ЧЕТИРИТЕ ЗНАЧАЈНИ ТОЧКИ ВО ТРИАГОЛНИКОТ КАКО ТЕЖИШТА НА ПОГОДНО ИЗБРАНИ МАСИ

Живко Мадевски

Во оваа работа покажуваме дека:

— *центарот V на впишаната кружница во произволен триаголник може да се смета како тежиште на масите сместени во темињата на триаголникот, чиишто бројни вредности се* $m_A = \sin\alpha$, $m_B = \sin\beta$, $m_C = \sin\gamma$.

— *центарот O на опишаната кружница околу произволен остроаголен триаголник може да се смета како тежиште на масите сместени во темињата на триаголникот, чиишто бројни вредности се* $m_A = \sin 2\alpha$, $m_B = \sin 2\beta$, $m_C = \sin 2\gamma$;

— *пресекот H на висините во произволен остроаголен триаголник може да се смета како тежиште на масите сместени во темињата на триаголникот, чиишто бројни вредности се* $m_A = \operatorname{tg}\alpha$, $m_B = \operatorname{tg}\beta$, $m_C = \operatorname{tg}\gamma$.

Потоа, користејќи ги горните особини покажуваме како можат да се добијат некои познати или нови односи меѓу елементите на триаголникот, при што се користени методите на геометријата на масите.

Да напомeнеме дека втората и третата особина ќе важат и кога триаголникот е тапоаголен, но при тоа треба да се внимава, бидејќи замислената маса во врвот на тапиот агол ќе биде негативна.

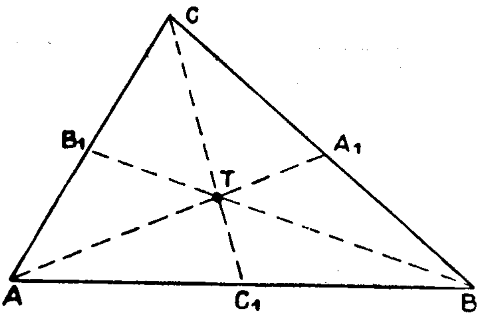
Ознаките што се употребени во работата се вобичаените: MN за должина на отсечката чиишто крајни точки се M и N, потоа A, B, C за темињата на триаголникот, α, β, γ за соодветните внатрешни агли, a, b, c за соодветните спротивни страни, h_a, h_b, h_c — висини, l_a, l_b, l_c — симетрали на внатрешните агли, t_a, t_b, t_c — тежишните линии, R и r — радиуси на опишаната и впишаната кружница, и т.н.

1. Од геометријата на масите се знае дека тежиштето G на масите m_A, m_B, m_C што се наоѓаат во точките A, B, C од една рамнина е точка од истата рамнина и лежи во внатрешноста на триаголникот ABC за која важи следната релација

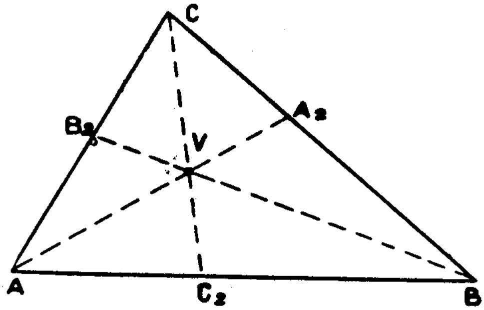
$$m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} + m_C \overrightarrow{GC} = \vec{O}.$$

Исто така се знае дека точката G ќе биде тежиште на масите m_A, m_B, m_C ако и само ако правите GA, GB, GC минуваат, соодветно, низ тежиштата на масите m_B и m_C, m_A и m_C, m_A и m_B.

1.1. Поради потполност на работата ќе покажеме дека G се поклопува со геометриското тежиште T на триаголникот ABC тогаш и само тогаш, кога $m_A = m_B = m_C$.



Сл. 1



Сл.2

Нека A_1, B_1, C_1 се средини на страните BC, CA, AB (сл. 1); тогаш, ако $T \equiv G$ ќе следува

$$m_A AC_1 = m_B BC_1, \; m_B BA_1 = m_C CA_1, \; m_C CB_1 = m_A AC_1;$$

но како $AC_1 = BC_1$, $BA_1 = CA_1$, $CB_1 = AB_1$, добиваме

$$m_A = m_B = m_C.$$

Да покажеме и обратно дека еднаквоста на масите повлекува $G \equiv T$. Се знае дека е

$$(m_A + m_B + m_C)\, \overrightarrow{TG} = m_A \overrightarrow{TA} + m_B \overrightarrow{TB} + m_C TC.$$

Нека $m_A = m_B = m_C$, тогаш

$$3\, \overrightarrow{TG} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC};$$

но како $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$, што лесно се покажува, следува дека е $\overrightarrow{TG} = \vec{0}$, односно $T \equiv G$.

1.2. Нека во триаголникот ABC се повлечени симетралите AA_2, BB_2, CC_2 на неговите внатрешни агли α, β, γ, каде A_2, B_2, C_2 се пресеци на овие симетрали со спротивните страни (сл. 2).

Се знае дека

$$AB.CA_2 = AC.BA_2,\ BA.CB_2 = BC.AB_2,\ CB.AC_2 = CA.BC_2;$$

исто така синусната теорема овозможува да напишеме

$$AB = 2R\sin\gamma,\ BC = 2R\sin\alpha,\ CA = 2R\sin\beta.$$

Ако тежиштето G на масите m_A, m_B, m_C се поклопува со пресекот V, на симетралите следува

$$m_A\, AC_2 = m_B\, BC_2,\ m_B\, BA_2 = m_C\, CA_2,\ m_C\, CB_2 = m_A\, AB_2,$$

од каде се добива да можеме да сметаме дека бројните вредности на масите се

$$m_A = \sin\alpha,\ m_B = \sin\beta,\ m_C = \sin\gamma.$$

Според тоа, следната релација е евидентна

$$\sin\alpha\ \overrightarrow{VA} + \sin\beta\ \overrightarrow{VB} + \sin\gamma\ \overrightarrow{VC} = \vec{0}.$$

1.3. Нека во остроаголниот триаголник ABC се повлечени правите AA_3, BB_3, CC_3 што минуваат низ темињата на триаголникот и низ центарот O на опишаната кружница (точката O е внатрешна), каде A_3, B_3, C_3 се пресеци на овие прави со соодветните спротивни страни на триаголникот (сл. 3).

Бидејќи триаголниците AOB, BOC и COA се рамнокраки, а $\sphericalangle AOB = 2\gamma$, $\sphericalangle BOC = 2\alpha$ и $\sphericalangle COB = 2\beta$, следува дека $\sphericalangle BAA_3 = \pi/2 - \gamma$, $\sphericalangle CBB_3 = \pi/2 - \alpha$, $\sphericalangle ACC_3 = \pi/2 - \beta$. Тогаш според синусната теорема, од триаголниците ACC_3 и BCC_3, следува

$$AC_3 = CC_3\frac{\cos\beta}{\sin\alpha},\quad BC_3 = CC_3\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}.$$

На ист начин, од соодветните триаголници, следува

$$BA_3 = AA_3\frac{\cos\gamma}{\sin\beta},\quad CA_3 = AA_3\frac{\cos\beta}{\sin\gamma},$$

$$CB_3 = BB_3\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma},\quad AB_3 = BB_3\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}.$$

Ако тежиштето G на масите m_A, m_B, m_C се поклопува со O, следува дека

$$m_A\, AC_3 = m_B\, BC_3,\ m_B\, BA_3 = m_C\, CA_3,\ m_C\, CB_3 = m_A\, AB_3.$$

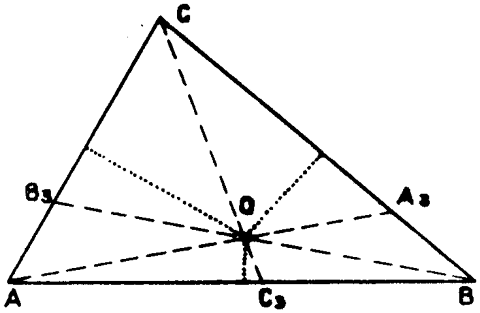
Од горните релации лесно се уверуваме дека како маси m_A, m_B, m_C можат да се земат следните бројни вредности

$$m_A = \sin 2\alpha, \quad m_B = \sin 2\beta, \quad m_C = \sin 2\gamma.$$

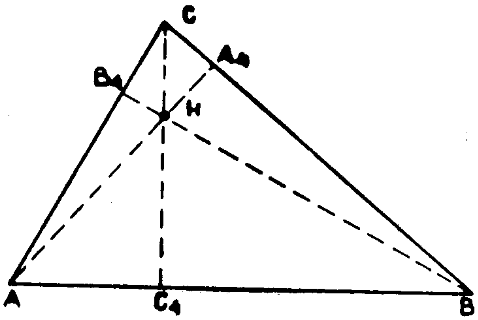
Според тоа, можеме да напишеме

$$\sin 2\alpha\ \overrightarrow{OA} + \sin 2\beta\ \overrightarrow{OB} + \sin 2\gamma\ \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

1.4. Нека во остроаголниот триаголник ABC се повлечени висините AA_4, BB_4, CC_4, каде A_4, B_4, C_4 се пресеците на овие висини со соодветните спро-



Сл. 3



Сл. 4

тивни страни на триаголникот (сл. 4). Пресекот H на висините е тогаш внатрешна точка. Од сликата се гледа, ако при тоа се искористи и синусната теорема, дека можеме да напишеме

$$AC_4 = 2R \sin\beta \cos\alpha, \qquad BC_4 = 2R \sin\alpha \cos\beta,$$

$$BA_4 = 2R \sin\gamma \cos\beta, \qquad CA_4 = 2R \sin\beta \cos\gamma,$$

$$CB_4 = 2R \sin\alpha \cos\gamma, \qquad AB_4 = 2R \sin\gamma \cos\alpha.$$

Ако тежиштето G на масите m_A, m_B, m_C се поклопува со пресекот на висините H, следува

$$m_A\, AC_4 = m_B\, BC_4, \quad m_B\, BA_4 = m_C\, CA_4, \quad m_C\, CB_4 = m_A\, AB_4.$$

Од горните релации лесно се уверуваме дека како маси m_A, m_B, m_C можат да се земат следните бројни вредности

$$m_A = \operatorname{tg}\alpha, \quad m_B = \operatorname{tg}\beta, \quad m_C = \operatorname{tg}\gamma.$$

Тогаш, можеме да ја напишеме следната релација

$$\mathrm{tg}\,\alpha\,\overrightarrow{HA}+\mathrm{tg}\,\beta\,\overrightarrow{HB}+\mathrm{tg}\,\gamma\,\overrightarrow{HC}=\vec{O}.$$

2. Во овој дел ќе изведеме повеќе односи меѓу елементите од еден триаголник; некои меѓу нив досега не сме ги сретнале. При тоа ќе ги користиме следните релации коишто важат за една система од три материјални точки.

$$(m_A+m_B+m_C)\,\overrightarrow{PG}=m_A\,\overrightarrow{PA}+m_B\,\overrightarrow{PB}+m_C\,\overrightarrow{PC},$$

$$(m_A+m_B+m_C)\,\overrightarrow{AG}=m_B\,\overrightarrow{AB}+m_C\,\overrightarrow{AC},$$

$$(m_B+m_C)\,\overrightarrow{AG_A}=m_A\,\overrightarrow{AB}+m_C\,\overrightarrow{AC},$$

$$(m_B+m_C)\,\overrightarrow{GG_A}=m_B\,\overrightarrow{GB}+m_C\,\overrightarrow{GC},$$

$$(m_B+m_C)\,\overrightarrow{AG_A}=(m_A+m_B+m_C)\,\overrightarrow{AG},$$

$$m_A\,\overrightarrow{GA}+(m_B+m_C)\,\overrightarrow{GG_A}=\vec{0},$$

каде G_A е тежиштето на масите m_B и m_C.

2.1. Нека ABC е произволен триаголник.

2.1.1. Тргнувајќи од релацијата.

$$(\sin\beta+\sin\gamma)\,\overrightarrow{AA_2}=\sin\beta\,\overrightarrow{AB}+\sin\gamma\,\overrightarrow{AC},$$

после множење со $2R$, се добива

$$(b+c)\,\overrightarrow{AA_2}=b\,\overrightarrow{AB}+c\,\overrightarrow{AC},$$

од каде

$$AA_2=l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2},$$

односно

$$AA_2=l_a=2R\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Аналогно се добиваат l_b и l_c.

2.1.2. Кога релацијата

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\,\overrightarrow{AV}=\sin\beta\,\overrightarrow{AB}+\sin\gamma\,\overrightarrow{AC}$$

ќе се помножи скаларно со $2R\,\overrightarrow{AB}$ или $2R\,\overrightarrow{AC}$, се добива

$$AV = \frac{2bc}{a+b+c}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогно се добиваат и

$$BV = \frac{2\,ca}{a+b+c}\cos\frac{\beta}{2},$$

$$CV = \frac{2\,ab}{a+b+c}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

2.1.3. Од претходните релации произлегува дека

$$\frac{AV}{AA_2} + \frac{BV}{BB_2} + \frac{CV}{CC_2} = 2.$$

2.1.4. Како е $AV = AA_2 - VA_2$, $BV = BB_2 - VB_2$, $CV = CC_2 - VC_2$ од горната равенка следува

$$\frac{VA_2}{AA_2} + \frac{VB_2}{BB_2} + \frac{VC_2}{CC_2} = 1.$$

2.1.5. Од равенката

$$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)\,\overrightarrow{AV} = (\sin\beta + \sin\gamma)\,\overrightarrow{AA_2}$$

веднаш се добива

$$AV = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right) l_a,$$

при што се искористени идентитетите

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Аналогно се добиваат

$$BV=\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)l_b,$$

$$CV=\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)l_c.$$

2.1.6. Ако се тргне од

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\,\overrightarrow{AV}=\sin\beta\,\overrightarrow{AB}+\sin\gamma\,\overrightarrow{AC}$$

и се помножи скаларно со $\overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{AC}$, после нужни трансформации, при што се зема дека

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

се добива

$$AV=4R\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\,.$$

Аналогно се добиваат и

$$BV=4R\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2},\quad CV=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\,.$$

2.1.7. Од претходното, кога се земе $AV\sin\frac{\alpha}{2}=r$, се доаѓа до познатата релација

$$\frac{r}{R}=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

односно

$$\frac{r}{R}=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1.$$

2.1.8. Земајќи $AV\sin\frac{\alpha}{2}=r$, од $\sin\alpha\,\overrightarrow{AV}=(\sin\beta+\sin\gamma)\,\overrightarrow{VA_2}$ се добива

$$VA_2=\frac{r}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}\,;$$

аналогно и

$$VB_2 = \frac{r}{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}, \qquad VC_2 = \frac{r}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

2.1.9. Земајќи ги AA_2, BB_2, CC_2 од 2.1.1. и VA_2, VB_2, VC_2 од 2.1.8., од 2.1.4. се добива

$$\frac{1}{\sin\alpha\ \sin\beta} + \frac{1}{\sin\beta\ \sin\gamma} + \frac{1}{\sin\gamma\ \sin\alpha} = \frac{2R}{r}.$$

2.1.10. Од $\sin\alpha\ \overrightarrow{AV} = (\sin\beta + \sin\gamma)\ \overrightarrow{VA_2}$ веднаш следува односот

$$\frac{VA_2}{AV} = \frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}},$$

од каде $$\frac{VA_2}{AA_2} = \frac{VA_2}{AV + VA_2} = \frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2} + \cos\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Аналогна трансформација може да се направи и со $\frac{VB_2}{BB_2}$, $\frac{VC_2}{CC_2}$, па од 2.1.4. следува

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = 2.$$

2.1.11. Нека ја квадрираме релацијата

$$\sin\alpha\ \overrightarrow{VA} + \sin\beta\ \overrightarrow{VB} + \sin\gamma\ \overrightarrow{VC} = \vec{0}.$$

Ако се земе во обзир дека $AV\sin\frac{\alpha}{2} = BV\sin\frac{\beta}{2} = CV\sin\frac{\gamma}{2} = r$, се добива

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} = 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \right.$$

$$\left. + \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right).$$

2.2. Нека триаголникот ABC е остроаголен.

2.2.1. Со квадрирање на релацијата

$$(\sin 2\beta + \sin 2\gamma)\,\overrightarrow{AA_3} = \sin 2\beta\,\overrightarrow{AB} + \sin 2\gamma\,\overrightarrow{AC}$$

и после нужни трансформации, се добива

$$AA_3 = \frac{2R}{1 + \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma};$$

аналогно се добиваат и

$$BB_3 = \frac{2R}{1 + \operatorname{ctg}\gamma \operatorname{ctg}\alpha}, \quad CC_3 = \frac{2R}{1 + \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta}.$$

2.2.2 Од претходното непосредно следува

$$\frac{1}{AA_3} + \frac{1}{BB_3} + \frac{1}{CC_3} = \frac{2}{R},$$

при што е искористен идентитетот

$$\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

2.2.3. Бидејќи е $AO = BO = CO = R$, следува

$$\frac{AO}{AA_3} + \frac{BO}{BB_3} + \frac{CO}{CC_3} = 2.$$

2.2.4. Како е $OA_4 = AA_3 - R$, веднаш следува

$$OA_3 = R\,\frac{1 - \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma}{1 + \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma} = R\,\frac{\cos\alpha}{\cos(\beta - \gamma)};$$

на ист начин се добиваат OB_3 и OC_3.

2.2.5. Од 2.2.1. и 2.2.4. ја добиваме следната релација

$$\frac{OA_3}{AA_3} + \frac{OB_3}{BB_3} + \frac{OC_3}{CC_3} = 1.$$

2.2.6. Ако се земе во обзир **1.4.**, тогаш можеме да напишеме

$$(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)\,\overrightarrow{OA_4} = \operatorname{tg}\beta\, OB + \operatorname{tg}\gamma\,\overrightarrow{OC};$$

после квадрирање и сметајќи на $\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, по нужни трансформации, излегува

$$OA_4 = R\sqrt{1 - \sin 2\beta \sin 2\gamma};$$

аналогно се добиваат и

$$OB_4 = R\sqrt{1 - \sin 2\gamma \sin 2\alpha}, \quad OC_4 = R\sqrt{1 - \sin 2\alpha \sin 2\beta}.$$

2.2.7. Ако се квадрира релацијата

$$\sin 2\alpha\,\overrightarrow{OA} + \sin 2\beta\,\overrightarrow{OB} + \sin 2\gamma\,\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0},$$

после нужни трансформации, при што се зема и идентитетот

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

се добива

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \cos\beta \cos\gamma \sin\alpha + \cos\gamma \cos\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma.$$

2.3. Нека триаголникот ABC е остроаголен.

2.3.1. Нека ја земеме релацијата

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)\,\overrightarrow{AH} = \operatorname{tg}\beta\,\overrightarrow{AB} + \operatorname{tg}\gamma\,\overrightarrow{AC}.$$

После квадрирање и нужни трансформации, при што е сметано со идентитетите

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma,$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$$

и синусната теорема, се добива

$$AH = 2R\cos\alpha;$$

аналогно се добиваат и $BH = 2R\cos\beta$, $CH = 2R\cos\gamma$.

2.3.2. Тргнувајќи од

$$\operatorname{tg}\alpha\,\overrightarrow{AH} = (\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)\,\overrightarrow{HA_4}$$

и претходната релација, се добива

$$HA_4 = 2R\cos\beta\cos\gamma;$$

аналогно се добиваат и

$$HB_4 = 2R \cos\gamma \cos\alpha;$$

$$HC_4 = 2R \cos\alpha \cos\beta.$$

2.3.3. Користејќи го идентитетот

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\alpha\, \mathrm{tg}\beta\, \mathrm{tg}\gamma,$$

од релацијата

$$(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma)\, \overrightarrow{AH} = (\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma)\, \overrightarrow{AA_4}$$

добиваме

$$AH = (1 - \mathrm{ctg}\beta\ \mathrm{ctg}\gamma)\, AA_4;$$

аналогно се добиваат и

$$BH = (1 - \mathrm{ctg}\gamma\ \mathrm{ctg}\alpha)\ BB_4,$$

$$CH = (1 - \mathrm{ctg}\alpha\ \mathrm{ctg}\beta)\ CC_4.$$

Ако се повикаме на идентитетот

$$\mathrm{ctg}\alpha\ \mathrm{ctg}\beta + \mathrm{ctg}\beta\ \mathrm{ctg}\gamma + \mathrm{ctg}\gamma\ \mathrm{ctg}\alpha = 1$$

се добива следната релација

$$\frac{AH}{AA_4} + \frac{BH}{BB_4} + \frac{CH}{CC_4} = 2.$$

2.3.4. Како е $AH = AA_4 - HA_4$, $BH = BB_4 - HB_4$, $CH = CC_4 - HC_4$, од последната релација произлегува

$$\frac{HA_4}{AA_4} + \frac{HB_4}{BB_4} + \frac{HC_4}{CC_4} = 1.$$

2.3.5. Од погоре наведената релација $AH = 2R \cos\alpha$ и $h_a = AA_4 = 2R \sin\beta\ \sin\gamma$ се добива односот

$$\frac{AH}{AA_4} = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta\ \sin\gamma}.$$

Ако на ист начин се определат и односите $\frac{BH}{BB_4}$, $\frac{CH}{CC_4}$, тогаш од 2.3.3. следува

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta \sin\gamma} + \frac{\cos\beta}{\sin\gamma \sin\alpha} + \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha \sin\beta} = 2.$$

2.3.6. Со квадрирање на

$$\operatorname{tg}\alpha\ \overrightarrow{HA}+\operatorname{tg}\beta\ \overrightarrow{HB}+\operatorname{tg}\gamma\ \overrightarrow{HC}=\vec{0},$$

а водејќи сметка за 2.3.1., се добива следниот идентитет

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2\,(\sin\alpha\ \sin\beta\ \cos\gamma+$$
$$+\sin\beta\ \sin\gamma\ \cos\alpha+\sin\gamma\ \sin\alpha\ \cos\beta).$$

2.3.7. Ако ја квадрираме релацијата

$$2\ \overrightarrow{HA_1}=\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC},$$

после нужни трансформации при што се искористени 2.3.1. и идентитетот

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma=1,$$

се добива

$$HA_1=R\sqrt{\sin^2\alpha-4\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma};$$

аналогно и

$$HB_1=R\sqrt{\sin^2\beta-\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma},$$

$$HC_1=R\sqrt{\sin^2\gamma-4\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma}.$$

2.4. Со наредните релации се дадени растојанијата меѓу некои од четирите точки во триаголникот H, O, T и V.

2.4.1. Нека триаголникот ABC е произволен; тогаш според **1.2.** е точна следната релација

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\ \overrightarrow{OV}=\sin\alpha\ \overrightarrow{OA}+\sin\beta\ \overrightarrow{OB}+\sin\gamma\ \overrightarrow{OC}.$$

После квадрирање и нужни трансформации, при што се искористени формулите за удвоени агли како и идентитетот

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\ \cos\frac{\beta}{2}\ \cos\frac{\gamma}{2},$$

Се добива

$$OV=R\sqrt{1-8\ \sin\frac{\alpha}{2}\ \sin\frac{\beta}{2}\ \sin\frac{\gamma}{2}}.$$

2.4.2. Нека ABC е приозволен триаголник; следната релација е евидентна

$$3\ \overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

Послед квадрирање и нужни трансформации, при што се искористени формулите за удвоени агли, како и идентитетот

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma = 1,$$

се добива

$$OT = \frac{1}{3} R \sqrt{1 - 8\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma}\,.$$

2.4.3. Нека ABC е остроаголен триаголник; според **1.4.** може да се напише следната релација

$$(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma)\,\overrightarrow{OH} = \mathrm{tg}\,\alpha\,\overrightarrow{OA} + \mathrm{tg}\,\beta\,\overrightarrow{OB} + \mathrm{tg}\,\gamma\,\overrightarrow{OC}.$$

После квадрирање и нужни трансформации, при што се земени формулите за удвоените агли, релацијата 2.3.5. и идентитетот

$$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma = \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma,$$

се добива

$$OH = R\sqrt{1 - 8\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma}.$$

2.4.4. Нека ABC е остроаголен триаголник; можеме да ја напишеме следната релација

$$3\,\overrightarrow{HT} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}.$$

После квадрирање и нужни трансформации, при што се искористени формулите $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$ и идентитетот

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma = 1,$$

се добива

$$HT = \frac{2}{3} R \sqrt{1 - 8\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma}.$$

2.4.5. Од горните релации се глеаа дека за остроаголниот триаголник ќе важи

а) $HT = 2\,OT,\; OH = 3\,OT,$

б) $OH = OT + TH$

од каде може да се заклучи дека O, H и T се колинеарни точки, .

2.5. Користејќи ги наведените релации можат да се добијат уште некои односи меѓу елементите на еден триаголник.

2.5.1. Нека триаголникот ABC е остроаголен; од идентитетот

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta\ \operatorname{tg}\gamma$$

после множење и делење на левата страна со $2R$, а десната со $8R^3$ и ако се земе $\operatorname{tg}\varphi = \sin\varphi/\cos\varphi$, $AB = 2R\sin\gamma$, $BC = 2R\sin\alpha$, $CA = 2R\sin\beta$ и 2.3.1., се добива

$$\frac{AB}{CH} + \frac{BC}{AH} + \frac{CA}{BH} = \frac{AB.BC.CA}{AH.BH.CH}.$$

2.5.2. Нека ABC е остроаголен триаголник; ако идентитетот

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$

се помножи и подели на левата страна со $2R$, а на десната со $8R^3$ и ако се земе $\operatorname{tg}\varphi = \sin\varphi/\cos\varphi$, $AB = 2R\sin\gamma$, $BC = 2R\sin\alpha$, $CA = 2R\sin\beta$, потоа $OA_1 = R\cos\alpha$, $OB_1 = R\cos\beta$, $OC_1 = R\cos\gamma$, се добива

$$\frac{AB}{OC_1} + \frac{BC}{OA_1} + \frac{CA}{OB_1} = \frac{AB.BC.CA}{4\,OA_1.OB_1.OC_1}.$$

2.5.3. Нека триаголникот ABC е остроаголен. Тргнувајќи од идентитетот

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{r}{R}$$

земајќи во обзир дека $OA_1 = R\cos\alpha$, $OB_1 = R\cos\beta$, $OC_1 = R\cos\gamma$, како и 2.3.1. се добиваат релатиите

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 = r + R,$$

$$AH + BH + CH = 2(r + R).$$

2.5.4. Нека ABC е остроаголен триаголник; од идентитетот

$$\operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta\ \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma\ \operatorname{ctg}\alpha = 1,$$

после множење и делење на неговата лева страна со $4R^2$ и ако се смета на 2.3.1., $\operatorname{ctg}\varphi = \cos\varphi/\sin\varphi$ и $AB = 2R\sin\gamma$, $BC = 2R\sin\alpha$, $CA = 2R\sin\beta$, се добива следната релација

$$\frac{AH.BH}{AC.BC} + \frac{BH.CH}{BA.CA} + \frac{CH.AH}{CB.AB} = 1.$$

2.5.5. Нека ABC е остроаголен триаголник; користејќи ги 2.3.1., 2.3.2. и $OA_1 = R\cos\alpha$, $OB_1 = R\cos\beta$, $OC_1 = R\cos\gamma$, се добиваат следните односи

$$AH = 2\,OA_1,\ BH = 2\,OB_1,\ CH = 2\ OC_1,$$

$$HB.HC = 2R.HA_4,\ HC.HA = 2R.HB_4,\ HA.HB = 2R.HC_4.$$

2.5.6. Нека ABC е остроаголен триаголник; бидејќи A_3 можеме да ја сметаме како тежиште на масите $m_B = \sin 2\beta$ и $m_C = \sin 2\gamma$, тогаш е

$$BA_3.\sin 2\beta = CA_3.\sin 2\gamma.$$

Множејќи го ова ревенство со R и водејќи сметка дека $AC=2R\sin\beta$, $AB=2R\sin\gamma$ односно дека $BA_4 = AC.\cos\beta$, $CA_4 = AB.\cos\gamma$, се добива

$$BA_3.BA_4 = CA_3.CA_4;$$

аналогно се добиваат

$$AB_3.AB_4 = CB_3.CB_4,\ AC_3.AC_4 = BC_3.BC_4.$$

2.5.7. Нека ABC е остроаголен триаголник и нека $\alpha<\beta<\gamma$. Лесно се забележува дека $\sphericalangle\ CAA_3 = \sphericalangle BAA_3 = \pi/2 - \gamma$, односно дека отсечката AA_2 е симетрала и на аголот со теме во A во правоаголниот триаголник AA_3A_4, од каде, според **1.3.**, следува

$$(1 + \cos\ (\gamma - \beta))\ \overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{AA_4} + \cos(\gamma - \beta)\ \overrightarrow{AA_3}$$

бидејќи е $\sphericalangle\ AA_4A_3 = \pi/2$, $\sphericalangle AA_3A_4 = \pi/2 - (\gamma-\beta)$. Со квадрирање на горната релација се добива

$$l^2{}_a = \frac{2h^2{}_a s_a}{h_a + s_a},$$

каде $s_a = AA_3$ и од правоаголниот триаголник AA_3A_4 е земено $\cos(\gamma-\beta) = h_a/s_a$. Аналогно се добиваат

$$l^2{}_b = \frac{2h^2{}_b s_b}{h_b + s_b}, \qquad l^2{}_c = \frac{2h^2{}_c s_c}{h_c + s_c}.$$

3. Користејќи ги искажувањата во **1.** лесно се покажуваат следните тврдења:

3.1. Ако се тргне од

$$\sin\alpha\ \overrightarrow{VA} + \sin\beta\ \overrightarrow{VB} + \sin\gamma\ \overrightarrow{VC} = \overrightarrow{O}$$

и се земе $AV = r/\sin\frac{\alpha}{2}$, $BV = r/\sin\frac{\beta}{2}$, $CV = r/\sin\frac{\gamma}{2}$, веднаш следува дека — со отсечки чиишто мерни броеви се $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\beta}{2}$, $\cos\frac{\gamma}{2}$ може да се конструира триаголник; при тоа α, β, γ се агли во произволен триаголник.

3.2. Ако се смета на $OA = OB = OC = R$, од релацијата

$$\sin 2\alpha\ \overrightarrow{OA} + \sin 2\beta\ \overrightarrow{OB} + \sin 2\gamma\ \overrightarrow{OC} = \vec{O}$$

се добива дека
—со отсечки чиишто мерни броеви се: 1° $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$, 2° $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$ може да се конструира триаголник; при тоа a, b, c се страни а α, β, γ се соодветни агли во еден остроаголен триаголник.

3.3. Од релацијата

$$\operatorname{tg}\alpha\ \overrightarrow{HA} + \operatorname{tg}\beta\ \overrightarrow{HB} + \operatorname{tg}\gamma\ \overrightarrow{HC} = \vec{O},$$

заедно со $HA = 2R\cos\alpha$, $HB = 2R\cos\beta$, $HC = 2R\cos\gamma$ следува дека
— со отсечки чиишто мерни броеви се $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ може да се конструира триаголник; при тоа α, β, γ се агли во еден остроаголен триаголник.

Živko Madevski

INCENTRE, CIRCUMCENTRE ET ORTHOCENTRE D'UN TRIANGLE COMME LES CENTRES DE GRAVITE DES MASSES BIEN CHOISIES

(R é s u m é)

Dans ce travail on montre que

— le centre V du cercle inscrit dans un triangle peut être pris pour le centre de gravité des masses $m_A = \sin\alpha$, $m_B = \sin\beta$, $m_C = \sin\gamma$, situées aux sommets A, B, C de ce triangle, dont les angles α, γ, β sont arbitraire;

— le centre O du cercle circonscrit dans un triangle peut être pris pour le centre de gravité des masses $m_A = \sin 2\alpha$, $m_B = \sin 2\beta$, $m_C = 2\gamma$, situées aux sommets A, B, C de ce triangle, dont les angles α, β, γ sont aigus;

— l'orthocentre H d'un triangle peut être pris pour le centre de gravité des masses $m_A = \operatorname{tg}\alpha$, $m_B = \operatorname{tg}\beta$, $m_C = \operatorname{tg}\gamma$, situées aux sommets A, B, C de ce triangle, dont les angles, α, β, γ sont aigus.

De même, on en tire un certain nombre de relations entre les éléments d'un triangle.