ЕДЕН РАМНИНСКИ СЛУЧАЈ НА ПРОБЛЕМОТ НА 3 ТЕЛА

Живко Мадевски

Познато е дека во рамнинскиот случај на проблемот на три тела кога овие се движат по фиксни прави коишто минуваат низ тежиштето на системата, триаголникот на конфигурацијата е во секој момент рамностран.

Ќе ја покажеме спомнатата особина користејќи го поимот на центарот на атракцијата — точка во која се сечат правците на силите коишто дејствуваат на телата. Исто така ќе ги наведеме и равенките на движењата на телата во овој случај.

1. Нека претпоставиме дека телата, чии маси ќе ги означуваме со m_1, m_2, m_3 се движат по фиксни прави што минуваат низ тежиштето S на системата.

Во тој случај, бидејќи точката S можеме да ја сметаме како неподвижна, триаголникот на конфигурацијата останува сличен на почетната положба и равенките на движењето на m_i ќе бидат

$$\vec{r_i} = \lambda\, \vec{r_{i0}}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

каде $\vec{r_i}$ е векторот на положбата на m_i во однос на S, $\vec{r_{i0}}$ — векторот на почетната положба на m_i во однос на S и $\lambda \geq 0$ засега непознатиот закон на движењето.

Ако ги диференцираме два пати по времето t равенките (1), добиваме дека силите $\vec{P_i}$ коишто дејствуваат на m_i можат да се напишат

$$\vec{P_i} = m_i\, \ddot{\lambda}\, \vec{r_{i0}}. \tag{2}$$

Во работата [2] е покажано дека

$$\vec{P_i} = -\, k m_i^*\, \vec{g_i}, \tag{3}$$

при што $\vec{g_i}$ е векторот на положба на m_i во однос на центарот на атракцијата Γ, k е променлив скалар и $m_i^* = m_i \sin^3 \varphi_i$, а φ_i е соодветниот внатрешен агол на триаголникот на конфигурацијата.

Од (2) и (3) следува дека во овој случај векторот $\vec{r}_i$ е колинеарен со соодветниот вектор $\vec{g}_i$, што повлекува центарот на атракцијата да совпадне со тежиштето на системата, т. е. $S=\Gamma$.

Според теоремата на Миланковиќ ([1] и [3]) поклопувањето на центарот на атракцијата Γ со тежиштето S е можно тогаш и само тогаш кога триаголникот на конфигурацијата е рамностран.

2. Да го разгледаме овој случај на проблемот на три тела, со тоа што ќе земеме во почетниот момент триаголникот на конфигурацијата да е рамностран со страна s_0, почетните положби на m_i да се определени во однос на S со $\vec{r}_{i0}$ и нивните почетни брзини да се $\vec{v}_{i0} = \mu\, \vec{r}_{i0}$.

Од (1) се гледа дека брзините $\vec{v}_i$ на m_i се определени со

$$\vec{v}_i = \dot{\lambda}\, \vec{r}_{i0},$$

од каде следува дека $\dot{\lambda}_0 = \mu$. Исто така од (1) може да се види дека $\lambda_0=1$.

Лесно се покажува дека (во овој случај) диференцијалните равенки на движењето на m_i ќе бидат

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = -\frac{M}{s^3}\vec{r}_i, \tag{4}$$

каде со s е означена страната на триаголникот и $M=m_1+m_2+m_3$.

Ако се земе во обзир дека $\vec{s}_{ik}=\vec{r}_k-\vec{r}_i=\lambda\,(\vec{r}_{k0}-\vec{r}_{i0})=\lambda\,\vec{s}_{ik0}$, се гледа дека $s=\lambda\, s_0$. Тогаш од (4) се добива следната диференцијална равенка

$$\ddot{\lambda} = -\frac{\alpha^2}{2\,\lambda^2},$$

каде $\alpha^2=2M/s_0^3$. Оваа равенка има еден прв интеграл

$$\dot{\lambda}^2 = \frac{\alpha^2}{\lambda} + \beta, \tag{5}$$

при што β може да се определи од почетните услови: $\beta=\dot{\lambda}_0^2-\alpha^2/\lambda_0$, односно $\beta = \mu^2-\alpha^2$.

Од овој интеграл може да се направи дискусија за природата на движењата на m_i. Движењето ќе постои и ќе биде регуларно кога

$$\frac{\alpha^2}{\lambda} + \mu^2 - \alpha^2 \geq 0; \tag{6}$$

знакот равно се достигнува во еден момент при погодни почетни услови, како што ќе се види подолу, кога телата застануваат и ја менуваат насоката на движењето.

Нека ја дискутираме релацијата (6):

1°. Нека $\mu^2 < \alpha^2$, следува дека

$$0 < \lambda \leqslant \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \mu^2}$$

и при тоа:

— кога $\mu = 0$, телата тргнуваат од своите почетни положби кон S, што повлекува $\dot{\lambda} < 0$, и (5) ќе ни го даде следниов закон на движењето

$$arc \sin \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda - \lambda^2} = \frac{\pi}{2} - \alpha\, t, \quad \alpha > 0;$$

се забележува дека движењето е регуларно во интервалот $0 < t < \pi/2\alpha$, односно се до моментот $t_1 = \pi/2\alpha$ кога настанува троен судар во S.

— кога $0 < \mu < \alpha$, $\alpha > 0$, телата се оддалечуваат од S, се до моментот t_2 кога ќе заземат положби

$$\vec{r}_i = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \mu^2}\, \vec{r}_{i0},$$

и ќе застанат; потоа се враќаат кон S, кога во моментот t_3 станува троен судар во S. Равенката на движењето ќе ја добиеме од (5) земајќи $\dot{\lambda} > 0$ за $0 < t < t_2$ и $\dot{\lambda} < 0$ за $t_2 < t < t_3$,

$$\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\, arc \sin \frac{\gamma}{\alpha} \sqrt{\lambda} - \frac{1}{\gamma^2} \sqrt{\alpha^2 \lambda - \gamma^2 \lambda^2} = \pm\, t + \sigma_1,$$

каде: $\gamma^2 = \alpha^2 - \mu^2$, $\sigma_1 = \frac{\alpha^2}{\gamma^3}\, arc \sin \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{1}{\gamma^2} \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2};$

исто така лесно се добиваат и

$$t_2 = \frac{\alpha^2}{\gamma^3} \left(\frac{\pi}{2} - arc \sin \frac{\gamma}{\alpha} \right) + \frac{1}{\gamma^2} \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2},$$

$$t_3 = \frac{\alpha^2}{\gamma^3}\left(\pi - arc \sin \frac{\gamma}{\alpha}\right) + \frac{1}{\gamma^2}\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}.$$

— кога $-\alpha < \mu < 0$, $\alpha > 0$, телата тргнуваат од своите почетни положби кон S и во моментот t_4 ќе настане троен судар во S. Равенката на движењето ќе биде иста како во претходниот случај само ако на десната страна сеземе негативниот знак; тогаш

$$t_4 = \frac{\alpha^2}{\gamma^3} arc \sin \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{1}{\gamma^2}\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}.$$

2°. Нека $\mu^2 = \alpha^2$; од (6) гледаме дека движењето постои и неговата равенка ќе ја добиеме од (5)

$$\lambda = \left(1 + \frac{3}{2}\mu t\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Лесно се гледа дека

— кога $\mu = \alpha$, $\alpha > 0$, телата се оддалечуваат од S и нивното движење е регуларно во секој момент;

— кога $\mu = -\alpha$, $\alpha > 0$, телата се движат кон S и нивното движење е регуларно во интервалот $0 \leqslant t < 2/3\alpha$, а во моментот $t = 2/3\alpha$ настанува троен судар во S.

3°. Нека $\mu^2 > \alpha^2$; од (6) следува дека движењето постои и λ може да добие произволни реални позитивни вредности; равенката на движењето ќе биде

$$\frac{1}{\delta^2}\sqrt{\alpha^2 \lambda + \delta^2 \lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\delta^3}\ln\left(\delta\sqrt{\lambda} + \sqrt{\alpha^2 + \delta^2 \lambda}\right) = \pm t + \sigma_2$$

каде $\delta^2 = \mu^2 - \alpha^2$ и $\sigma_2 = \frac{1}{\delta^2}\sqrt{\alpha^2 + \delta^2} - \frac{\alpha^2}{\delta^3}\ln\left(\delta + \sqrt{\alpha^2 + \delta^2}\right)$.

Можеме да додадеме дека

— кога $\mu > \alpha$, $\alpha > 0$, телата се оддалечуваат од S и нивното движење е регуларно во секој момент; во горната равенка на движењето ќе се одбере позитивниот знак.

— кога $\mu < -\alpha$, $\alpha > 0$, телата се движат кон S и нивното движење е регуларно во интервалот од $t_0 = 0$ до $t = t_5$, а во моментот t_5 настанува троен судар во S; во горната равенка на движењето ќе се одбере негативниот знак и ќе се определи t_5 ставајќи $\lambda = 0$:

$$t_5 = \frac{1}{\delta^2}\sqrt{\alpha^2 + \delta^2} + \frac{\alpha^2}{\delta^3}\ln\frac{\alpha}{\delta + \sqrt{\alpha^2 + \delta^2}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Миланковић, М.: О општим интегралима проблема *n* тела, Глас САН, LXXXIII, 1911 год.

[2] Мадевски, Ж.: За центарот на атракцијата во проблемот на три тела, Билтен на Друшт. на мат. и физ. на НРМ, кн. XIII, 1962.

[3] Мадевски, Ж.: За една теорема на Миланковић, Билтен на Друшт. на мат. и физ. од СРМ, кн. XVIII, 1967.

Madevski Ž.

SUR UN CAS PLAN DE PROBLEME DES TROIS CORPS

(Résumé)

Le triangle de configuration dans le Problème des trois corps reste équilatéral, si les trajectoires de ceux-ci soient portées par les droites fixes, menées par le centre de gravité. Le théorème de Milanković ([1], [3]) permet de montrer ceci immédiatement.

On donne, aussi, les équations du mouvement des particules dans tous les cas possible.