y^k y')^{\nu_i}$$

iz teoreme 1, *(1.12)* i *(1.14)* izlaze rezultati do kojih smo došli u [4].

2. Neka je $P(x,y,y')$ polinom po svojim promenljivima t.j.

$$(2.1)\qquad P(x,y,y') = \sum_{i=0}^{N} A_{\nu_i}(x)y^{\mu_i}(y')^{\mu_i'}$$

i neka je ispunjeno *(1.3)*. Tada, na osnovu *(1.4)* i *(1.5)*, funkcija $P(x,y,y')$ može se zapisati u obliku

$$(2.2)\qquad P(x,y,y') = \dot{F}_r(t)^{-\mu'} \cdot P^*(t,y,\dot{y}), \qquad \mu' = \max_{i=\overline{0,N}} \mu_i',$$

gde

$$(2.3)\qquad P^*(t,y,\dot{y}) = \sum_{i=0}^{N} A^*_{\nu_i}(t)y^{\mu_i}\dot{y}^{\mu_i'}, \qquad (\dot{y} = \frac{dy}{dt}),$$

pri čemu su polinomi $A^*_{\nu_i}(t)$ definisani sa *(1.5)*.

Razmotrimo sada algebarsku diferencijalnu jednačinu

$$(2.4)\qquad \psi(x,y,y') = \sum_{k=0}^{n} B_{\nu_k}(x)[P(x,y,y')]^{\nu_k}, \quad 0\leq\nu_0<\nu_1 \ldots <\nu_n,$$

gde su $\psi(x,y,y')$, $P(x,y,y')$-polinomi po svojim promenljivim. Pretpostavićemo da jednačina *(2.4)* i jednačina

$$P(x,y,y') = 0$$

nemaju ista rešenja oblika *(1.3)*. Ako ova pretpostavka nije ispunjena, tada se nalaženje rešenja oblika *(1.3)* za jednačinu *(2.4)* svodi na isti taj problem za jednačinu

$$\psi(x,y,y') = 0, \quad (\nu_o \neq 0) \text{ ili } \psi(x,y,y') = B_o(x), \ (\nu_o = 0).$$

Ako je ispunjeno *(1.3)* tada, obzirom na *(2.2)*, jednačina *(2.4)* može se napisati kao

$$\frac{\psi^*(t,y,\dot{y})}{\dot{F}_r(t)^{\mu_2'}} = \frac{1}{\dot{F}_r(t)^{\mu_1'\nu_n}} \sum_{k=0}^{n} \dot{F}_r(t)^{\mu_1'(\nu_n-\nu_k)} \cdot B_{\nu_k}(F_r(t)) \cdot [P^*(t,y,\dot{y})]^{\nu_k},$$

gde su funkcije $\psi^*(t,y,\dot{y})$ i $P^*(t,y,\dot{y})$ definisane relacijama *(2.1)* i *(2.3)*, a μ_1' i μ_2' su respektivno stepeni polinoma $P(x,y,y')$ i $\psi(x,y,y')$ po promenljivoj y'. Poslednja se jednačina može zapisati i kao

$$(2.5) \qquad Q^*(t,y,\dot{y}) = \sum_{k=0}^{n} \bar{B}_{\nu_k}(t)[P^*(t,y,\dot{y})]^{\nu_k},$$

gde

$$Q^*(t,y,\dot{y}) = \begin{cases} \psi^*(t,y,y)\cdot \dot{F}_r(t)^{\mu_1'\nu_n-\mu_2'}, & \text{za } \mu_1'\nu_n \geq \mu_2' \\ \psi^*(t,y,\dot{y}), & \text{za } \mu_2' > \mu_1'\nu_n, \end{cases}$$

dok su polinomi $\bar{B}_{\nu_k}(t)$ definisani relacijama

$$\bar{B}_{\nu_k}(t) = \begin{cases} \dot{F}_r(t)^{\mu_1'(\nu_n-\nu_k)} \cdot B_{\nu_k}(F_r(t)), & \text{za } \mu_1'\nu_n \geq \mu_2' \\ \dot{F}_r(t)^{\mu_2'-\mu_1'\nu_k} \cdot B_{\nu_k}(F_r(t)), & \text{za } \mu_2' > \mu_1'\nu_n. \end{cases}$$

Prema tome, za stepene $\bar{b}_{\nu_k}$ polinoma $\bar{B}_{\nu_k}(t)$ imamo sledeće izraze

$$(2.6) \qquad \bar{b}_{\nu_k} = \begin{cases} (r-1)\mu_1'(\nu_n-\nu_k)+rb_{\nu_k}, & \text{za } \mu_1'\nu_n \geq \mu_2' \\ (r-1)(\mu_2'-\mu_1'\nu_k)+rb_{\nu_k}, & \text{za } \mu_2' > \mu_1'\nu_n. \end{cases}$$

Kada je ispunjeno *(1.3)*, funkcije P^* i Q^* postaju polinomi po t, za čije ćemo stepene uvesti oznake

$$(2.7) \qquad dgP^* = \delta(m,r), \quad dgQ^* = \sigma(m,r).$$

Očigledno je da su funkcije $\delta(m,r)$ i $\sigma(m,r)$ linearne.

POSLEDICA 2. Jednačina *(2.5)* može imati rešenja oblika *(1.3)*, samo ako postoje dva prirodna broja m i r takva, da medju brojevima definisanim sa

$$d_i = \bar{b}_{\nu_i} + \nu_i \delta(m,r), \quad (i = \overline{0,n}), \quad d_{n+1} = \sigma(m,r),$$

postoje bar dva koja su najveća i medjusobno jednaka.

Pretpostavićemo da brojevi m i r mogu biti vezani *samo* jednom od relacija

$$(2.7) \qquad \delta(m,r) = \frac{\bar{b}_{\nu_i} - \bar{b}_{\nu_j}}{\nu_j - \nu_i}, \quad (i = \overline{0,n-1};\ j > i)$$

ili što je obzirom na relacije *(2.6)* isto, jednom od relacija

$$(2.7a) \qquad \delta(m,r) = r\frac{b_{\nu_i} - b_{\nu_j}}{\nu_j - \nu_i} + (r-1)\mu_1'.$$

Pretpostavljajući da je broj m odredjen samo jednom od relacija *(2.7)*, u [5, str. 58] pokazano je da će polinom $y(t)=\phi_m(t)$ biti rešenje jednačine *(2.5)* ako i samo za neko $1\leqslant\nu\leqslant q=\nu_j-\nu_i$

$$(a) \qquad P^* = \omega_\nu S$$

$$(aa) \qquad Q^* = L,$$

gde su: ω_ν $(\nu=\overline{1,q})$ koreni jednačine $\omega^q=1$, $L(t)$ polinom definisan kao

$$L = \sum_{\substack{l=0\\ l\neq i,j}}^{n} \bar{B}_{\nu_l}\cdot(\omega_\nu S)^{\nu_l} - R\cdot(\omega_\nu S)^{\nu_i},$$

$S(t)$, $R(t)$ polinomi definisani relacijama

$$-\bar{B}_{\nu_i} = \bar{B}_{\nu_j} S^q + R, \quad S = \left[\sqrt[q]{-\bar{B}_{\nu_i}/\bar{B}_{\nu_j}}\right], \quad (q = \nu_j - \nu_i),$$

pri čemu $[\sqrt[q]{-A_{\nu_i}(t)/A_{\nu_j}(t)}]$ označava ceo racionalni deo razvoja $\sqrt[q]{-A_{\nu_i}(t)/A_{\nu_j}(t)}$ po celim opadajućim stepenima od t. Na osnovu izloženog, može se formulisati sledeći krajnji rezultat.

TEOREMA 2. Neka su za algebarsku diferencijalnu jednačinu prvog reda *(2.4)* moguća samo takva rešenja oblika *(1.3)*, za koja su brojevi m i r vezani samo jednom od relacija *(2.7a)*. Tada funkcije *(1.3)* definišu rešenje jednačine *(2.4)* ako i samo ako za neko $1\leq\nu\leq q$ važe relacije *(a)* i *(aa)*.

Za $\psi(x,y,y')=A(x)y'$ i $\varphi(x,y,y')=y$ iz teoreme 2 izlaze rezultati nadjeni u [3], a za $\psi(x,y,y')=A(x)y$ i $\varphi(x,y,y')=y'$ rezultati nadjeni u [4].

LITERATURA

[1] *J. G. Campbell, M. Golomb, On the polynomial solutions of a Riccati equation. Amer. Math. Monthly, 61(1954), 402-404.*

[2] А. З. Самуйлов, О полиномиальных решениях дифференциальных уравнений первого порядка. Весцi АН БССР, серыя фiз.-мат. Навук, 1972, №1, 121-124.

[3] П. Р. Лазов, Параметрические решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений. Билтен на ДМФ од СРМ, Кн. 25, 1974, 9-10.

[4] П. Р. Лазов, Об одном нелинейном дифференциальном уравнений. Мат. вес., 1(14) (29), 1977, 387-391.

[5] П. Р. Лазов, *Polinomna pešenja alg. difer. jednačina i njihova primena pri faktorizaciji pol. difer. operatora. Disertacija, ETF u Beogradu, 1977.*

ДВА ПРИМЕЧАНИЯ В СВЯЗИ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Р е з ю м е

Петар Р. Лазов

В первой части работы вначале найдены необходимые условия при которых общее алгебраическое дифференциальное уравнение первого порядка *(1.1)*, которое рассматривается в виде *(1.2)*, имеет решения вида *(1.3)*. На основании этого получены все возможные соотношения которые связывают числа m и r. При этом специально рассмотрено уравнение *(1.15)*.

Во второй части, предполагая что числа m и r связаны только одним из соотношений *(2.7a)*, получены необходимые и достаточные условия при которых алгебраическое дифференциальное уравнение *(2,4)* имеет решения вида *(1.3)*.