УНИВЕРЗИТЕТ „Св. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“ - СКОПЈЕ

Борко Илиевски

МАТЕМАТИКА 1

УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ИНСТИТУТ ЗА МАТЕМАТИКА

Проф. д-р Борко Илиевски

МАТЕМАТИКА I

Скопје, 2011

Рецензенти:

Проф. д-р Никита Шекутковски
Проф. д-р Боро Пиперевски

Тираж: 500 примероци

Со одлука број 07-356/8 од 01.04.2011 година на Наставно-научниот совет на Природно-математичкиот факултет во Скопје одобрена е употребата на овој учебник како основен универзитетски учебник за студентите на Институтот за хемија при Природно-математичкиот факултет, како и за студентите на Фармацевтскиот факулет при УКИМ во Скопје и пошироко.

ПРЕДГОВОР

Оваа книга е плод на повеќегодишни предавања по предметот Математика I, од страна на нејзиниот автор, за студентите на Институтот за хемија на Природно математичкиот факултет при Универзитетот “Св. Кирил и Методиј” во Скопје. Таа целосно е изработена според Наставната програма по овој предмет.

Материјата во книгата, согласно споменатата програма, е поделена во пет тематски целини – глави. Во секоја глава со посебни наслови се издвоени наставните единици – предавањата. Содржината на секое од предавањата е детално разработена и поткрепена со соодветни решени примери. Скоро во секое од предавањата се понудени задачи за самостојно решавање.

Да забележиме дека содржината на овој учебник целосно ја покрива Наставната програма по предметот Математика на Фармацевтскиот факултет во Скопје. Авторот на учебникот, којшто е и професор што ја изведува наставата по овој предмет, смета дека книгата целосно ги задоволува потребите за оваа група на студенти. Освен тоа, оваа книга можат да ја користат студенти и од други факултети, чиишто наставни програми по математика се компактибилни со содржината на учебникот, како на пример: Технолошко - металуршки, Архитектонски факултет, ПМФ Институт за физика, Двопредметни студии математика - физика и други.

Чувствувам потреба да споменам дека во овој учебник е вградено и искуството на авторот стекнато од претходниот професор по овој предмет д-р Драган Димитровски, редовен професор на ПМФ во пензија. До него моја искрена благодарност.

Поаѓајќи од народната поговорка: “Оној што работи може и да погреши”, авторот не ја исклучува можноста од појава на грешки во учебникот. Во тој смисол, секоја добронамерна забелешка од читателот, којашто ќе доведе до подобрување на квалитетот на книгата, е добредојдена, за што авторот најсрдечно им се заблагодарува.

Со почит,

Од авторот

МНОЖЕСТВА И НИЗИ I

1. МНОЖЕСТВА

Множество е основен поим во математиката и како таков не се дефинира. Тоа треба да се сфати како колекција – група од предмети, живи суштества или мисловни работи кои во него се групирани врз база на една или неколку заеднички особини. Предметите, живите суштества или мисловните работи од коишто е составено множеството се нарекуваат негови **елементи**. Секое множество има **содржина** и **домен**. Содржината кажува за што станува збор во множеството т.е. ги определува елементите на множеството, а доменот определува каде се наоѓаат т.е. простираат елементите на тоа множество.

Пример 1: Сите студенти на Универзитетот "Св. Кирил и Методиј" во Скопје формираат едно множество.

За да ја определиме содржината на ова множество се прашуваме: За што станува збор во множеството? Одговор: За студенти, што значи дека содржината е определена со зборот студенти. За да го одредиме доменот на множеството се прашуваме: Каде се тие студенти? Одговор: На Универзитетот "Св. Кирил и Методиј" во Скопје, што значи дека доменот е Универзитет "Св. Кирил и Методиј" во Скопје.

Пример 2: Сите студенти на Природно математичкиот факултет во Скопје формираат множество.

Пример 3: Сите студенти на Фармацевтски факултет во Скопје формираат множество.

Пример 4: Сите лаборатории на Фармацевтскиот факултет во Скопје формираат множество.

Забелешка: Во претходните три примери определи ја содржината и доменот.

Пример 5: Сите кафулиња не формираат множество, бидејќи имаме содржина (кафулиња), а домен нема.

Множествата ги означуваме со големи латински букви: A, B, C,…X, Y,…, а елементите на множеството со мали латински букви: $a, b, c ... x, y, ...$

Ако сакаме да означиме дека x е елемент на некое множество A или не е елемент на множеството A, се користиме со знакот $\in$ или $\notin$ соодветно. Така

$x \in A$ се чита "икс е елемент на множеството A"

или "икс припаѓа на множеството A"

додека

$x \notin A$ се чита "икс не е елемент на множеството A"

или "икс не припаѓа на множеството A".

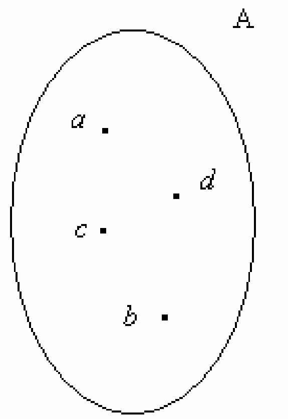
Едно множество може да биде зададено на **табеларен начин**, на **описен начин** и со т.н. **Венов дијаграм**.

Ова ќе го илустрираме низ следниот пример

Пример 6:

A=$\{a, b, c, d\}$ - табеларен начин

A={x | x е мала буква од првите четири букви на латинската азбука} – описен начин



- Венов дијаграм

Во случај кога множеството има голем број на елементи, како што е случајот со множествата од примерите 1, 2 и 3, позгодно е тие да бидат зададени на описен начин. Така за множеството од примерот 1 имаме

К={x | x е студент на Универзитетот “Св. Кирил и Методиј” во Скопје},

за множеството од примерот 2

P={x | x е студент на ПМФ во Скопје}

и за множеството од примерот 3

F={x | x е студент на Фармацевтскиот факултет во Скопје}.

Како секој студент на Фармацевтскиот факултет во Скопје е во исто време и студент на Универзитетот “Св. Кирил и Методиј” во Скопје, тоа секој елемент од множеството F е во исто време и елемент од множеството К. Велиме множеството F е **подмножество** на множеството К. За одбележување на подмножество се користи симболот $\subseteq$. Во овој случај пишуваме $F \subseteq K$ и читаме “множеството F е подмножество на множеството К”.

Дали важи обратното т.е. дали секој елемент на множеството К е и елемент на множеството F? Одговорот е не, бидејќи има барем еден елемент на множеството К што не е во F (пример студент од Машински факултет во Скопје е елемент на К, но не е елемент на F). Велиме “F е **вистинско подмножество** на К” и пишуваме $F \subset K$.

Покрај досега споменатите симболи $\in$, $\notin$, $\subseteq$ и $\subset$, често ќе се користиме и со симболите:

$\forall$ - “за секој” – универзален квантификатор

$\Rightarrow$ - “следува” – импликација

$\Leftrightarrow$ - “еквивалентно” или “ако и само ако” – знак за еквиваленција

$\exists$ - “постои”

$\exists!$ – “постои еден и само еден”

$\wedge$ - “и” – конјункција

$\vee$ - “или” – дисјункција

$\cap$ - пресек

$\cup$ - унија

\ - разлика

Δ - симетрична разлика

$\times$ - Декартов производ

Со помош на овие симболи, за погоре споменатите поими, имаме

- **подмножество**

$\boxed{A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)}$

- **еднаквост** на множества

$\boxed{A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)}$

- **вистинско подмножество**

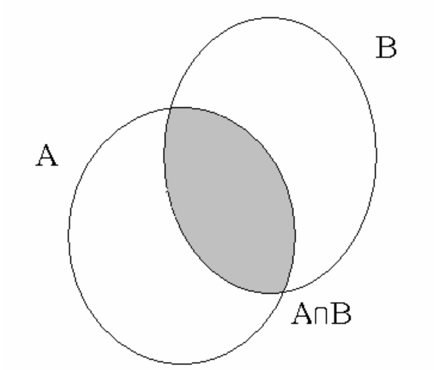
$\boxed{A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge \exists x \in B \text{ т.ш. } x \notin A)}$

***Пример** 7*: A=$\{a,b,c,d\}$, B=$\{c,a,b,a,d,b,a\}$ $\Rightarrow$ A=B. Зошто?

Сега ќе разгледаме некои операции со множества:

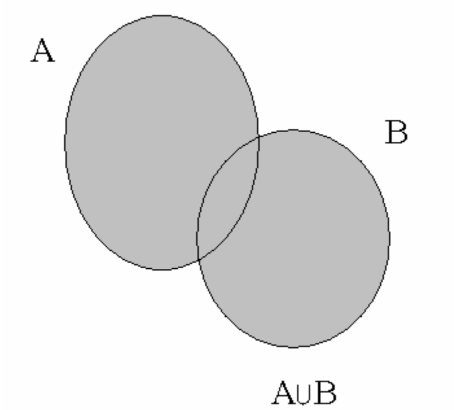
- **пресек** на две множества A и B

$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}}$



- **унија** на две множества A и B

$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}}$



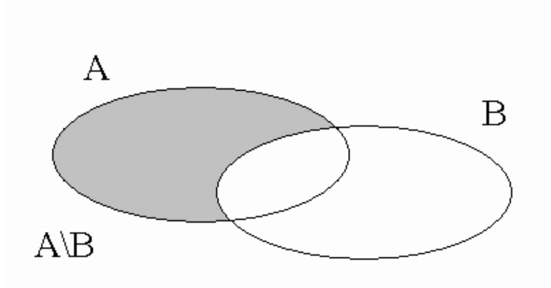
Ако A и B немаат заеднички елементи, тогаш пишуваме

$A \cap B = \emptyset$ – **празно множество**

и велиме дека A и B се **дисјунктни множества.**

Операциите $\cup$ и $\cap$ на множества ги имаат следниве својства:

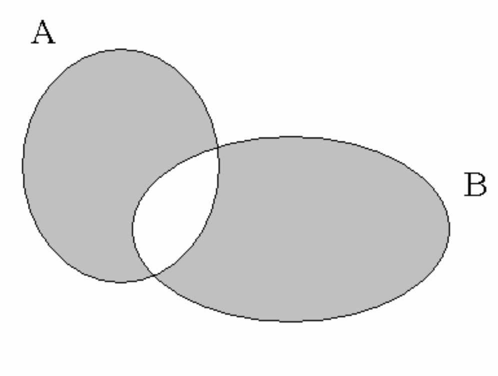
1) $A \cup B = B \cup A$	1') $A \cap B = B \cap A$
2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2') $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3) $A \cup \emptyset = A$	3') $A \cap \emptyset = \emptyset$
4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4') $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



Множеството

$\boxed{A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}}$

се нарекува **разлика** на множествата A и B.



Множеството

$\boxed{A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)}$

се нарекува **симетрична разлика** на множествата A и B.

Пример 8: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{m, b, n, p, d\}$

$\Rightarrow A \cap B = \{b, d\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, m, n, p\}$,

$A \setminus B = \{a, c\}$, $B \setminus A = \{m, n, p\}$, $A \Delta B = \{a, c, m, n, p\}$

Множеството

$\boxed{A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}}$

се нарекува **Декартов производ** на множествата A и B. Неговиот елемент (x,y) се нарекува **подреден пар**.

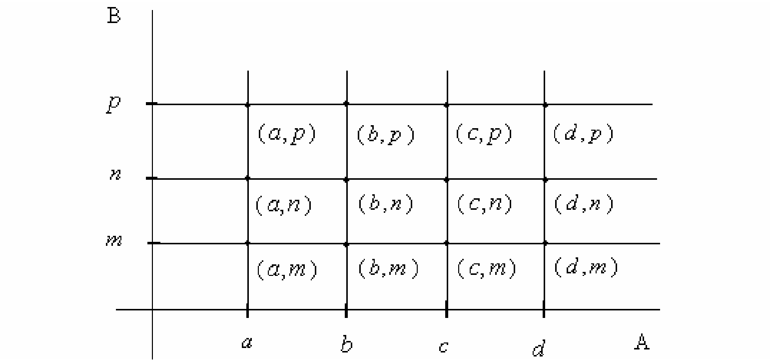
Значи, елементи на Декартовиот производ $A \times B$ се сите подредени парови што можат да се формираат од елементите на множествата A и B при што првата компонента x на подредениот пар $(x,y) \in A \times B$ припаѓа на множеството A, а втората компонента y припаѓа на множеството B.

$\boxed{(x,y)=(a,b) \Leftrightarrow x=a \wedge y=b}$ – **еднаквост** на подредени парови

Пример 9: A=$\{a,b,c,d\}$, B=$\{m,n,p\}$. A×B=?

A×B=$\{(a,m),\ (a,n),\ (a,p),\ (b,m),\ (b,n),\ (b,p),\ (c,m),\ (c,n),\ (c,p),\ (d,m),\ (d,n),\ (d,p)\}$.

Декартовиот производ може да се претстави со т.н. правоаголна шема:



Задача: Најди го Декартовиот производ B×A на множествата A и B од примерот 9 и претстави го со правоаголна шема.

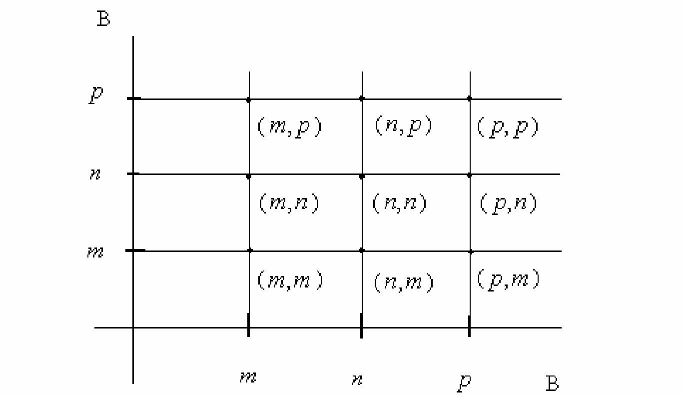
Специјално, ако B=A, имаме

$\boxed{A\times A=\{(x,y)|\ x,y\in A\}=A^2}$ **- Декартов квадрат** на множеството A.

Пример 10: B=$\{m,n,p\}$

B^2 = B×B=$\{(m,m), (m,n), (m,p), (n,m), (n,n), (n,p), (p,m), (p,n), (p,p)\}$.

Со шема:



Слично,

$$\boxed{A^3 = A\times A\times A \stackrel{def}{=} \{(x,y,z) \mid x,y,z\in A\}}$$

(x,y,z) – **подредена тројка**

$\vdots$

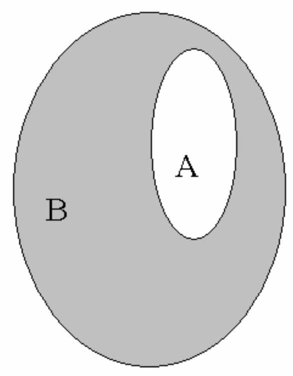
$$\boxed{A^n = A\times A\times A\times\ldots\times A \stackrel{def}{=} \{(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) \mid x_j \in A,\ j=\overline{1,n}\}}$$

$(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ - **подредена n-торка**

Нека $A\subseteq B$. Множеството

$$\boxed{B\setminus A \stackrel{def}{=} A'_B}$$

се нарекува **комплемент на А во однос на множеството В**.



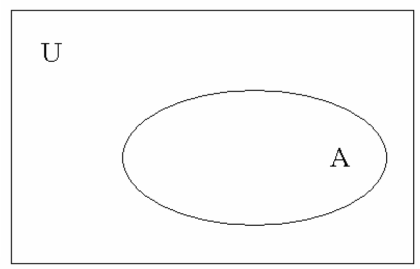
Пример 11: $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{m,a,d,n,b,c\}$

$A\subseteq B \Rightarrow A'_B = B\setminus A = \{m,n\}$

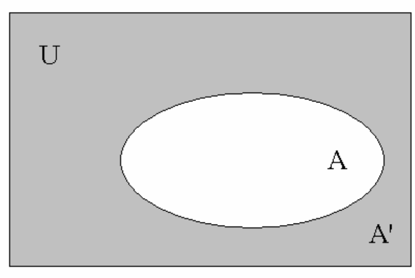
Сега ќе воведеме нов поим за т.н. **универзално множество**, кое што ќе го означуваме со U.

U е универзално множество $\Leftrightarrow$ $\forall$ множество A важи $A\subseteq U$.

Со Венов дијаграм универзалното множество се претставува со правоаголник:



Како $A\subseteq U \Rightarrow \exists\, A'_U = A'$ - **комплемент на множеството *A*.**



1) $(A')' = A$
2) $(A\cap B)' = A'\cup B'$
3) $(A\cup B)' = A'\cap B'$
4) $\varnothing' = U$
5) $U' = \varnothing$

Особините 1)–5) се познати под име **Де Морганови ставови**.

2. ПРЕСЛИКУВАЊЕ

Дефиниција 1:** **Нека X и Y се две дадени множества. Секое правило f според кое на секој елемент $x \in X$ се придружува само еден елемент $y \in Y$ се нарекува пресликување од множеството X во множеството Y и пишуваме $f\colon X \to Y$.

Значи,

$$f\colon X \to Y \text{ е пресликување } \Leftrightarrow (\forall x \in X)\ (\exists!\ y \in Y) \text{ т.ш. } x \xrightarrow{f} y$$

$$f\colon x \to y$$

$$y = f(x)$$

f – **пресликување**

x - **оригинал**

y - **слика**

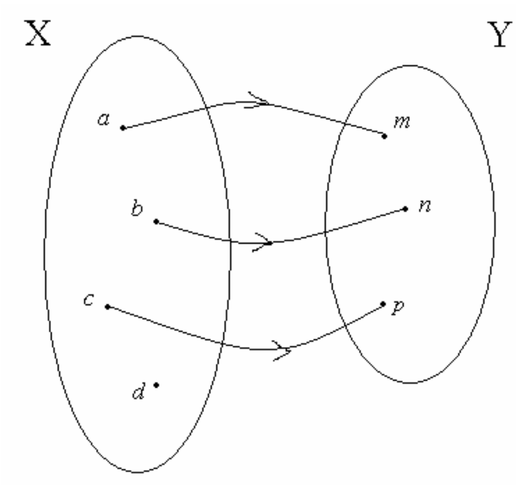
X – **домен** на пресликувањето f

$f(X)=\{f(x) \mid x \in X\}$ – **множество од слики** или **кодомен.**

Пресликувања се означуваат со мали латински букви: f, g, h… или $f_1, f_2, f_3 \ldots$

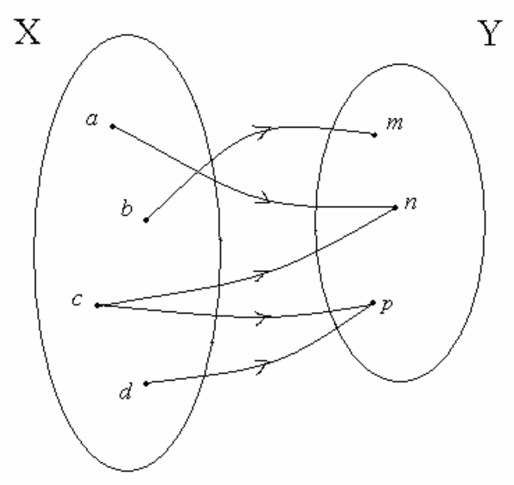
Пример 1: $X=\{a,b,c,d\}$, $Y=\{m,n,p\}$

а)



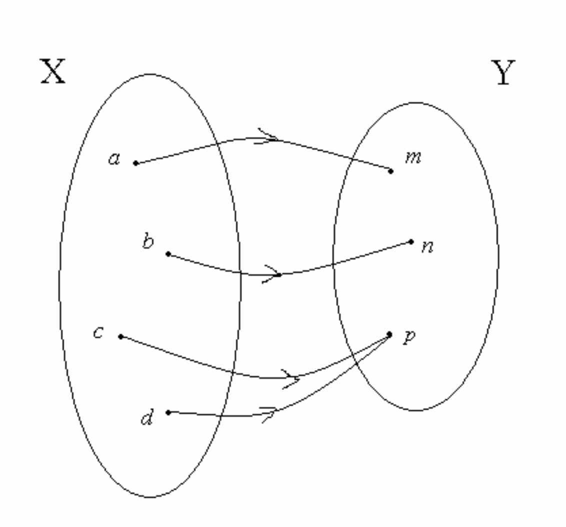
$f\colon X \to Y$ не е пресликување. Зошто?

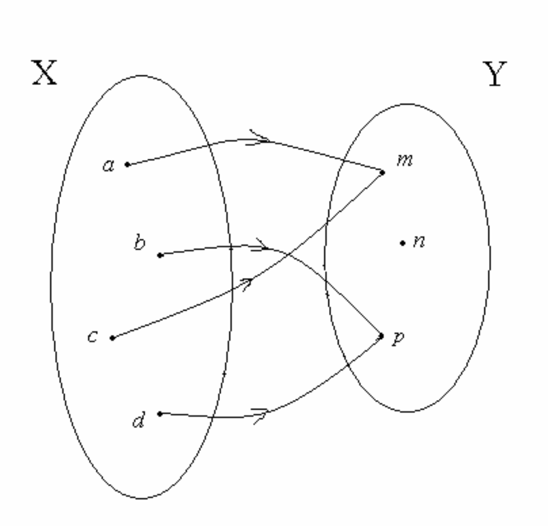
б)



$g\colon X \to Y$ не е пресликување. Зошто?

в) г)





h: X$\rightarrow$ Y е пресликување. Зошто? l: X$\rightarrow$ Y е пресликување. Зошто?

Дефиниција 2: Пресликувањето f: X$\rightarrow$ Y се нарекува инјекција ако

$$\forall x_1, x_2 \in X \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Забелешка 1: Дали пресликувањата h и l од примерот 1 се инјекции?

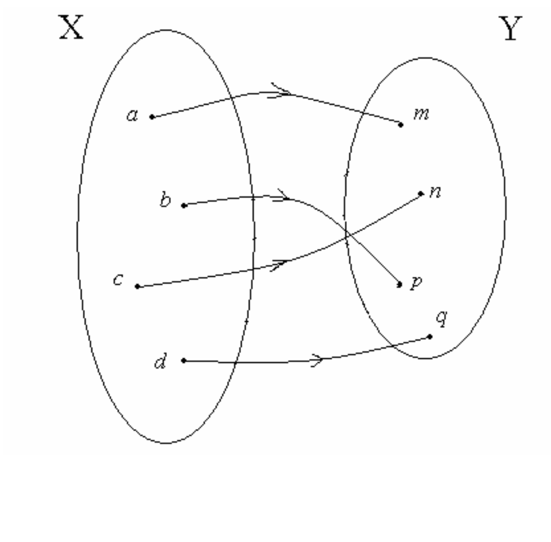
Дефиниција 3: Пресликувањето f: X$\rightarrow$ Y се нарекува сурјекција ако

$$(\forall y \in Y)\ (\exists\ x \in X)\ т.ш.\ y=f(x).$$

Забелешка 2: Дали пресликувањата h и l од примерот 1 се сурјекции?

Дефиниција 4: Пресликувањето f: X$\rightarrow$ Y коешто истовремено е и инјекција и сурјекција се нарекува биекција.

Пример 2: Пресликувањето f: X$\rightarrow$ Y дадено со цртежот е биекција. Зошто?



3. БИНАРНИ ОПЕРАЦИИ

Дефиниција 1: Секое пресликување f:$A^2 \rightarrow A$ се нарекува бинарна операција во A.

Според тоа, бинарна операција во множеството A е правило според кое на секој подреден пар (x,y)$\in A^2$ се придружува само еден елемент z$\in$ A т.е.

$$(x,y) \xrightarrow{f} z \in A$$

За бинарни операции се користат ознаките *, º, ·, : , +, – и други.

Забелешка: Сликата z$\in$ A на оригиналот (x,y)$\in A^2$ најчесто се означува со $x*y$ т.е. наместо $(x,y) \xrightarrow{*} z$ пишуваме $(x,y) \xrightarrow{*} x*y$.

Значи,

$$\boxed{x*y = z}$$

4. БРОЈНИ МНОЖЕСТВА

Во оваа точка кратко ќе се потсетиме на т.н. бројни множества, чиишто елементи се броеви, со кои што се оперира не само во математиката и применетите науки, туку и во секојдневниот живот.

МНОЖЕСТВО НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Множеството

$\mathbf{N}=\{1,2,3,4,\ldots,n,\ldots\}$

се нарекува **множество на природни броеви**.

Следниве пет аксиоми, познати под име **Пеанови аксиоми**, целосно го опишуваат множеството **N** на природните броеви:

A_1) Бројот 1 е природен број;

A_2) За секој природен број, постои единствен природен број познат под име негов **следбеник**. (Следбеник на бројот $n \in \mathbf{N}$ е бројот $n+1 \in \mathbf{N}$);

A_3) Единицата 1 не е следбеник на ниту еден природен број;

A_4) Ако два природни броеви имаат ист следбеник, тогаш тие броеви се еднакви т.е. од $m, n \in \mathbf{N} \wedge m+1=n+1 \Rightarrow m=n$ и

A_5) Нека $S \subseteq \mathbf{N}$ со следниве две особини:

а) $1 \in S$

б) од природен број $n \in S \Rightarrow$ и неговиот следбеник $n+1 \in S$.

Тогаш $S = \mathbf{N}$.

Во множеството **N** на природните броеви се дефинирани две бинарни операции: собирање и множење на природните броеви, додека операциите одземање и делење на природните броеви не се бинарни операции во **N**. Зошто?

Множеството

$\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\} = \{0,1,2,3,\dots\}$,

при што $0+n=n+0=n \quad \forall n \in \mathbf{N}$, се нарекува **проширено множество на природни броеви**, а бројот 0 се нарекува **нула**.

МНОЖЕСТВО НА ЦЕЛИ БРОЕВИ

На секој природен број n се придружува број $-n$ со следнава особина

$n+(-n)=(-n)+n=0 \quad (\forall n \in \mathbf{N})$.

Бројот $-n$ со оваа ососбина се нарекува **спротивен број** на бројот n.

Множеството

$\mathbf{Z}=\{\dots, -n, \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$

се нарекува **множество на цели броеви**.

Броевите $1,2,3,\dots,n,\dots$ се познати и под име **позитивни цели броеви**, додека броевите $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$ под име **негативни цели броеви**.

Во множеството **Z** на целите броеви бинарни операции се собирање, множење и одземање на целите броеви. Операцијата делење на цели броеви не е бинарна операција во **Z**. Зошто?

МНОЖЕСТВО НА РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Елементите на множеството

$$\mathbf{Q}_{+}=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b\in N \ \wedge \ НЗД(a,b)=1\right\}$$

се нарекуваат **позитивни дропки** или само **дропки**.

Бројот $-\dfrac{a}{b}$ со особина

$$\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\left(-\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}=0 \qquad \forall \frac{a}{b}\in \mathbf{Q}_{+}$$

се нарекува **спротивна дропка** на дропката $\dfrac{a}{b}$ или **негативна дропка**.

Да ставиме

$$\mathbf{Q}_{-}=\left\{-\frac{a}{b} \mid \frac{a}{b}\in Q_{+}\right\}$$

Множеството

$\mathbf{Q}= \mathbf{Q}_{+} \cup \mathbf{Q}_{-} \cup \{0\}$

се нарекува **множество на рационални броеви**.

Како $\forall x\in \mathbf{Z} \Rightarrow x=\dfrac{x}{1}\in \mathbf{Q} \Rightarrow$ секој цел број е и рационален број, што значи дека $\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}$.

Во множеството **Q** на рационалните броеви бинарни операции се: собирање, одземање и множење, додека во множеството $\mathbf{Q}\setminus\{0\}$ (покрај претходно наведените операции) бинарна операција е и делење. Значи, треба да забележиме дека во множеството **Q** нема смисол делење со нулата.

Имајќи в предвид дека дробната црта означува операција делење, имаме

$\frac{5}{8}$=0,625 $-\frac{7}{4}=-1,75$

$\frac{8}{3}$=2,666...=2,(6) $\frac{35}{6}$=5,8333...=5,8(3)

$-\frac{42}{33}=-1,272727...=-1,(27)$ $\frac{233}{37}$=6,297297...=6,(297)

Забележуваме дека погоре наведените рационални броеви се запишани во вид на децимални броеви со конечен број на децимални цифри или во вид на децимални броеви со безброј децимални цифри при што една цифра или група од неколку цифри периодично се повторува (**периодични децимални броеви**). Се покажува дека оваа особина ја има секој рационален број.

Секој рационален број може да се запише во вид на децимален број со конечен број на децимални цифри или во вид на периодичен децимален број. Важи и обратното.

Обратниот процес ќе го илустрираме на неколку примери:

Пример 1: x=0,(3)

$\Rightarrow$ x=0,333…

$\underline{10x = 3,333...}$

$\Rightarrow 10x - x = 3$

$9x = 3$

$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \in \mathbf{Q}$.

Пример 2: $-1,(24)$=?

Имаме x=1,242424...

$\Rightarrow$ $\underline{100x = 124,2424...}$

$\Rightarrow 100x - x = 123$

$99x = 123$

$x = \frac{123}{99} = \frac{41}{33}$

Значи, $-1,(24) = -\frac{41}{33} \in \mathbf{Q}$.

Пример 3: $x=0,1(45)$

Решение: $x=0,1454545\ldots$

$\Rightarrow \quad 10x=1,454545\ldots$

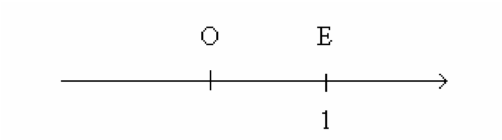
$\underline{1000x=145,4545...}$

$\Rightarrow 1000x-10x=144$

$990x=144$

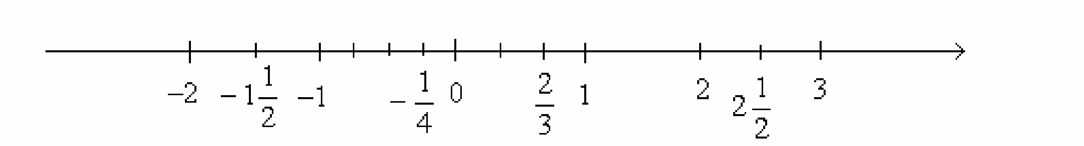
$$x=\frac{144}{990}=\frac{8}{55}\in \mathbf{Q}.$$

Што е бројна оска?



Права на која што е земена една фиксна точка O (координатен почеток) и на која што во координатниот почеток е нанесена единечна отсечка OE (т.е. $\overline{OE}=1$) се нарекува **бројна оска**. Вообичаено наместо буквата E се пишува бројот 1.

Треба да забележиме дека на секој рационален број одговара само по една точка од бројната оска.



Дали важи и обратното т.е. дали на секоја точка од бројната оска одговара рационален број? Одговорот е, како што ќе видиме нешто подоцна, негативен. Тоа значи на бројната оска постојат точки "непокриени" со рационални броеви.

МНОЖЕСТВО НА ИРАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Да го земеме бројот $x=\sqrt{2}$ кој што е решение на квадратната равенка $x^2=2$. Ќе покажеме дека $\sqrt{2}$ не е рационален број т.е. дека $\sqrt{2}\notin \mathbf{Q}$.

За таа цел **да претпоставиме дека $\sqrt{2}$ е рационален број**. Од претпоставката

$\sqrt{2}\in \mathbf{Q}\Rightarrow \sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$**,** каде што p и q се взаемно прости природни броеви т.е.

НЗД (p, q)=1.

Имаме

$$\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$2=\frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2=p^2$$

$$\frac{p^2}{2}=q^2\in \mathbf{N}$$

$\Rightarrow \qquad 2\,|\,p^2$

$\Rightarrow \qquad 2\,|\,p$ т.е. $p=2p_1,\ p_1\in \mathbf{N}$

Понатаму,

$$2q^2=(2p_1)^2$$

$$q^2=2p_1^{\,2}$$

$$\frac{q^2}{2}=p_1^{\,2}\in \mathbf{N}$$

$\Rightarrow \qquad 2\,|\,q^2$

$\Rightarrow \qquad 2\,|\,q$

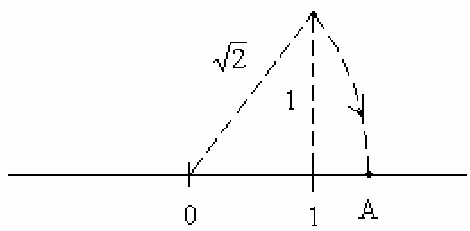
Според тоа добивме дека $2\,|\,p\ \wedge\ 2\,|\,q\ \Rightarrow p$ и q не се взаемно прости, што е во контрадикција со фактот да НЗД (p, q)=1. До оваа контрадикција – противречност доведе претпоставката да $\sqrt{2}$ е рационален број. Значи направената претпоставка не е точна, поради што $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Бројот $\sqrt{2}$ се нарекува **ирационален број**. Такви броеви се и броевите: $-\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, \pi, -\pi...$ Множеството на ирационалните броеви се означува со **I**. Јасно е дека

$$\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$$

т.е. дека **Q** и **I** се дисјунктни множества.

На цртежот десно е прикажана точка A која што одговара на бројот $\sqrt{2}$ што не е рационален број. Исто така точката што е симетрична на A во однос на координатниот почеток одговара на бројот $-\sqrt{2}$ што не е рационален број. Со тоа одговоривме на прашањето дека на бројна оска постојат точки што не се покриени со рационални броеви. Тие точки се покриваат со ирационалните броеви.



$\sqrt{2} = \sqrt{2,|00|00|00|0...} = 1,4142...$

-1
$100 : 24 \cdot 4$
-96
$400 : 281 \cdot 1$
-281
$11900 : 2824 \cdot 4$
-11296
$60400 : 28282 \cdot 2$
-56564
3836
$\vdots$

Ако се примени алгоритамот за наоѓање на квадратен корен од некој број, тогаш за бројот $\sqrt{2}$ се добива децимален број во којшто бројот на децималните цифри не е конечен и во којшто нема периодично повторување на една цифра или на група од неколку цифри. Зошто?

Општо: ***Секој ирационален број може да се запише во вид на децимален број со безброј децимални цифри во којшто нема периодично повторување на една цифра или група од неколку цифри***.

МНОЖЕСТВО НА РЕАЛНИ БРОЕВИ

Множеството

$\mathbf{R}=\mathbf{Q}\cup\mathbf{I}$

се нарекува **множество на реални броеви**.

Од досега изложеното јасно е дека

$\mathbf{N}\subset\mathbf{N}_0\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$

$\mathbf{I}\subset\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}\cap\mathbf{I}=\varnothing$.

Во множеството **R** бинарни операции се: собирање, одземање и множење, а во множеството $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ бинарна операција е и делење. Во множеството на реалните броеви нема смисол делење со нула.

5. ПРОШИРЕНО МНОЖЕСТВО НА РЕАЛНИ БРОЕВИ

Се укажува потреба множеството на реалните броеви **R** да се прошири со симболите $-\infty$ и $+\infty$ (минус и плус бескрајност). Множеството

$\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}=\mathbf{R}^*$

се нарекува **проширено множество** на реални броеви. Притоа

$\forall x\in\mathbf{R}\qquad -\infty< x<+\infty$.

Оперирање со симболите се врши по следниве правила:

$(\forall x\in\mathbf{R})\qquad x+(+\infty)=(+\infty)+x=+\infty$

$x+(-\infty)=-\infty+x=-\infty$

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

$(\forall x\in\mathbf{R}\wedge x>0)\qquad x\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot x=+\infty$

$x\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot x=-\infty$

$(\forall x\in\mathbf{R}\wedge x<0)\qquad x\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot x=-\infty$

$x\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot x=+\infty$

$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$

$(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$

$(-\infty)\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$

$(\forall x \in \mathbf{R})$ $\frac{x}{+\infty} = 0 \quad \wedge \quad \frac{x}{-\infty} = 0$

$(\forall x \in \mathbf{R} \wedge x > 0)$ $\frac{+\infty}{x} = +\infty$ $(\forall x \in \mathbf{R} \wedge x < 0)$ $\frac{+\infty}{x} = -\infty$

$\frac{-\infty}{x} = -\infty$ $\frac{-\infty}{x} = +\infty$

6. ИНТЕРВАЛИ И ε-ОКОЛИНА

Познато е дека

$(\forall a, b \in \mathbf{R})\ \ a<b \ \vee\ a=b \ \vee\ a>b$.

Освен со знаците <, = и > ќе оперираме и со $\le$ и $\ge$.

$\{x |\ x \in \mathbf{R} \wedge a < x < b\} = (a, b)$ – **отворен интервал**

$\{x |\ x \in \mathbf{R} \wedge a \le x < b\} = [a, b)$ – **полуотворен интервал**

$\{x |\ x \in \mathbf{R} \wedge a < x \le b\} = (a, b]$ – **полуотворен интервал**

$\{x |\ x \in \mathbf{R} \wedge a \le x \le b\} = [a, b]$ – **затворен интервал** или **сегмент**

$\{x |\ x \in \mathbf{R} \wedge x < a\} = (-\infty, a)$

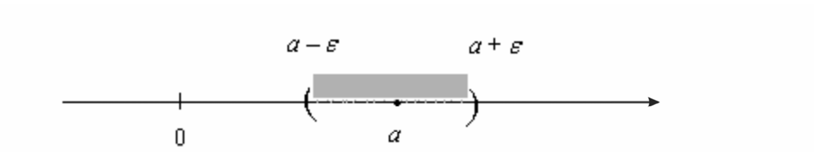
$\{x |\ x \in \mathbf{R} \wedge x \le a\} = (-\infty, a]$

$\{x |\ x \in \mathbf{R} \wedge x > a\} = (a, +\infty)$

$\{x |\ x \in \mathbf{R} \wedge x \ge a\} = [a, +\infty)$

$\{x |\ -\infty < x < +\infty\} = (-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$

Нека $a \in \mathbf{R}$ и $\varepsilon > 0$. Интервалот $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ се нарекува ε – **околина** на точката a .



$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ се сите точки од исенчениот дел.

За едно множество $A \subseteq \mathbf{R}$ велиме дека е **отворено множество** ако $\forall a \in A$ постои ε-околина $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ на точката a што целосно лежи во множеството A, т.е.

$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq A$.

Секое отворено множество што ја содржи точката a се нарекува **околина** на точката a.

7. МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

Петтата Пеанова аксиома е позната под име **принцип (или метод) на математичка индукција** и истата може да се преформулира на следен начин: Нека со P(n) означиме некое својство (формула) што е задоволено од природниот број n.

1) Ако P(1) е точно т.е. својството P(n) е точно за $n=1$ и

2) од претпоставката дека својството P(n) важи за $n=k\in$ **N** т.е. P(k) е точно

$\Rightarrow$ 3) дека својството P(n) важи и за природниот број $n=k+1$ т.е. P($k+1$) е точно,

тогаш својството P(n) важи $\forall n \in$ **N**.

Пример 1: Со принцип на математичка индукција докажи дека важи формулата

$$1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$$

Решение:

1) Проверуваме дали формулата важи за $n=1$. Имаме

$$1=\frac{1(1+1)}{2} \text{ т.е. } 1=1. \text{ Важи.}$$

2) Правиме претпоставка дека формулата важи за $n=k$ т.е.

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Треба да покажеме дека формулата важи и за бројот $n=k+1$. Имаме

$$1+2+3+...+n = \underbrace{1+2+3+...+k}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(n-1+1)(n-1+2)}{2}=$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}. \quad \text{Важи.}$$

Согласно принципот за математичка индукција, формулата важи за секој природен број n.

Да ја искористиме докажаната формула во еден конкретен случај.

Најди збир на првите 100 природни броеви.

Имаме

$$1+2+3+4+...+99+100=\frac{100(100+1)}{2}=50\cdot 101=5050.$$

Пример 2: Со принцип на математичка индукција докажи го неравенството на Бернули

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (\forall x>-1)$$

за секој природен број n.

Решение:

1) За $n=1$, имаме

$$(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$$

$1+x \geq 1+x$ што е точно.

2) Правиме претпоставка дека неравенството на Бернули важи за $n=k$ т.е. важи

$$(1+x)^k \geq 1+kx .$$

Треба да го докажеме неравенството на Бернули и за бројот $n=k+1$. Имаме

$$(1+x)^n=(1+x)^{k+1}=(1+x)^k\cdot(1+x) \geq (1+kx)(1+x)=$$

$$=1+kx+x+kx^2=1+(k+1)x+kx^2 \geq$$

$$\geq 1+(k+1)x=1+nx. \quad \text{Важи.}$$

Според тоа, неравенството на Бернули важи $\forall n\in \mathbf{N}.$

Задача 1: Со принцип на математичка индукција докажи ја точноста на формулата

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \qquad \forall n\in \mathbf{N},$$

а потоа пресметај го збирот на првите сто непарни природни броеви.

Задача 2: Со математичка индукција докажи ја точноста на формулата

$$1\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 7+...+(2n-1)(2n+1)=n^2, \quad \forall n\in \mathbf{N},$$

а потоа пресметај го збирот $1\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 7+...+25\cdot 27$.

8. БИНОМНА ФОРМУЛА

Знаеме дека

$(a+b)^1 = 1\cdot a + 1\cdot b$

$(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2ab + 1\cdot b^2$

$(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1\cdot b^3$

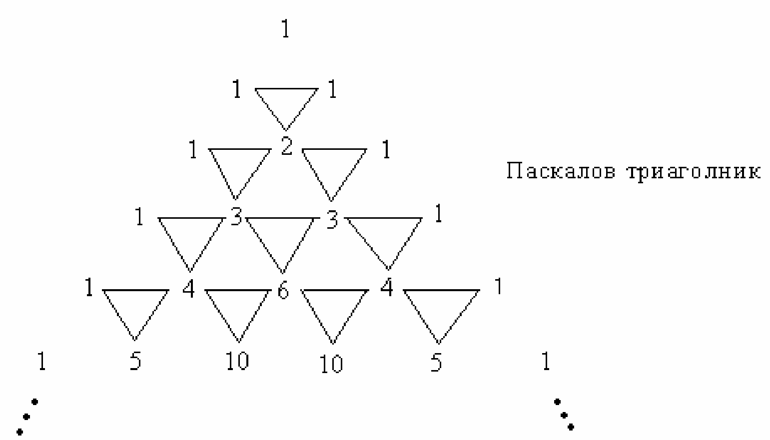
$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b) =$

$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 =$

$= 1\cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1\cdot b^4$

$\vdots$

Воочуваме еден симетричен распоред на коефициентите на десните страни во горните равенства



Пример 1:

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^5 = 1\cdot(\sqrt{2})^5 + 5(\sqrt{2})^4\sqrt{3} + 10(\sqrt{2})^3(\sqrt{3})^2 +$

$+10(\sqrt{2})^2(\sqrt{3})^3 + 5\sqrt{2}(\sqrt{3})^4 + 1\cdot(\sqrt{3})^5 = \cdots = 109\sqrt{2} + 89\sqrt{3}$

Ќе воведеме два поима и тоа поим за **факториел**

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n \overset{def}{=} n!$ се чита “ен факториел”

$0! \overset{def}{=} 1$

и поим за **биномен коефициент**

$$\binom{n}{k} \overset{def}{=} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k!}$$ се чита “ен над ка”

$$\binom{n}{0} \overset{def}{=} 1$$

Пример 2:

5!= 1·2·3·4·5=120

$$\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2!} = 10, \qquad \binom{7}{5} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{5!} = \frac{2520}{120} = 21$$

Биномниот коефициент ги има следниве својства:

1) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ 3) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Како

$$\binom{1}{0} = 1 \text{ и } \binom{1}{1} = 1$$

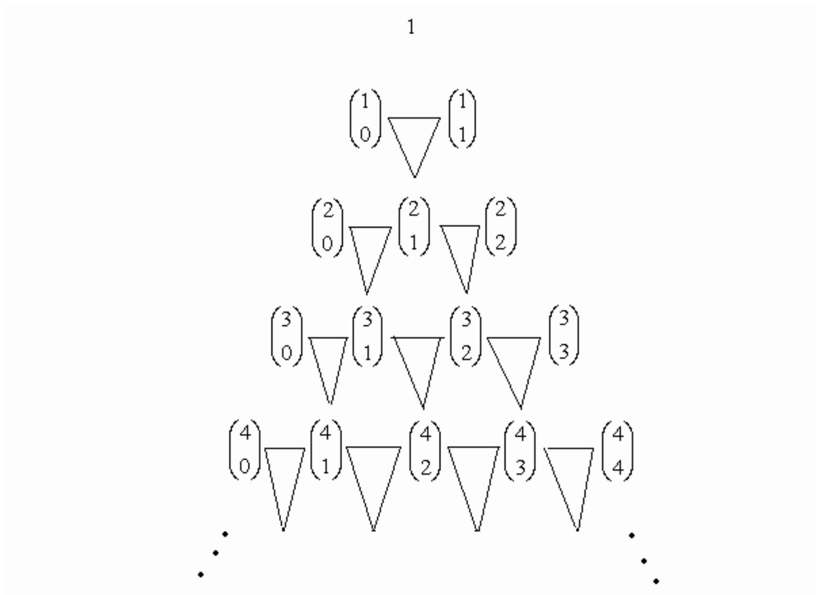
$$\binom{2}{0} = 1,\ \binom{2}{1} = \frac{2}{1!} = 2,\ \binom{2}{2} = \frac{2\cdot 1}{2!} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1,\ \binom{3}{1} = \frac{3}{1!} = 3,\ \binom{3}{2} = \frac{3\cdot 2}{2!} = 3,\ \binom{3}{3} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{3!} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1,\ \binom{4}{1} = \frac{4}{1!} = 4,\ \binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2!} = 6,\ \binom{4}{3} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!} = 4,\ \binom{4}{4} = 1$$

$$\vdots$$

тоа Паскаловиот триаголник се запишува



Со помош на биномните коефициенти, почетните формули за степенување на биномот $a+b$ на прв, втор, трет, четврт степенов показател и.т.н. се запишуваат

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3$$

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} b^4$$

$$\vdots$$

Продолжувајќи го овој процес за $n \in \mathbf{N}$ добиваме

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n}$$

Последната формула е позната под име **Њутнова биномна формула**.

Да ја проучиме малку Њутновата биномна формула:

1) При степенување на биномот $a+b$ на степенов показател $n \in \mathbf{N}$ почнуваме со член во којшто горната бројка во биномниот коефициент е n, а долната е 0. Во секој нареден член горната бројка во биномниот коефициент останува иста n, а долната бројка се зголемува за единица;

2) Во првиот член $\binom{n}{0}a^n b^0$ од степенуваниот бином $a+b$ на n–ти степенов показател првиот собирок a има степенов показател n, а вториот b има 0. Во секој нареден член степеновиот показател на a се намалува за единица, а степеновиот показател на b се зголемува за единица;

3) Завршуваме со членот $\binom{n}{n}a^0 b^n$ во којшто долната бројка од биномниот коефициент $\binom{n}{n}$ е изедначена со горната.

За $k+1$ – иот член од степенуваниот бином $a+b$ на n–ти степенов показател имаме

$$\boxed{\mathrm{T}_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k}$$

Задача 1: Со математичка индукција докажи дека Њутновата биномна формула важи $\forall n \in \mathbf{N}$.

Пример 3: Развиј по Њутнова биномна формула $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^4$.

Решение:

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^4 = (\sqrt{3}+(-\sqrt{2}))^4 = \binom{4}{0}(\sqrt{3})^4(-\sqrt{2})^0 + \binom{4}{1}(\sqrt{3})^3(-\sqrt{2})^1 + \binom{4}{2}(\sqrt{3})^2(-\sqrt{2})^2 +$$

$$+\binom{4}{3}(\sqrt{3})^1(-\sqrt{2})^3 + \binom{4}{4}(\sqrt{3})^0(-\sqrt{2})^4 = 9–4\cdot3\sqrt{3}\sqrt{2}+6\cdot3\cdot2–4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}+4=$$

$$= 9–12\sqrt{6}+36–8\sqrt{6}+4= 49–20\sqrt{6}.$$

Пример 4: Определи го шестиот член од развиениот степен

$$\left(\frac{3x^2}{5a}+\frac{5a^2}{3x}\right)^{12}.$$

Решение: $T_6=T_{5+1}=\binom{12}{5}\left(\frac{3x^2}{5a}\right)^{12-5}\left(\frac{5a^2}{3x}\right)^5=\cdots=\frac{7128}{25}a^3x^9$.

Пример 5: Определи го оној член од развиениот степен $\left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^6$.

што не содржи x.

Решение: Нека членот што не содржи x е $k+1$–ви по ред. Тој гласи

$$T_{k+1}=\binom{6}{k}\left(\sqrt{x}\right)^{6-k}\left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^k=\binom{6}{k}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{6-k}\frac{(-3)^k}{(x^{\frac{1}{2}})^k}=$$

$$=\binom{6}{k}(-3)^k\frac{x^{\frac{6-k}{2}}}{x^{\frac{k}{2}}}=\binom{6}{k}(-3)^k x^{\frac{6-k}{2}-\frac{k}{2}}=\binom{6}{k}(-3)^k x^{3-k}$$

Како ова е член што не треба да содржи x, тоа степеновиот показател на x мора да е нула, т.е $3-k=0$ од каде што $k=3$.

Значи, членот што не содржи x е четврти по ред и изнесува

$$T_4=\binom{6}{3}(-3)^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3!}(-27)=20\cdot(-27)=-540.$$

Задача 2: Најди го членот во развојот на степенот $\left(\frac{3\sqrt{x}}{x}+2x^2\sqrt[3]{x}\right)^n$ што содржи x^5, ако збирот на биномните коефициенти на првите два членови е еднаков на 19.

Задача 3: За која вредност на x четвртиот член во развојот на степенот $\left(\sqrt[x]{a}+\sqrt[3]{a^x}\right)^n$ е еднаков на $56a^6$, ако се знае дека збирот на биномните коефициенти на вториот и третиот член во развојот е 36?

9. ОДНОС, ПРОПОРЦИЈА И ПРОЦЕНТ

ОДНОС

Дефиниција 1: Нека a ***и*** b ***се два позитивни реални броеви т.е.***

$$a, b \in \mathbf{R} \wedge a > 0,\ b > 0.$$

Изразот $a : b$ ***(т.е.*** $\frac{a}{b}$***) се нарекува однос или размер на броевите*** a ***и*** b***.***

Реалниот број $k = a : b$, што се добива со делење на бројот a со бројот b, се нарекува **коефициент на односот**, додека броевите a и b се нарекуваат негови **членови**.

за $k = 1$ т.е. $a : b = 1$ имаме $a = b$

$k < 1$ т.е. $a : b < 1$ имаме $a < b$

$k > 1$ т.е. $a : b > 1$ имаме $a > b$

Дефиниција 2: Два односи коишто имаат исти коефициенти се нарекуваат еднакви односи.

Значи, $a : b = k \wedge c : d = k \Rightarrow$ односите се еднакви.

Односот $a : b$ не се менува ако и двата негови членови се помножат или поделат со еден ист број различен од нула.

Така, ако $a : b = k \wedge m \neq 0$, тогаш $(a \cdot m):(b \cdot m) = k$ и $(a : m):(b : m) = k$. Оваа особина на односот непосредно следува од особините за проширување и кратење на дропки.

Пример 1: Упрости ги односите:

а) 49000:14000 б) 3,5:2,7 и в) $\frac{3}{4} : \frac{7}{6}$

Решение:

Односот под а) е еднаков со односот 7:2, бидејќи е добиен од него со делење на двата негови членови со 7000; односот 3,5:2,7 е еднаков со односот 35:27, бидејќи е добиен со множење на двата негови членови со 10, а односот под в) е еднаков со $(\frac{3}{4} \cdot 12):(\frac{7}{6} \cdot 12)$ т.е. со односот 9:14.

ПРОПОРЦИЈА

Дефиниција 3: Два еднакви односи поврзани со знакот за еднаквост се нарекува пропорција.

Значи, ако

$a:b=k \ \wedge \ c:d=k$, тогаш следува

$\boxed{a:b=c:d}$ – пропорција

a, b, c, d – **членови на пропорција**

b, c – **внатрешни членови**

a, d – **надворешни членови**

1) Во секоја пропорција производот на надворешните членови е еднаков со производот на внатрешните членови

$$a:b=c:d \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc;$$

2) Ако надворешните членови во една пропорција си ги заменат местата, тогаш пропорцијата останува исправна т.е.

$a:b=c:d$ е пропорција $\Rightarrow$ $d:b=c:a$ е исто така пропорција;

3) Ако внатрешните членови во една пропорција си ги променат местата, тогаш пропорцијата останува исправна т.е.

$a:b=c:d$ е пропорција $\Rightarrow$ $a:c=b:d$ е пропорција;

4) Ако внатрешните членови си ги променат местата со надворешните, тогаш пропорцијата е исправна т.е.

$a:b=c:d$ е пропорција $\Rightarrow$ $b:a=d:c$ е исто така пропорција;

5) Ако еден надворешен и еден внатрешен член во една пропорција се помножат или поделат со ист број различен од нула, тогаш пропорцијата останува исправна т.е.

$a:b=c:d$ е пропорција и $m \in \mathbf{R},\ m \neq 0$

$\Rightarrow \quad (ma):b=(mc):d; \ \ a:(mb)=c:(md)$

$(a:m):b=(c:m):d \ \wedge \ a:(m:b)=c:(m:d)$

се исто така пропорции;

6) Ако сите членови во една пропорција се помножат или поделат со ист број различен од нула, тогаш пропорцијата останува исправна;

7) Ако во една пропорција три негови членови се познати, а четвртиот член е непознат, тогаш тој член (познат како **четврта геометриска пропорционала**) може да се определи аналитички и геометриски

$$a:b=c:x$$

$$x=?$$

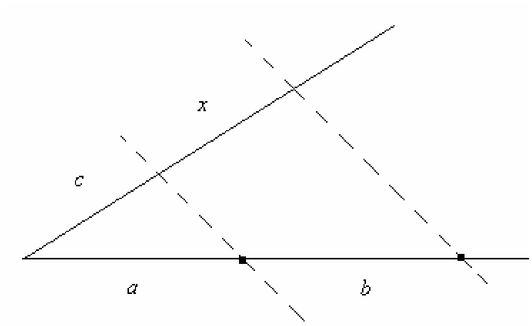
Аналитички:

$$a:b=c:x$$

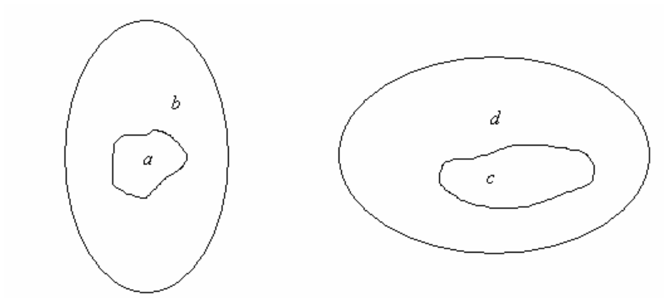
$$ax=bc$$

$$x=\frac{bc}{a}$$

Геометриски:



Забелешка: Пропорција е математички апарат кој служи како средство за евентуални – некои предвидувања. Така на пример, ако односите што ја формираат пропорцијата $a:b=c:d$ имаат коефициент $k<1$, тогаш a (односно c) може да сметаме дека е дел од некоја целина b (односно d).



Велиме: делот a спрема целината b се однесува исто како делот c спрема целината d.

Дефиниција 4: За две взаемно зависни величини А и В велиме дека се правопропорционални величини ако односот на нивните големини a ***и*** b ***останува константен.***

Со други зборови, за две взаемно зависни величини ќе велиме дека се правопропорционални ако со зголемување на едната величина за m –пати ќе се зголеми и другата величина за m –пати и обратно.

$$a:b=k \;\Rightarrow\; (a\cdot m):(b\cdot m)=k \;\wedge\; (a:m):(b:m)=k\,.$$

Дефиниција 5: За две взаемно зависни величини A и B велиме дека се обратно пропорционални ако производот од нивните големини a ***и*** b ***останува константен.***

Со други зборови, за две взаемно зависни величини ќе велиме дека се обратно пропорционални ако со зголемување на едната величина за m –пати ќе дојде до намалување на другата величина за m –пати и обратно т.е.

$$a\cdot b=k \;\Rightarrow\; (a\cdot m)\cdot(b:m)=k \;\wedge\; (a:m)\cdot(b\cdot m)=k\,.$$

Пример 2:

маса цена на чинење

$1\,l$ H_2SO_4 чини 960,00 ден

$2\,l$ H_2SO_4 чинат 2·960,00 ден = 1920,00 ден

$3\,l$ H_2SO_4 чинат 3·960,00 ден = 2880,00 ден

$\Rightarrow$ масата и цената на чинењето на H_2SO_4 се правопропорционални величини.

Пример 3: ***(Бојл – Мариотов закон)***:

$p\cdot V=k$ – Производ од притисок p и волумен V на гас е константен. Следува p и V се обратно пропорционални.

Пример 4: Филателист купил 5 марки од една серија за 90€. Колку марки од истата серија ќе купи филателистот за 72€?

Решение:

$$\begin{array}{l} \text{за} \uparrow 5 \text{ марки дал} \uparrow 90€ \\ \text{за} \quad x \text{ марки дал} \quad 72€ \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow$ $x:5=72:90$

$90x=5\cdot 72$

$$x = \frac{5 \cdot 72}{90} = 4 \text{ марки.}$$

Пример 5: Една работа можат да ја завршат 20 работника за 120 дена. За колку денови истата работа би ја завршиле 35 работници под исти услови за работа?

Решение:

$$\begin{array}{l} \downarrow \begin{array}{ll} 20 \textit{ работници за} & \uparrow 120 \textit{ дена} \\ 35 \textit{ работници за} & x \textit{ дена} \end{array} \\ \hline \end{array}$$

$$x:120 = 20:35$$

$$35x = 20 \cdot 120$$

$$x = \frac{20 \cdot 120}{35} = 68{,}57 \text{ денови.}$$

Забелешка: Правилото употребено за составување на пропорциите во претходните два примера се нарекува ***просто тројно правило***.

ПРОЦЕНТ

Пример 6: Во некоја од изминативе учебни години во прва година на некој факултет биле запишани 850 студенти. Со цел да се проучи проодноста од I-ва во II-ра година, со метод на случаен избор е избрана група од 30 студенти. На крајот од учебната година т.е. во наредната учебна година од овие 30 студенти 6 студенти не запишале II–ра година. Најди го односот на бројот на студентите што ја изгубиле годината и бројот на студентите од групата. Имаме

(број на студенти што изгубиле година):(број на студенти од групата)=6:30

т.е. е 1:5. Тоа значи на секој 5-ти студент од групата, еден студент губи година, а 4 студенти запишале наредна II–ра година.

Праксата покажала дека од посебна важност е да се работи со однос во којшто вториот член е 100. Затоа двата члена на односот 1:5 ќе ги помножиме со 20. Притоа се добива односот 20:100. Како групата од 30 студенти е земена по метод на случаен избор, тоа подразбира дека успехот на студирањето кај преостанатите студенти е ист. Па односот 20:100 кажува дека на 100 запишани студенти во I–ва година, 20 студенти ја губат годината т.е. запишуваат прва година на квадрат, а 80 студенти се запишуваат во наредната II–ра година. Односот 20:100 скратено се запишува 20% и се чита “дваесет проценти”. Зборот процент доаѓа од латинскиот збор **pro centum** = за сто.

Дефиниција 6: Нека $p \in \mathbf{R} \wedge 0 \le p \le 100$***.*** p ***% е краток запис за односот*** p ***:100.***

Сега, ако сакаме да пресметаме т.е. предвидиме колку од 850 запишани студенти ја изгубиле годината т.е. запишале I^2, се повикуваме на пропорција како средство за математичко предвидување:

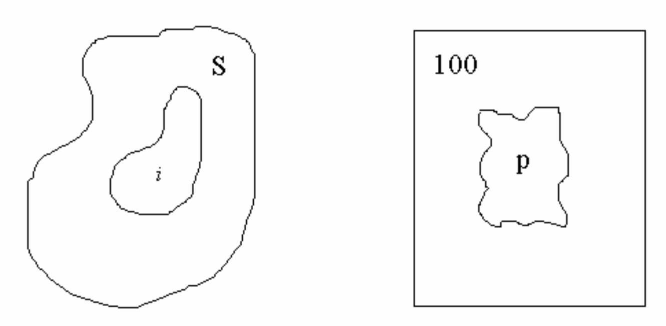
на $\uparrow$ 100 *запишани студенти* $\uparrow$ 20 *губат година*
на 850 *запишани студенти* x *губат година*

$\Rightarrow \quad x:20 = 850 \cdot 100$

$100x = 20 \cdot 850$

$$x = \frac{17000}{100} = 170 \text{ студенти.}$$

Општо: ако имаме некоја целина S, дел i од таа целина и сакаме застапеноста на делот i во целината S да ја искажеме во проценти, тогаш ја имаме пропорцијата:



$$i : \mathrm{S} = p : 100$$

S – **главнина (целина)**

i – **процентен износ (дел)**

100 – **константен број**

p – **процентна стапка (процент)**

Задачи во коишто се работи со проценти се викаат задачи со **процентни сметки**.

Постојат три основни процентни задачи:

$$i : S = p : 100$$

Прва процентна задача:
Се бара делот i кој што во некоја целина S е застапен со p%

$100 \cdot i = S \cdot p$

$$\boxed{i = \frac{S}{100} p}$$

Втора процентна задача:
Се бара главнината S во која што делот i е застапен со p%

$S \cdot p = i \cdot 100$

$$\boxed{S = \frac{100 \cdot i}{p}}$$

Трета процентна задача:
Се бара процентната застапеност на делот во целината

$S \cdot p = i \cdot 100$

$$\boxed{p = \frac{i}{S} \cdot 100\%}$$

***Пример** 7*: Од 125 мерења на некоја величина, 17% од мерењата дава една иста големина. Колкав е бројот на мерењата што дава иста големина?

Решение: S=125, i=?, p=17%.

Имаме $i = \frac{S}{100} \cdot p = \frac{125}{100} \cdot 17 = 21{,}25 \approx 21$.

Пример 8: Знаеме дека во 35% воден раствор на H_2SO_4 има 251g чиста H_2SO_4. Колкава е масата на водениот раствор на H_2SO_4?

Решение:

S=?, i=251g, p=35%

$$\Rightarrow \quad S = \frac{100i}{p} = \frac{100 \cdot 251}{35} = 717g$$

Пример 9: Знаеме дека во 1253g воден раствор на H_2SO_4 имаме 324g чиста H_2SO_4. Најди го процентот на застапеноста на H_2SO_4 во растворот.

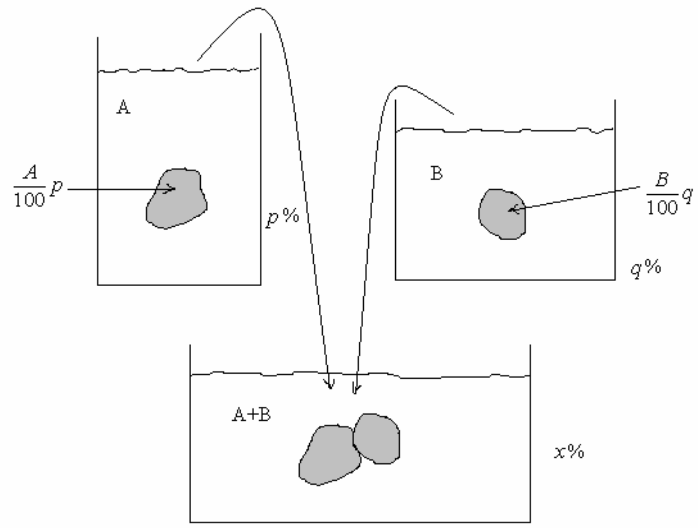
Решение: S=1253g, i=324g, p%=?

$$p = \frac{i}{S} \cdot 100 = \frac{324}{1253} \cdot 100 = 25{,}86\%$$

10. ПРИМЕНА НА ПРОЦЕНТ И ПРОПОРЦИЈА ВО ХЕМИСКИ СМЕТКИ

Процентот и пропорцијата имаат особено важна улога во хемијата. Тоа ќе го илустрираме преку неколку примери:

Пример 1: (Мешање на раствори): A g p% воден раствор на некое соединение се мешаат со B g q% воден раствор на истото соединение. Колку процентен раствор се добива?



Решение: Ова мешање на раствори ќе го прикажеме на следен начин:

$$\frac{Ag}{p\%}+\frac{Bg}{q\%}=\frac{(A+B)g}{x\%}$$

Во A g p% воден раствор чисто соединение е застапено со $\frac{A}{100}\cdot p$ g.

Во B g q% раствор чисто соеднинение е застапено со $\frac{B}{100}\cdot q$ g.

Во новата смеша, чијашто маса е (A+B)g, чисто соединение е застапено со маса $\left(\frac{A}{100}p+\frac{B}{100}q\right)$g.

Согласно третата процентна задача имаме

$$x=\frac{дел}{целина}\cdot 100\%$$

$$x=\frac{\frac{A}{100}\cdot p+\frac{B}{100}q}{A+B}\cdot 100\%$$

$$\boxed{x=\frac{Ap+Bq}{A+B}\%}$$

Оваа формула може да се обопшти на случај на мешање на три или повеќе раствори. Така во случај на мешање на три раствори од едно исто соединение, имаме

$$\begin{matrix}Ag\\p\%\end{matrix}+\begin{matrix}Bg\\q\%\end{matrix}+\begin{matrix}Cg\\r\%\end{matrix}=\begin{matrix}(A+B+C)g\\x\%\end{matrix}$$

Во добиената смеша, чијашто маса е (A+B+C)g, чисто соединение ќе има маса

$$\left(\frac{A}{100}p+\frac{B}{100}q+\frac{C}{100}r\right)g$$

еднаква на збирот од масите на чистото соединение во секој од трите раствори. Според тоа, за процентот на добиената смеша имаме

$$x\%=\frac{дел}{целина}\cdot 100$$

$$x=\frac{\frac{A}{100}\cdot p+\frac{B}{100}q+\frac{C}{100}r}{A+B+C}\cdot 100\%$$

$$\boxed{x=\frac{Ap+Bq+Cr}{A+B+C}\%}$$

Слично, во случај на мешање на n –раствори ($n\in\mathbf{N}$)

$$\begin{matrix}A_1g\\p_1\%\end{matrix}+\begin{matrix}A_2g\\p_2\%\end{matrix}+\begin{matrix}A_3g\\p_3\%\end{matrix}+\ldots+\begin{matrix}A_ng\\p_n\%\end{matrix}=\begin{matrix}\left(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n\right)g\\x\%\end{matrix}$$

добиваме

$$\boxed{x=\frac{A_1p_1+A_2p_2+A_3p_3+\ldots+A_np_n}{A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n}\%}$$

Конкретен пример: Се мешаат

$$\begin{matrix}629g\\17\%\end{matrix}+\begin{matrix}1024g\\15\%\end{matrix}+\begin{matrix}3276g\\5\%\end{matrix}$$

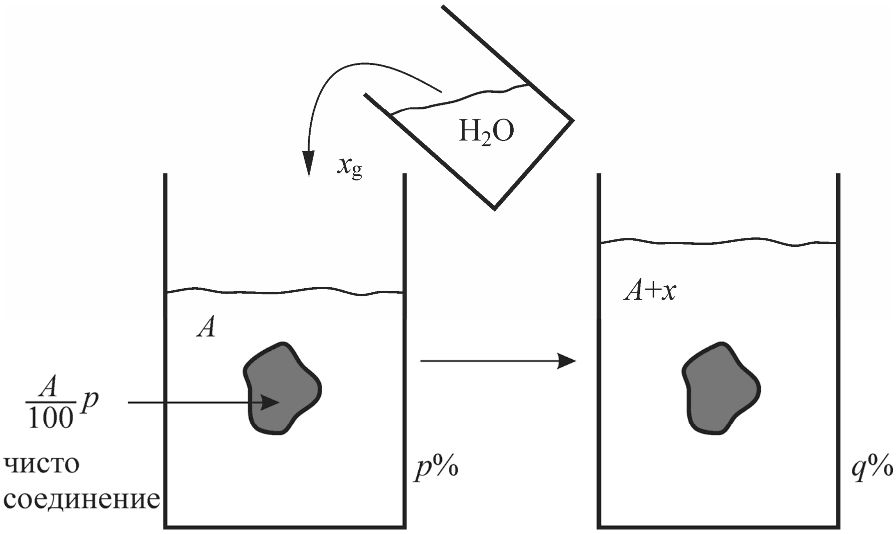
водени раствори на исто соединение. Колку процентен раствор се добива?

Решение:

$$x = \frac{629 \cdot 17 + 1024 \cdot 15 + 3276 \cdot 5}{629 + 1024 + 3276}\% = \frac{10693 + 15360 + 16380}{4929}\% = \frac{42433}{4929}\% = 8{,}6088\%$$

Пример 2: (Разблажување на раствори): А g p% воден раствор на некое соединение, со долевање на вода, треба да се разблажи до q% воден раствор ($p > q$). Колку чиста вода треба да се долие?

Решение:



Со долевање на x g чиста вода на А g p% раствор од соединението, масата на растворот ќе се зголеми за x g (ќе стане (А+x)g), а масата на чистото соединение нема да се промени. Значи, q% раствор ќе има маса (А+x)g, а чистото соединение ќе има маса $\frac{A}{100} \cdot p$ g. Имаме

$$\frac{\frac{A}{100} \cdot p}{A + x} \cdot 100 = q\%$$

$$\frac{Ap}{A + x} = q$$

$$Ap = Aq + xq$$

$$A(p-q)=xq$$

$\boxed{x=\dfrac{A(p-q)}{q}g}$ - маса на чиста H_2O што треба да се долие.

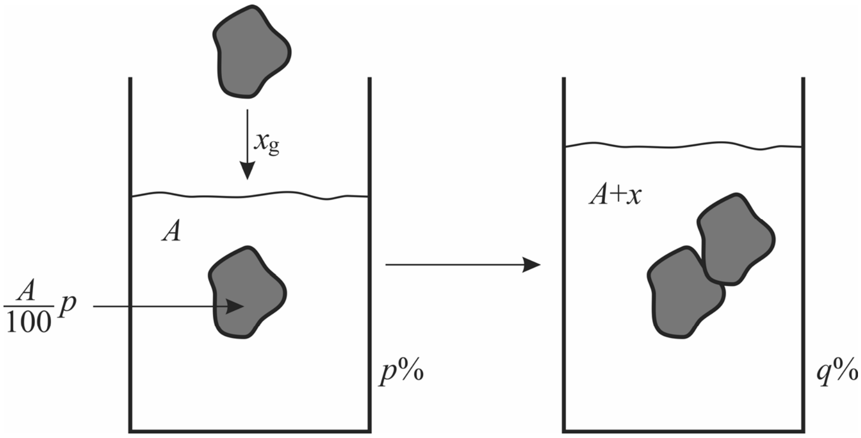
Конкретен пример: Имаме 100g 80% воден раствор на оцетна киселина. Колку чиста H_2O треба да се долие за да растворот се разблажи до 5% раствор?

Решение: A=100g, p=80%, q=5%

$$x=\frac{A(p-q)}{q}=\frac{100(80-5)}{5}=20\cdot 75=1500g \text{ чиста вода.}$$

Пример 3: (Засилување на раствори): A g p% воден раствор на некое соединение треба да се засили до q% раствор ($p<q$). Колку чисто соединение треба да се додаде на растворот?

Решение:



Нека на A g p% воден раствор од соединението со додавање на xg чисто соединение се добива q% раствор.

Сега новиот раствор ќе има маса (A+x)g, а чисто соединение ќе има маса ($\frac{A}{100}p+x$)g. Според тоа,

$$\frac{\frac{A}{100}\cdot p+x}{A+x}\cdot 100=q$$

$$\frac{Ap+100x}{A+x}=q$$

$$Ap+100x=Aq+xq$$

$$(100-q)x=A(q-p)$$

$\boxed{x=\frac{A(q-p)}{100-q}g}$ -маса на чисто соединение што треба да се додаде.

Конкретен пример: Сакаме 123g 30% воден раствор на сол ($NaCl$) да засилиме до 50% раствор. Колку чиста сол треба да се додаде на растворот?

A=123g, p=30%, q=50%

$$x=\frac{A(q-p)}{100-q}=\frac{123(50-30)}{100-50}=\frac{123\cdot 20}{50}=\frac{123\cdot 2}{5}=\frac{246}{5}=45{,}2g\ .$$

Пример 4: (Процентен состав на соединение): Определи го процентниот состав на соединението H_2SO_4.

Решение:

Да се определи процентен состав на едно соединение значи да се пресмета со колкав процент учествува секој од елементите во градбата на тоа соединение.

Од периодниот систем читаме релативни атомски маси на секој од елементите H, S и O од коишто е составено соединението H_2SO_4:

A_r(H)=1, A_r(S)=32, A_r(O)=16

Ја пресметуваме релативната молекулска маса на H_2SO_4:

$M_r(H_2SO_4)=2A_r(H)+1A_r(S)+4A_r(O)=2\cdot1+32+4\cdot16=98$

$\Rightarrow$ молска маса на H_2SO_4 е

$M(H_2SO_4)=98\,{}^{g}\!/_{mol}$

$\Rightarrow$ 1 mol H_2SO_4 има маса 98g

1 mol H_2 има маса 2g

1 mol S има маса 32g

1 mol O_4 има маса $4\cdot16$=64g

Имаме

$$\%H=\frac{дел}{целина}\cdot 100=\frac{2}{98}\cdot 100=2{,}04\%$$

$$\%S=\frac{дел}{целина}\cdot 100=\frac{32}{98}\cdot 100=32{,}653\%$$

$$\%O=\frac{дел}{целина}\cdot 100=\frac{64}{98}\cdot 100=65{,}306\%$$

Пример 5: Колкав е процентот на бакарот Cu во бакар оксидот CuO?

Решение:

$A_r(Cu)=64$, $A_r(O)=16$

$\Rightarrow$ $M_r(CuO)=1A_r(Cu)+1A_r(O)=64+16=80$

$M(CuO)=80\,{}^{g}\!/_{mol}$

1 mol CuO има маса 80g

1 mol Cu има маса 64g

$$\Rightarrow \quad \%Cu=\frac{дел}{целина}\cdot 100=\frac{64g}{80g}\cdot 100\%=80\%$$

Пример 6: Во кое количество CuO се содржат 40g Cu?

Решение:

$M(CuO)=80\,{}^{g}\!/_{mol}$ $\Rightarrow$ 1 mol CuO има маса 80g

$M(Cu)=64\,{}^{g}\!/_{mol}$ $\Rightarrow$ 1 mol Cu има маса 64g

Според тоа,

во 80g CuO има 64g Cu

во x g CuO има 40g Cu

$64:80=40:x$

$64x=80\cdot 40$

$$x=\frac{80\cdot 40}{64}=50g \text{ CuO.}$$

Пример 7: Колку грама Fe има во 1000g железо сулфид (FeS)?

Решение:

A_r(Fe)=56, A_r(S)=32

$\Rightarrow$ M_r(FeS)=1A_r(Fe)+1A_r(S)=56+32=88

$\Rightarrow$ M(FeS)=88 g/mol

1 mol FeS има маса 88g

1 mol Fe има маса 56g

Сега ја поставуваме пропорцијата

$$\begin{array}{llll} во \uparrow & 88g \;\; FeS & има \downarrow & 56g \;\; Fe \\ во & 1000g \;\; FeS & има & xg \;\; Fe \end{array}$$

x:56=1000:88

88x=56·1000

$$x=\frac{56000}{88}$$

$x = 636{,}36g$ Fe.

Задача 1: Се мешаат 850 грама 43% воден раствор на шеќер со 1350 грама 31% воден раствор на шеќер и со 200 грама чиста вода. Колку грама шеќер треба да се додаде на смешата за да се добие 52% воден раствор на шеќер?

Задача 2: Смеша од водени раствори на сол (NaCl): 850 грама 47% раствор, 1530 грама 23% раствор, 500 грама 35% раствор и 2000 грама 18% раствор треба да се разблажи до 15% воден раствор. Колку грама чиста вода треба да се додаде на смешата за таа цел?

Задача 3: Определи го процентниот состав на нитробензолот $C_6H_5NO_2$.

11. НИЗИ ОД РЕАЛНИ БРОЕВИ

11.1 ПОИМ ЗА НИЗА. КОНВЕРГЕНТНОСТ И ДИВЕРГЕНТНОСТ НА НИЗА

Често се јавува потреба за подредување на елементите во дадено множество. Тоа се постигнува со запишување на елементите од тоа множество во вид на низа. Наједноставен пример за тоа претставува низата од природните броеви

$1,2,3,\ldots,n,\ldots$

во која што природните броеви се подредени по големина.

Дефиниција 1: Секое пресликување f: $N \to R$

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots, & n, \ldots \\ f: \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_n, \ldots \end{array}$$

велиме определува низа од реални броеви.

a_1 се нарекува **прв член** на низа

a_2 се нарекува **втор член** на низа

a_3 се нарекува **трет член** на низа

$\vdots$

$a_n = f(n)$ се нарекува n **-ти член** на низа или **општ член** на низа

$\vdots$

За една низа од реални броеви велиме дека е зададена ако е познат нејзиниот општ член $a_n = f(n)$. Со негова помош се определуваат членовите на низата, имајќи притоа в предвид дека природниот број n го означува **редниот број** на членот на низата. Низа со општ член a_n се означува со (a_n).

Пример 1: (a_n), $a_n = \frac{1}{n}$

за $n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1} = 1$

$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$

Пример 2: (a_n), $a_n = \frac{n}{n+1}$. Имаме

$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$

$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$

$n=4 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

Според тоа, оваа низа во развиена форма гласи $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

$\Rightarrow$ низата во развиена форма гласи: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

Пример 3: (a_n), $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

Оваа низа во развиена форма гласи: $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots, (-1)^n \frac{n}{n+1}, \dots$

Пример 4: (a_n), $a_n = (-1)^n$

Оваа низа во развиена форма гласи: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$

Дефиниција 2: За бројот А велиме дека е точка на натрупување за низата (a_n) ако во било која нејзина ε–околина (А–ε, А+ε) има безброј членови на низата.

Дефиниција 3: За бројот А велиме дека е гранична точка (т.е. граница) на низата (a_n) ако $\forall \varepsilon>0$ произволно мало постои природен број n_0, што зависи од ε, таков што $\forall n > n_0$ важи $|a_n - A| < \varepsilon$. Пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Значи,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N})$ т.ш. $\forall n > n_0$ важи $|a_n - A| < \varepsilon$.

Да ја проучиме малку дефиницијата за граница на низа. Имаме

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N})$ т.ш. $\forall n > n_0$ важи $|a_n - A| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N})$ т.ш. $\forall n > n_0$ важи $-\varepsilon < a_n - A < +\varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N})$ т.ш. $\forall n > n_0$ важи $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N})$ т.ш. $\forall n > n_0$ важи $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

Значи, во произволна ε–околина (А–ε, А+ε) на гранична точка А има безброј членови од низата. Тоа се членовите чиј што реден број n е поголем од n_0 т.е. тоа се членовите

$$a_{n_0+1},\ a_{n_0+2},\ a_{n_0+3},\ldots \in (A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$$

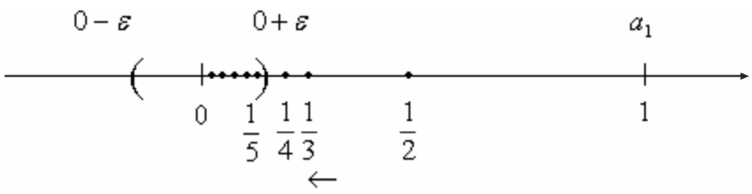
додека надвор од оваа околина се наоѓаат конечен број членови на низата. Тоа се членовите

$$a_1,\ a_2,\ \ldots, a_{n_0} \notin (A-\varepsilon,\ A+\varepsilon).$$

Од тука произлегува и основната разлика помеѓу точка на натрупување и гранична точка на една низа (a_n). Имено и во случај на точка на натрупување и во случај на гранична точка во произволна нивна ε–околина има безброј многу членови на низата, а надвор од оваа ε–околина во случај на точка на натрупување не е важен бројот на членовите на низата (тој може да биде конечен или бесконечен); додека во случај на гранична точка надвор од ε–околината бројот на членовите од низата може да биде само конечен број.

Забелешка: Од погоре искажаното треба да забележиме дека една низа (a_n) ако има гранична точка, тогаш таа е единствена. Со други зборови една низа не може да има две различни гранични точки.

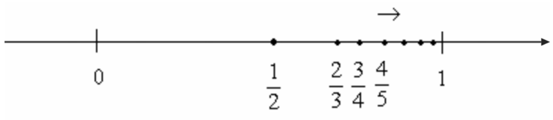
Пример 1: (a_n), $a_n = \dfrac{1}{n}$



Воочуваме дека членовите на оваа низа се повеќе се приближуваат кон 0. Ако земеме произволна ε–околина $(0-\varepsilon,\ 0+\varepsilon)$ на 0 во неа ќе има безброј членови од низата, а надвор конечен број. Следува 0 е граница на оваа низа т.е.

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.$$

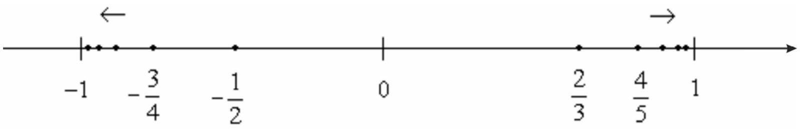
Пример 2: (a_n), $a_n = \dfrac{n}{n+1}$



Воочуваме дека членовите од оваа низа се повеќе се приближуваат кон 1. Во произволна ε–околина $(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$ на бројот 1 има безброј членови од низата, а надвор конечен број $\Rightarrow$ 1 е граница. Пишуваме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Пример 3: (a_n), $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$



Забележуваме дека членовите од низата чијшто реден број е непарен се приближуваат кон –1, а членовите со парен реден број се приближуваат кон 1. Поради ова, во произволна ε–околина на –1, а и во произволна ε–околина на 1 има безброј членови на низата $\Rightarrow$ –1 и 1 се точки на натрупување на оваа низа. Оваа низа нема граница. Пишуваме

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \text{ не постои.}$$

Пример 4: (a_n), $a_n = (-1)^n$

И оваа низа има две точки на натрупување –1 и 1. Таа нема граница т.е

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \text{ не постои.}$$

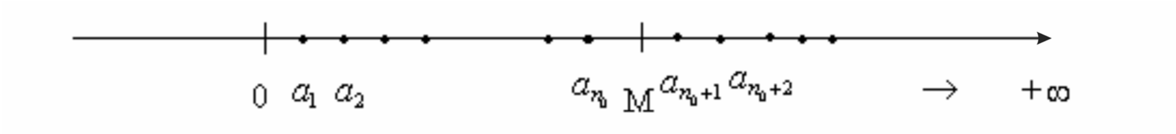
Пример 5: (a_n), $a_n = c \in \mathbf{R}$

$$(c_n):\ c, c, c, \ldots, c, \ldots$$

Јасно е дека во секоја ε–околина $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ на точката c се наоѓаат сите членови на оваа низа $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c = c$

Сега ќе воведеме така наречени бескрајни граници.

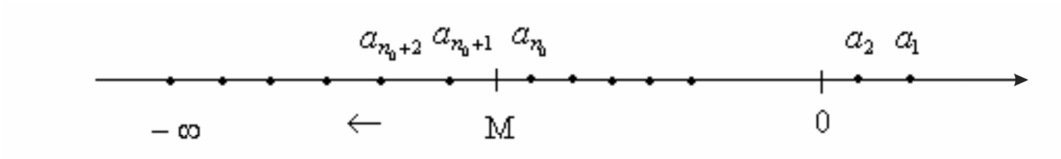
***Дефиниција 4: За низата** (a_n) **велиме дека има граница** $+\infty$ **т.е.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ **ако за секој реален позитивен број М постои природен број** n_0 **(М) т.ш.** $\forall n > n_0$ **важи** $a_n > M$.*



Значи, на десно од секој позитивен реален број М секогаш има безброј членови од низата (a_n), а бројот на членовите од низата што се лево од М е конечен.

Дефиниција 5: За низата** (a_n) **велиме дека има граница** $-\infty$ **т.е** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$**, ако за било кој негативен реален број М постои природен број** n_0 **(М) т.ш. (**$\forall n > n_0$ **(М)) важи** $a_n <$ **М.

Значи, како и да земеме негативен реален број М, секогаш на лево од тој број ќе има безброј членови од низата (a_n), а на десно од тој број, бројот на членовите од низата (a_n) е конечен.



Дефиниција 6: Низата** (a_n) **за којашто граничната вредност** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ **постои (е реален број) се нарекува конвергентна низа; додека низата** (a_n) **за којашто граничната вредност** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ **не постои или е еднаква на** $\pm\infty$ **се нарекува дивергентна низа.

11.2 МОНОТОНИ И ОГРАНИЧЕНИ НИЗИ

***Дефиниција 1:** За низата (a_n) велиме дека е монотоно растечка низа ако*

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$$

или скратено

$$\boxed{a_n < a_{n+1} \quad (\forall n \in N)}$$

Во случај кога

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le a_{n+1} \le \ldots$$

или скратено

$$\boxed{a_n \le a_{n+1} \quad (\forall n \in N)}$$

велиме дека низата (a_n) е неопаднувачка низа.

***Дефиниција 2:** За низата (a_n) велиме дека е монотоно опаднувачка низа ако*

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$$

или скратено

$$\boxed{a_n > a_{n+1} \quad (\forall n \in N)}$$

Во случај кога важи

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge a_{n+1} \ge \ldots$$

или скратено

$$\boxed{a_n \ge a_{n+1} \quad (\forall n \in N)}$$

велиме дека низата (a_n) е нерастечка низа.

***Пример 1**:* (a_n), $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{\cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{n^2} - \cancel{2n}}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$$

$\Rightarrow \quad a_{n+1} - a_n > 0 \quad (\forall n \in \mathrm{N})$

$-a_n > -a_{n+1} \ / (-1)$

$a_n < a_{n+1} \qquad (\forall n \in \mathrm{N})$

$\Rightarrow$ низата е монотоно растечка.

Пример 2: (a_n), $a_n = \dfrac{1}{5^n}$

Имаме

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{5^n} = \frac{1-5}{5^{n+1}} = \frac{-4}{5^{n+1}} < 0$$

$\Rightarrow \quad a_{n+1} - a_n < 0 \quad (\forall n \in \mathrm{N})$

$-a_n < -a_{n+1} \ / (-1)$

$a_n > a_{n+1} \qquad (\forall n \in \mathrm{N})$

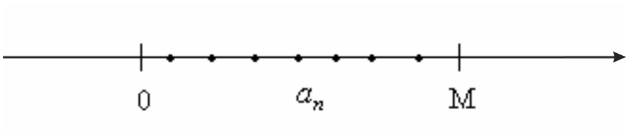
$\Rightarrow$ низата е монотоно опаднувачка.

Дефиниција 3: За низата (a_n) велиме дека е ограничена од горе (од десно) ако постои реален број M т.ш.

$$\boxed{a_n \leq M \qquad (\forall n \in N)}$$

Бројот M се вика горна или десна меѓа за низата (a_n).

Геометриски:



Сите членови на низата (a_n) се наоѓаат на лево од точката M.

Често, во овој случај, велиме дека низата (a_n) е **мајорирана низа**, а бројот M се вика **мајоранта**.

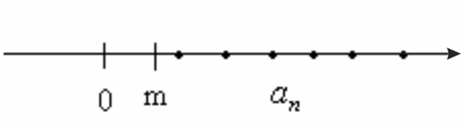
Треба да забележиме дека во случај на низа ограничена од горе, таа има безброј горни меѓи. Најмалата горна меѓа се нарекува **супремум** за низата (a_n) и пишуваме $\sup a_n$.

Дефиниција 4: За низата (a_n) велиме дека е ограничена од долу (од лево) ако постои реален број m т.ш

$$\boxed{m \le a_n \quad (\forall n \in N)}$$

Бројот m со оваа особина се вика долна или лева меѓа за низата (a_n).

Геометриски:



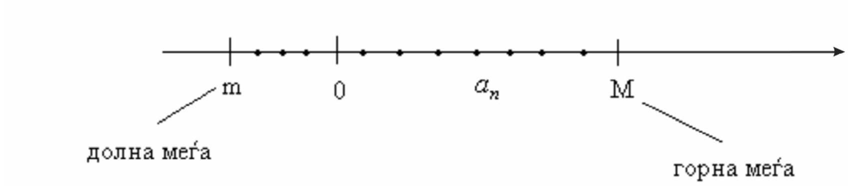
Сите членови на низата (a_n) се наоѓаат десно од точката m.

Често, во овој случај, велиме дека низата (a_n) е **минорирана низа**, а бројот m се нарекува **миноранта**.

Во случај на низа (a_n) што е ограничена од долу, таа има безброј долни меѓи. Најголема долна меѓа се нарекува **инфимум** за низата (a_n) и се означува со $\inf a_n$.

Дефиниција 5: За низата (a_n) која што е ограничена и од долу и од горе велиме дека е ограничена низа.

Геометриски:



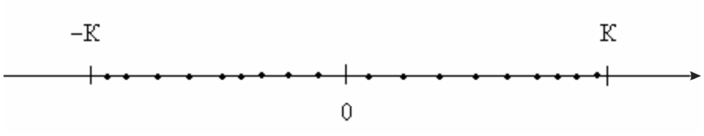
Сите членови на низата (a_n) се наоѓаат помеѓу точките m и M.

Треба да забележиме дека во случај на ограничена низа (a_n) постои позитивен реален број K>0 т.ш.

$$-K \le a_n \le K \quad (\forall n \in N)$$

т.е. $|a_n| \leq K \quad (\forall n \in N)$

Геометриски:



Сите членови од низата (a_n) се помеѓу –K и K т.е. се во интервалот [–K, K].

Пример 3: Низата (a_n), $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ е ограничена низа, бидејќи

$$0 \leq a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$$

т.е. $0 \leq a_n \leq 1 \quad (\forall n \in N)$

Една долна меѓа е бројот 0, а една горна меѓа е бројот 1.

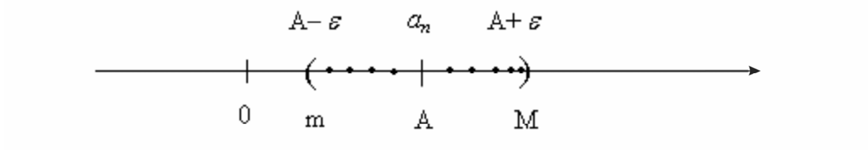
Пример 4: Низата (a_n), $a_n = \dfrac{1}{5^n}$ е исто така ограничена низа. Една долна меѓа е бројот 0, а една горна меѓа е бројот 1, бидејќи

$$a_n: \quad \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \ldots$$

Теорема 1: Секоја конвергентна низа е и ограничена низа.

Доказ: (a_n) е конвергентна низа $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$. Ако земеме една ε–околина (A–ε, A+ε) на бројот A, тогаш во неа ќе има безброј членови од низата (a_n), а надвор ќе има конечен број. Можат да настанат два случаја:

а) Надвор од околината (A–ε, A+ε) да нема ниту еден член од низата (a_n) т.е. сите членови од низата (a_n) се во оваа ε–околина.



Тогаш јасно е дека низата (a_n) е ограничена низа, бидејќи една долна меѓа m е бројот A–ε, а една горна меѓа M е бројот A+ε.

б) Надвор од ε–околината (A–ε , A+ε) бројот на членовите од низата е конечен. Членови што се надвор од споменатата ε-околина нека се a_1, a_2, …, a_{n_0} .

Земаме

$$\max\{\,|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |A-\varepsilon|, |A+\varepsilon|\} = K$$

Јасно е дека сите членови од низата (a_n) се во сегментот [–K, K] т.е.

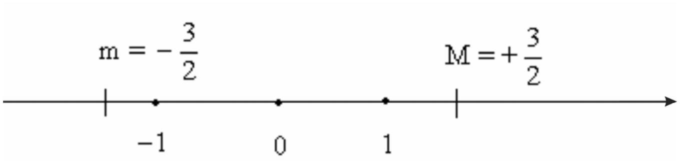
$$-K \le a_n \le +K \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$$

што значи дека низата е ограничена.

Со ова теоремата во целост е докажана.

Оваа теорема тврди дека од конвергентност следува ограниченост. Обратното, во општ случај, не важи т.е. од ограниченост не мора да следува конвергентност.

Пример 5: Низата (a_n), $a_n = (-1)^n$ е ограничена низа. Една долна меѓа е бројот $-\frac{3}{2}$, а една горна меѓа е бројот $+\frac{3}{2}$. Но знаеме дека за оваа низа $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ не постои т.е. оваа низа не е конвергентна низа.

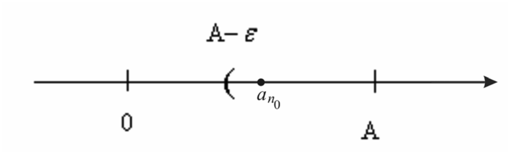


Значи, имаме пример на низа што е ограничена, а не е конвергентна низа.

Теорема 2 (за монотони и ограничени низи): Секоја монотоно растечка низа и ограничена од горе е и конвергентна низа; секоја монотоно опаднувачка низа што е ограничена од долу е исто така конвергентна низа.

Доказ: Нека (a_n) е монотоно растечка и ограничена низа од горе. Од ограниченоста на (a_n) од горе $\Rightarrow$ постои најмала горна меѓа т.е. постои $\sup a_n$ = A.

Значи, $a_n \le A \quad \forall n \in \mathbf{N}$.



Земаме ε>0 произволно мало. Бројот A–ε<A не е горна меѓа, бидејќи A=supa_n е најмала горна меѓа. Тоа значи дека постои член a_{n_0} од низата (a_n) што е на десно од A–ε т.е.

A–ε< a_{n_0}

Како низата (a_n) е монотоно растечка $\Rightarrow$ A–ε< a_{n_0} < a_{n_0+1}< a_{n_0+2} <… ≤ A < A+ε.

Значи во ε–околината (A–ε, A+ε) се наоѓаат членовите $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}$,... и нив ги има безброј. Надвор од оваа околина (A–ε, A+ε) бројот на членовите е конечен. Значи, бројот A е граница на низа (a_n) т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ = A$\in$ **R.**

Според тоа, низата (a_n) е конвергентна низа.

Слично се покажува и вториот дел од оваа теорема.

Накрај, да забележиме дека оваа теорема тврди да од монотоност и ограниченост следува конвергентност на низа т.е. дека постои $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, но колку е оваа граница теоремата не дава одговор.

Од примерите 1 и 3 следува дека низата $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ е монотоно растечка и ограничена од горе. Според оваа теорема 2 $\Rightarrow$ таа е конвергентна т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$ постои.

Од примерите 2 и 4 $\Rightarrow$ низата со општ член $a_n = \dfrac{1}{5^n}$ е монотоно опаднувачка и ограничена од долу $\Rightarrow$ е конвергентна т.е $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{5^n}$.

11.3 НЕКОИ ТЕОРЕМИ ЗА КОНВЕРГЕНТНИ НИЗИ

Дефиниција: Нека (a_n) ***и*** (b_n) ***се две дадени низи и*** $c \in$ ***R. Низата:***

а) (ca_n): $ca_1, ca_2, ca_3, \dots, ca_n, \dots$ ***се нарекува производ на низа*** (a_n) ***со реален број*** c ***;***

б) $(a_n + b_n)$: $a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3, \dots$ ***се нарекува збир на низите*** (a_n) ***и*** (b_n)***;***

в) $(a_n - b_n)$: $a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3, \dots$ ***се нарекува разлика на низите*** (a_n) ***и*** (b_n)***;***

г) $(a_n\, b_n)$: $a_1 b_1,\ a_2 b_2,\ a_3 b_3, \dots, a_n b_n, \dots$ ***се нарекува производ на низите*** (a_n) ***и*** (b_n)***;***

д) $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$: $\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \dfrac{a_3}{b_3}, \dots, \dfrac{a_n}{b_n}, \dots$ ***се нарекува количник на низите*** (a_n) ***и*** (b_n)***.***

Во случај на количник на две низи, $b_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$

Теорема 1: Ако $c \in \boldsymbol{R}$ ***и*** (a_n) ***и*** (b_n) ***се две конвергентни низи, тогаш конвергентни се и низите:*** (ca_n), $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n\, b_n)$ ***и*** $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ ***и притоа важат формулите:***

а) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

б, в) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

г) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\, b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, $\quad$ ($\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$)

Доказ:

а) (a_n) е конвергентна низа $\Rightarrow\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A} \in \mathbf{R} \Rightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0$ произволно мало, па според тоа и за $\dfrac{\varepsilon}{|c|} > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ т.ш. $\forall n > n_0$ важи $|a_n - \mathrm{A}| < \dfrac{\varepsilon}{|c|}$.

Имаме

$$|ca_n - c\,\mathrm{A}| = |c\,(a_n - \mathrm{A})| = |c| \cdot |a_n - \mathrm{A}| < \cancel{|c|} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{|c|}} = \varepsilon \qquad \forall n > n_0$$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\,\mathrm{A} = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Пример 1: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{n} = \dfrac{2}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = \dfrac{2}{3}\cdot 0 = 0$.

б, в) (a_n) е конвергентна низа $\Rightarrow\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A} \in \mathbf{R} \ \Rightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0$ произволно мало, па

според тоа и за $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ постои природен број n_1 т.ш. $\forall n > n_1$ важи $|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

(b_n) е конвергентна низа $\Rightarrow\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \mathrm{B} \in \mathbf{R} \ \Rightarrow$ за $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ постои природен број n_2 т.ш.

$\forall n > n_2$ важи $|b_n - B| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

За $\forall n > n_0 = \max\,\{n_1, n_2\}$, имаме

$$|\,(a_n + b_n) - (\mathrm{A}+\mathrm{B})| = |(a_n - \mathrm{A}) + (b_n - \mathrm{B})| \le |\,a_n - \mathrm{A}| + |\,b_n - \mathrm{B}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \mathrm{A} + \mathrm{B} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

За разликата од двете низи $(a_n - b_n)$ имаме:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n + (-1)\,b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}(-1)\,b_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_n + (-1)\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Пример 2: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2 + 3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 2 + 3\cdot 0 = 2$

Пример 3: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\cdot 0 = \dfrac{3}{2}$.

г) (a_n) е конвергентна низа $\Rightarrow\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

(b_n) е конвергентна низа $\Rightarrow\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. $\ \forall \varepsilon > 0$ произволно мало, имаме

$$|\,a_n\, b_n - AB\,| = |\,a_n\, b_n - Ab_n + Ab_n - AB\,| = |(a_n - A)\,b_n + A\,(b_n - B)| \le$$

$$\le |(a_n - A)\,b_n| + |\,A\,(b_n - B)| = |\,a_n - A\,|\cdot|\,b_n\,| + |\,A\,|\cdot|\,b_n - B\,|.$$

Низата (b_n) е конвергентна $\Rightarrow$ таа е и ограничена $\Rightarrow\ \exists K \in \mathbf{R} \wedge K > 0$ т.ш.

$$|b_n| \le K \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

(a_n) е конвергентна $\Rightarrow$ за $\dfrac{\varepsilon}{2K}>0$ постои природен број n_1 т.ш. $\forall n > n_1$ важи

$$\underline{|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2K}}.$$

(b_n) е конвергентна $\Rightarrow$ за $\dfrac{\varepsilon}{2|A|}>0$ постои природен број $n_2 \in \mathbf{N}$ т.ш. $\forall n > n_2$ важи

$$\underline{|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|A|}}.$$

Ставаме $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Од потцртаните неравенства, за $\forall n > n_0$ имаме

$$|a_n b_n - AB| \le \ldots \le |a_n - A||b_n| + |A||b_n - B| \le$$

$$\le |a_n - A| \cdot K + |A| \cdot |b_n - B| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\cancel{K}} \cdot \cancel{K} + \cancel{|A|} \cdot \frac{\varepsilon}{2\cancel{|A|}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Пример 4: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 0 \cdot 1 = 0.$

Специјално, ако $b_n = a_n$, имаме

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^2 = (\lim_{n\to\infty} a_n)^2.$$

Понатаму,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^3 = \lim_{n\to\infty}(a_n)^2 \cdot a_n = \lim_{n\to\infty}(a_n)^2 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n =$$

$$= (\lim_{n\to\infty} a_n)^2 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)^3.$$

Продолжувајќи го овој процес, добиваме

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(a_n)^k = (\lim_{n\to\infty} a_n)^k \qquad (\forall k \in \mathbf{N})}$$

Пример 5: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 = (\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n})^2 = 0^2 = 0.$

Пример 6: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{5n}\right)^8 = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{5n}\right)^8 = \left(\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5n})\right)^8 =$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^8 = \left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot 0\right)^8 = \left(\frac{2}{5}\right)^8.$$

Се покажува точноста и на формулата

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n} \qquad (k \in \mathbf{N})}$$

Навистина, ако ставиме

$$\sqrt[k]{a_n} = c_n \ /^k$$

$$a_n = (c_n)^k$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(c_n)^k$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (\lim_{n\to\infty} c_n)^k$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n} = \lim_{n\to\infty} c_n$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}\ .$$

Пример 7: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{n+2}{8n}} = \sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{8n}} = \sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4n})} =$

$$= \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot 0} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}.$$

д) Правилото за лимес од количник на две низи нема да го покажеме, а истото ќе го илустрираме на два примера.

Пример 8: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{5n-4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cancel{n}(2+\frac{3}{n})}{\cancel{n}(5-\frac{4}{n})}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{3}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(5-\frac{4}{n})}=$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}5-4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{2+3\cdot 0}{5-4\cdot 0}=\frac{2}{5}.$$

Пример 9: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+5}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cancel{n}(4+\frac{5}{n})}{n^{\cancel{2}}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(4+\frac{5}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}n(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}=$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}4+5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}=\frac{4+5\cdot 0}{+\infty\cdot(\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2})}=\frac{4}{+\infty\cdot(1+0+0)}=\frac{4}{+\infty\cdot 1}=\frac{4}{+\infty}=0.$$

Забелешка: Изнесените операциски правила овозможуваат да при барање гранична вредност на низи се постапува попрактично. Тоа ќе го илустрираме на последниве два примера:

Пример 10: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{5n-4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cancel{n}(2+\cancel{\frac{3}{n}}^{0})}{\cancel{n}(5-\cancel{\frac{4}{n}}^{0})}=\dfrac{2}{5}.$

Пример 11: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+5}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cancel{n}(4+\cancel{\frac{5}{n}}^{0})}{n^{\cancel{2}}(1+\cancel{\frac{1}{n}}^{0}+\cancel{\frac{1}{n^2}}^{0})}=\dfrac{4}{(+\infty)\cdot 1}=\dfrac{4}{+\infty}=0.$

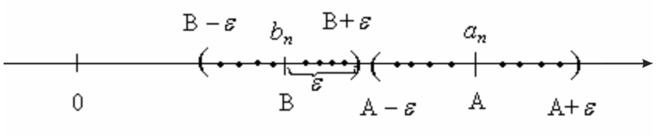
Теорема 2: Ако (a_n) и (b_n) се две дадени низи т.ш.

$$a_n \le b_n \qquad \forall n\in \boldsymbol{N},$$

тогаш

$$\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Доказ: Нека ставиме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$= A и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$= B. Да претпоставиме дека B<A.



Да земеме $\varepsilon = \dfrac{A-B}{3}$. Од $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$= A $\Rightarrow$ за ова $\varepsilon = \dfrac{A-B}{3}$>0 постои природен број n_1

т.ш. $\forall n > n_1$ важи $|a_n -$ A$|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n -$ A $<+\varepsilon$

$$\text{A}-\varepsilon < a_n < \text{A}+\varepsilon$$

Слично, од $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$= B $\Rightarrow$ за $\varepsilon = \dfrac{B-A}{3}$>0 постои природен број n_2 т.ш.

$\forall n > n_2$ важи B$-\varepsilon < b_n <$ B$+\varepsilon$.

За $\forall n > n_0$ = max $\{n_1, n_2\}$, имаме

B $-\varepsilon < b_n <$B$+\varepsilon <$A $-\varepsilon < a_n <$A$+\varepsilon$.

Значи $\forall n > n_0$ важи $b_n < a_n$ т.е. имаме членови за коишто важи $b_n < a_n$ што противречи на условот од теоремата да $a_n \le b_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Оваа противречност кажува дека направената претпоставка B<A не е точна $\Rightarrow$ A$\le$B т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, што требаше и да се докаже.

Нагледно: $a_n \le b_n$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ $\Rightarrow$ $a_1 \le b_1$

$$a_2 \le b_2$$
$$a_3 \le b_3$$
$$\vdots$$
$$a_n \le b_n$$
$$\downarrow \; \vdots \; \downarrow$$
$$\text{A} \le \text{B}.$$

Треба да забележиме дека тврдењето од теоремата важи и во случај кога во условот од теоремата имаме $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$. За тоа сведочи следниот

Пример 12: $a_n = \dfrac{n}{n+1} < 1 = b_n$.

Имаме $a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$ и притоа

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \text{ и } \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Теорема 3 (за сендвич низа): Ако (a_n) и (b_n) се две конвергентни низи т.ш.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A \text{ и ако } a_n \le x_n \le b_n \text{ (односно } a_n < x_n < b_n\text{)} \quad (\forall n \in N),$$

тогаш и низата (x_n) е конвергентна низа и притоа $\lim_{n\to\infty} x_n = A$.

Доказ: Од неравенството

$$a_n \le x_n \le b_n \qquad (\forall n \in \mathrm{N})$$

и претходната теорема 2 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$

$$\mathrm{A} \le \lim_{n\to\infty} x_n \le \mathrm{A}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \mathrm{A}.$$

Нагледно,

$$a_n \le x_n \le b_n \quad (\forall n \in \mathbf{N}) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} a_1 \le x_1 \le b_1 \\ a_2 \le x_2 \le b_2 \\ a_3 \le x_3 \le b_3 \\ \vdots \\ a_n \le x_n \le b_n \\ \vdots \\ \searrow \ \downarrow \ \swarrow \\ \mathrm{A} \end{array}$$

11.4 АРИТМЕТИЧКА НИЗА (ПРОГРЕСИЈА)

Дефиниција 1: Низата

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots$$

во којашто разликата помеѓу било кој нејзин член, со исклучок на првиот, и претходниот е една иста се нарекува аритметичка низа.

Имаме

$$a_2 - a_1 = d \;\Rightarrow\; a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 - a_2 = d \;\Rightarrow\; a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 - a_3 = d \;\Rightarrow\; a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \Rightarrow a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Бројот d се нарекува **диференција** или **разлика** на аритметичката низа.

Значи, општиот член на аритметичката низа со прв член a_1 и диференција d е

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Да земеме три последователни членови

$$a_{n-1} = a_1 + (n-2)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{n+1} = a_1 + nd$$

на аритметичка низа (a_n). Имаме

$$a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_1 + (2n-2)d$$

$$a_{n-1} + a_{n+1} = 2[a_1 + (n-1)d]$$

$$a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Според тоа, секој член на аритметичка низа, со исклучок на првиот, е аритметичка средина од неговите соседни членови.

За природа на аритметичка низа (a_n), во смисол на нејзина конвергенција – дивергенција, имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(a_1+(n-1)d) = \lim_{n\to\infty} a_1 + d\lim_{n\to\infty}(n-1) =$$

$$= a_1 + d\cdot(+\infty) = a_1 + \begin{cases} +\infty & за \;\; d>0 \\ -\infty & за \;\; d<0 \end{cases} = \begin{cases} +\infty & за \;\; d>0 \\ -\infty & за \;\; d<0 \end{cases}$$

Теорема 1: Секоја аритметичка низа (a_n ***) е дивергентна низа.***

За сумата S_n на првите n членови на аритметичка низа имаме

$$+\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad 2S_n = \underbrace{(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\ldots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)}_{n \;\; загради}$$

Како

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_1 + (n-2)d = a_1 + [a_1 + (n-1)d] = a_1 + a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2d + a_1 + (n-3)d = a_1 + [a_1 + (n-1)d] = a_1 + a_n$$

$$a_4 + a_{n-3} = a_1 + 3d + a_1 + (n-4)d = a_1 + [a_1 + (n-1)d] = a_1 + a_n,$$

$$\vdots$$

тоа сите загради се исти и еднакви на $a_1 + a_n$, поради што

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Земајќи ја в предвид формулата за општ член на аритметичка низа, формулата за S_n станува

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}$$

Пример 1: Дадена е низата

2, 5, 8, 11,...

Определи го:

а) сто и петтиот член на низата

б) општиот член на оваа низа.

Решение:

а) $a_1 = 2$, $d = 3$, поради што

$$a_{105} = 2+(105-1)3=2+104\cdot 3=2+312=314$$

б) $a_n = 2+(n-1)3=3n-1$

Пример 2: а) Најди го збирот на првите педесет и четири членови на низата

1, 5, 9, 13,...

б) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{5n^2+n+1}$

Решение:

а) Низата е аритметичка со прв член $a_1 = 1$ и диференција $d = 4$

$$\Rightarrow S_{54} = \frac{54}{2}\left[2\cdot 1+(54-1)\cdot 4\right] = 27\cdot\left[2+212\right]=27\cdot 214=5778.$$

б) Како $1+3+5+\ldots+(2n-1)=S_n=\dfrac{n}{2}[2\cdot 1+(n-1)\cdot 2]=n^2$, тоа

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+5+...+(2n-1)}{5n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{5n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(5+\cancel{\frac{1}{n}}^{0}+\cancel{\frac{1}{n^2}}^{0})}=\frac{1}{5}.$$

Пример 3: Месечната потрошувачка на сулфурна киселина (H_2SO_4) во некој хемиски комбинат во изминатава календарска година се одвивала по закон на аритметичка низа. Ако се знае дека во мај минатата година биле потрошени $5200l$, а во август $4600l$, тогаш пресметај:

а) Колку l H_2SO_4 биле потрошени во јануари минатата година;

б) Колку l H_2SO_4 биле потрошени во текот на целата мината година;

в) Ако трендот на потрошувачката продолжил и во оваа година, тогаш колку l H_2SO_4 ќе бидат потрошени во ноември оваа година?

Решение: Нека

a_1 l е потрошувачка на H_2SO_4 во јануари минатата година

a_2 l е потрошувачка на H_2SO_4 во февруари минатата година

a_3 l е потрошувачка на H_2SO_4 во март минатата година

$\vdots$

a_{12} l е потрошувачка на H_2SO_4 во декември минатата година.

По услов на задачата, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ се први 12 членови на аритметичка низа

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_{12}, ..., a_n, ...$$

а) Ако со d ја означиме диференцијата на оваа низа, тогаш имаме:

$$\begin{cases} a_5 = 5200 \\ a_8 = 4600 \end{cases} \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 5200 \\ a_1 + 7d = 4600 \end{cases}$$

Со решавање на овој систем од две равенки со две непознати, добиваме

$$a_1 = 6000, \quad d = -200$$

Значи, во јануари минатата година биле потрошени $6000 l$ H_2SO_4.

б) Бројот на потрошените l на H_2SO_4 во изминатата година е

$$S_{12} = \frac{12}{2}\left[2 \cdot 6000 + (12-1) \cdot (-200)\right] = 58000\ l$$

в) Во ноември оваа година ќе бидат потрошени

$$a_{23} = 6000 + (23-1) \cdot (-200) = 1600\ l \text{ на } H_2SO_4.$$

11.5 ГЕОМЕТРИСКА НИЗА (ПРОГРЕСИЈА)

Дефиниција 1: Низата

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots$$

во којашто количникот на било кој нејзин член, со исклучок на првиот, и неговиот претходник е еден ист се нарекува геометриска низа.

$$\frac{a_2}{a_1} = q \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1\, q$$

$$\frac{a_3}{a_2} = q \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_2\, q = a_1\, q^2$$

$$\frac{a_4}{a_3} = q \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_3\, q = a_1\, q^3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad \Rightarrow \quad a_n = a_{n-1}\, q = a_1\, q^{n-1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Бројот q се нарекува **количник** на геометриска низа.

Значи, општ член на геометриска низа со прв член a_1 и количник q е

$$\boxed{a_n = a_1\, q^{n-1}}$$

Даземеме три последователни членови a_{n-1}, a_n и a_{n+1} на геометриска низа

$$a_{n-1} = a_1\, q^{n-2}$$

$$a_n = a_1\, q^{n-1}$$

$$a_{n+1} = a_1\, q^n$$

Имаме

$$a_{n-1}\, a_{n+1} = a_1\, q^{n-2}\, a_1\, q^n = a_1^2\, q^{2n-2} = (a_1\, q^{n-1})^2 = (a_n)^2$$

$$\Rightarrow \qquad a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}\ .$$

Според тоа, секој член од геометриска низа, со исклучок на првиот, е геометриска средина од неговите два соседни членови. Од оваа особина произлегува и називот геометриска низа.

За природата на геометриска низа, во смисол на нејзина конвергенција – дивергенција, имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_1\, q^{n-1} = a_1 \lim_{n\to\infty} q^{n-1},$$

што значи дека природата на геометриска низа зависи од количникот q.

Се покажува дека

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & за \quad -1<q<1 \\ 1 & за \quad q=1 \\ +\infty & за \quad q>1 \\ не\, постои & за \quad q\le -1 \end{cases}$$

Од последните две равенства за $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \lim_{n\to\infty} q^{n-1} = a_1 \cdot \begin{cases} 0 & за \quad -1<q<1 \\ 1 & за \quad q=1 \\ +\infty & за \quad q>1 \\ не\, постои & за \quad q\le -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & за \quad -1<q<1 \\ a_1 & за \quad q=1 \\ \pm\infty & за \quad q>1 \\ не\, постои & за \quad q\le -1 \end{cases}$$

Теорема 1: Геометриска низа конвергира за $-1< q\le 1$***, а дивергира за*** $q\in(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$***.***

За збирот S_n на првите n–членови од геометриска низа со прв член a_1 и количник q имаме:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$-\begin{cases} S_n = a_1 + \cancel{a_1 q} + \cancel{a_1 q^2} + \ldots + \cancel{a_1 q^{n-1}} \\ qS_n = \cancel{a_1 q} + \cancel{a_1 q^2} + \ldots + \cancel{a_1 q^{n-1}} + a_1 q^n \end{cases}$$

$$S_n - q\, S_n = a_1 - a_1\, q^n$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \qquad (q \neq 1)}$$

Примери:

1) Определи го сто и петтиот член на низата

2, 6, 18, 54,…

Решение: Ова е геометриска низа со $a_1=2$, $q=3$

$$\Rightarrow \qquad a_{105} = 2\cdot 3^{104}$$

2) Пресметај го збирот на првите дваесет и три членови на низата од претходниот пример.

Решение:

$$S_{23} = a_1 \frac{1-q^{23}}{1-q} = 2\cdot\frac{1-3^{23}}{1-3} = \cancel{2}\cdot\frac{1-3^{23}}{-\cancel{2}} = 3^{23}-1$$

3) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{5^n}$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0, \text{ бидејќи } -1 < q = \frac{1}{5} < 1.$$

4) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = ?$

$$\lim_{n\to\infty} 3^n = +\infty, \text{ бидејќи } q=3>1.$$

5) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{n+1}}{2^{n-1}+3^{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n\cdot 3}{2^n\cdot 2^{-1}+3^n\cdot 3^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{3^n}\left(\frac{2^n}{3^n}+3\right)}{\cancel{3^n}\left(\frac{2^n}{3^n}\cdot 2^{-1}+3^2\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n}^{\,0}+3}{\frac{1}{2}\cdot\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n}^{\,0}+9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}[1+(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})^3+\ldots+(-\frac{1}{2})^n]=$

$$=\lim_{n\to\infty}1\cdot\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n+1}}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}.$$

7) Дадена е низа со општ член $a_n=0{,}4\underbrace{999...9}_{n}$.

а) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

б) Определи ги членовите од оваа низа за кои што разликата помеѓу нив и границата по апсолутна вредност е помала од 10^{-7}.

Решение:

а) Овој дел од задачата може да се реши на два начина

Прв начин: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

$$\lim_{n\to\infty}0{,}4\underbrace{999...9}_{n}=A$$

$$0{,}4\underbrace{999...9...}_{\infty}=A$$

т.е. $A=0{,}4(9)$ – периодичен децимален број

Потсети се на премин од периодичен децимален број на рационален број (види предавање 4. од оваа глава). Имаме

$$A=0{,}4999...$$

$$10A=4{,}999...$$

$$\underline{100A=49{,}999...}$$

$$\Rightarrow\quad 100A-10A=45$$

$$90A=45$$

$$A=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}0{,}4\underbrace{999...9}_{n}=A=\frac{1}{2}.$$

Втор начин: Општиот член на низата ќе го запишеме во поинаков облик. Имаме

$$a_n = 0{,}4\underbrace{999...9}_{n} = 0 + \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^{n+1}} =$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = \frac{4}{10} + \frac{9}{100}\cdot 1\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} =$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{9}{100}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{\frac{9}{10}} = \frac{4}{10} + \frac{1-\frac{1}{10^n}}{10} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{10^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \qquad a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{10^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} 10^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{10^{+\infty}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

б) a_n=? т.ш. $|a_n - A| < 10^{-7}$.

Имаме $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{10^{n+1}} - \frac{1}{2}\right| < 10^{-7}$

$$\left|-\frac{1}{10^{n+1}}\right| < \frac{1}{10^7}$$

$$\frac{1}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^7}$$

$$10^7 < 10^{n+1} \quad \text{т.е.} \quad 10^{n+1} > 10^7$$

$$\Rightarrow \qquad n+1 > 7 \quad \text{т.е.} \quad n > 6$$

Според тоа, бараните членови имаат реден број поголем од 6 $\Rightarrow$ бараните членови се $a_7, a_8, a_9, \ldots$

11.6 ПРИРОДНИ НИЗИ И БРОЈОТ e

Низите со општ член

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{и} \quad b_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

се познати под име **природни низи**. Низата (a_n) се нарекува **низа на природно растење**, а низата (b_n) се нарекува **низа на природно изумирање**.

Ќе се задржиме на првата од овие низи (a_n).

$$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 < 3$$

$$a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25 < 3$$

$$a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2{,}36 < 3$$

$$a_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2{,}48 < 3$$

$$\vdots$$

$$a_{10} = \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = \left(\frac{11}{10}\right)^{10} = 2{,}68 < 3$$

$$\vdots$$

$$a_{100} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = \left(\frac{101}{100}\right)^{100} = 2{,}71 < 3$$

$$\vdots$$

Гледаме дека сите испишани членови на низата (a_n) се помали од 3. Општо, се покажува дека и секој член на низата (a_n) е помал од 3, т.е. дека

$$a_n < 3 \quad (\forall n \in \mathbf{N}),$$

што значи дека низата (a_n) е ограничена од горе. Една горна меѓа е бројот 3.

Од друга страна, од испишаните членови се гледа дека тие споро се зголемуваат. Се покажува дека

$$a_n < a_{n+1} \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

т.е. дека низата (a_n) е монотоно растечка низа.

Значи, (a_n) е монотоно растечка низа што е ограничена од горе, па според теоремата за монотони и ограничени низи следува дека (a_n) е конвергентна низа

$$\Rightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in \mathbf{R}.$$

Оваа гранична вредност се означува со e т.е.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

Од $2 \le a_n < 3$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} 2 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} 3$$

$$2 \le e \le 3.$$

Добиено е дека бројот e=2,7182… има безброј децимали при што нема повторување на една или група од неколку цифри. Тоа значи дека бројот

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

е ирационален број.

За низата $b_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ на природно изумирање, имаме:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1$$

Согласно Бернулиевото неравенство

$$(1+x)^n \ge 1+nx \qquad (\forall x > -1)$$

имаме

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1+(-\frac{1}{n})^2\right)^n \geq 1+n\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1-\frac{1}{n}$$

Според тоа

$$1-\frac{1}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 \ / : \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\frac{1-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\frac{1}{e} \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Значи, и низата (b_n) на природно изумирање е конвергентна низа со граница e^{-1}.

Забелешка 1: До граничната вредност на низата на природното изумирање формално може да се дојде на следен начин:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = e^{-1}$$

Забелешка 2: Граничната вредност

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

се користи при неопределеност од облик 1^{∞}.

Пример 1: Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3n-5}\right)^{\frac{n^2}{2n+1}}$

Решение: Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{3n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\left(3+\cancel{\frac{2}{n}}^{0}\right)}{\cancel{n}\left(3-\cancel{\frac{5}{n}}^{0}\right)}=\frac{3}{3}=1$$

и
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}\left(2+\cancel{\frac{1}{n}}^{0}\right)}=\frac{+\infty}{1}=+\infty\ ,$$

тоа за бараниот limes имаме

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-5}\right)^{\frac{n^2}{2n+1}}\overset{1^\infty}{=}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n+2}{3n-5}-1\right)^{\frac{n^2}{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n+2-3n+5}{3n-5}\right)^{\frac{n^2}{2n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{3n-5}\right)^{\frac{n^2}{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n-5}{7}}\right)^{\frac{n^2}{2n+1}\cdot\frac{3n-5}{7}\cdot\frac{7}{3n-5}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n-5}{7}}\right)^{\frac{3n-5}{7}}\right]^{\frac{7n^2}{(2n+1)(3n-5)}}=$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n-5}{7}}\right)^{\frac{3n-5}{7}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7\cancel{n^2}}{\cancel{n}(2+\cancel{\frac{1}{n}}^{0})\cancel{n}(3-\cancel{\frac{5}{n}}^{0})}}=e^{\frac{7}{6}}=\sqrt[6]{e^7}=e\sqrt[6]{e}\ .$$

Пример 2: Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{4n-5}\right)^{\frac{n^2}{2n+1}}$

Решение: Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\left(3+\cancel{\frac{2}{n}}^{\,0}\right)}{\cancel{n}\left(4-\cancel{\frac{5}{n}}^{\,0}\right)}=\frac{3}{4}\ \text{ и }\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n+1}=+\infty\,,$$

тоа за бараниот limes имаме $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{4n-5}\right)^{\frac{n^2}{2n+1}}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{+\infty}=0$.

Пример 3: Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n+2}{3n-5}\right)^{\frac{n^2}{2n+1}}$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9n+2}{3n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\left(9+\cancel{\frac{2}{n}}^{\,0}\right)}{\cancel{n}\left(3-\cancel{\frac{5}{n}}^{\,0}\right)}=\frac{9}{3}=3 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n+1}=+\infty$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n+2}{3n-5}\right)^{\frac{n^2}{2n+1}}=3^{+\infty}=+\infty\,.$$

Пример 4: Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n+2}{3n-5}\right)^{\frac{n^2}{2n^2+1}}$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9n+2}{3n-5}=3 \qquad \text{и} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n+2}{3n-5}\right)^{\frac{n^2}{2n^2+1}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\,.$$

Задача 1: Пресметај

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^{\frac{3n^2-1}{2n+1}}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n+1}{5n^2+n+1}\right)^{\frac{3n^2-1}{2n+1}}$ в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^{\frac{3n^2-1}{2n+1}}$.

Задача 2: Со математичка индукција докажи дека низата (a_n) на природно растење е ограничена.

Задача 3: Со математичка индукција докажи дека низата (a_n) на природно растење е монотоно растечка низа.

РЕАЛНИ ФУНКЦИИ ОД ЕДНА РЕАЛНА НЕЗАВИСНО ПРОМЕНЛИВА II

1. ПОИМ ЗА РЕАЛНА ФУНКЦИЈА

Дефиниција 1: ***Нека D,E$\subseteq$R. Секое пресликување f:D$\rightarrow$E се нарекува реална функција од една реална независно променлива величина.***

Значи, $(\forall x\in D)(\exists!\, y\in E)$ ***т.ш.*** $x \xrightarrow{f} y$

$$f: x \rightarrow y$$

$$y=f(x).$$

Според тоа, функцијата f е правило според кое на секој елемент $x\in D$ му придружуваме само еден елемент $y\in R$.

x се нарекува **независно променлива**

y се нарекува **зависно променлива**

D - **домен** или **дефинициона област** на функцијата. Ако сакаме да нагласиме дека станува збор за дефинициона област на функцијата y=f(x), пишуваме D_f .

V_f =f(D)={f(x)| $x\in D$} - **множество од вредности** на функција или **кодомен**.

Забелешка: Често пати поимот за зависно променлива се поистоветува со поимот за функција, во смисол што наместо да кажеме y зависи од x, велиме y е функција од x.

Пример 1: Пресметај $f\left(\frac{1}{2}\right)$, f(–1) и f(0), ако $y=\frac{x+1}{2x+3}$. Дали $x=-\frac{3}{2}\in D_f$?

Решение:

$$f(x)=\frac{x+1}{2x+3}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}+1}{2\cdot\frac{1}{2}+3}=\frac{\frac{3}{2}}{4}=\frac{3}{8},\qquad f(-1)=\frac{-1+1}{2(-1)+3}=\frac{0}{1}=0,\qquad f(0)=\frac{1}{3}$$

Како $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\dfrac{-\frac{3}{2}+1}{2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+3}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{0}$ и во **R** нема смисол делење со 0, тоа $x=-\frac{3}{2}\notin D_f$.

Една функција може да биде зададена на неколку начини:

1. **Аналитички начин** (со формула)

а) во **експлицитен** облик б) во **имплицитен** облик в) во **параметарски** облик

$$y=f(x) \qquad\qquad F(x,y)=0 \qquad\qquad \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\varphi(t) \end{cases},\ t \text{ - параметар}$$

Пример 2:

а) $y=\dfrac{x+1}{2x+3}$ б) $y=x\ln(1-x)$ в) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

г) $x^2+y=0$ д) $x\ln x-y=0$

ѓ) $\begin{cases} x=1-t \\ y=2t+t^2 \end{cases}$ е) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$

Се ова се примери на аналитички зададени функции при што примерите а), б) и в) се во експлицитен облик, примерите г) и д) во имплицитен облик и ѓ) и е) во параметарски облик;

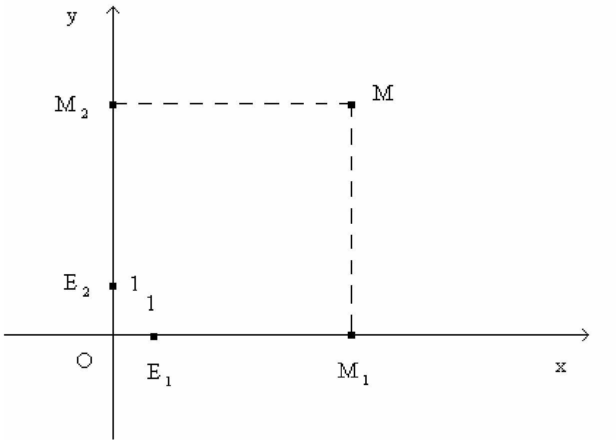
2. **Табеларен начин** (со табела)

x	x_1	x_2	x_3	• • •
f(x)	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	• • •

3. **Графички начин** (со график).

Дефиниција 2: Множеството Γ_f={(x, f(x))| $x \in D_f$}$\subseteq \mathbf{R}^2$ се нарекува график на функцијата y=f(x).

Во една рамнина да率 земеме две взаемно нормални прави, чија што пресечна точка ќе ја означиме со 0. Едната права ќе ја земеме во хоризонтална положба и истата ќе ја ориентираме со нанесување на единечна отсечка $\overline{OE_1}$=1 на десно од точката 0. Со тоа оваа права станува бројна оска која што ќе ја наречеме **апсцисна оска** или x**–оска**. Другата права, што е во вертикална положба, исто така ќе ја ориентираме со земање на единечна отсечка $\overline{OE_2}$=1 над точката 0. Со тоа и оваа вертикална права станува бројна оска што ќе ја викаме **ординатна оска** или **y–оска**. По таков начин е конструиран таканаречен **правоаголен Декартов координатен систем** во рамнина XOY. Точката 0 се вика **координатен почеток**.



Произволно да земеме еден елемент (a, f(a))$\in \Gamma_f$. На првата компонента a од оваа подредена двојка, според аксиомата на Кантор, на x–оската одговара само една точка M_1. Според споменатата аксиома и на втората компонента f(a) од подредената двојка (a, f(a)) на y–оската одговара само една точка M_2. Со повлекување на права низ M_1 паралелна со y–оската и на права низ M_2 паралелна со x–оската, во пресекот на овие две прави се добива точката M. По таков начин на секој елемент (a, f(a))$\in \Gamma_f$ му придружуваме само по една точка M од XOY–рамнината. Велиме точката M има координати a и f(a) и пишуваме M(a, f(a)). Првата компонента a се нарекува **апсциса** на точката M, а втората компонента f(a) се нарекува **ордината** на точката M.

Дефиниција 3: Геометриско место на сите точки M(x, f(x)), при што

(x, f(x))$\in \Gamma_f$ се нарекува крива определена со функцијата y=f(x).

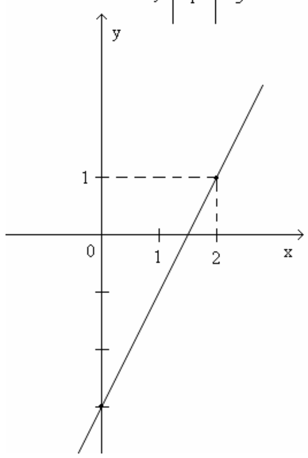
Забелешка: Крива определена со функцијата y=f(x) е геометриски претставник на графикот на функцијата y=f(x). Треба да забележиме дека овие два поима се поистоветуваат. Кога ќе кажеме график на функција автоматски мислиме на кривата определена со таа функција и обратно.

Пример 3: Конструирај го графикот на линеарната функција y=$2x-3$

Решение:

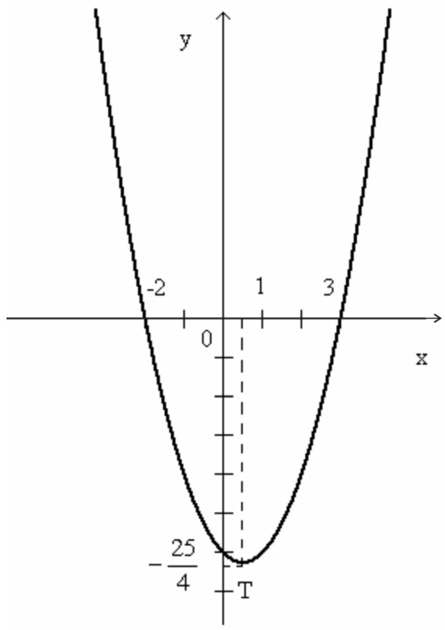
Општ облик на **линеарна функција** е **y=**$ax+b$, $a,b\in$ **R**. Дефинициона област е $D_f=(-\infty,+\infty)$=**R**. Нејзин график е **права**, поради што за негова конструкција доволно е да знаеме две негови точки.

x	2	0
y	1	–3



Пример 4: Нацртај график на квадратната функција y=x^2-x-6

Решение: Општ облик на **квадратна функција** е **y=**ax^2+bx+c, $a,b,c\in$ **R**. Дефинициона област е $D_f=(-\infty,+\infty)$. Нејзин график се нарекува **парабола**. За да се конструира параболата доволно е да се определи: теме на парабола $T\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, пресеци со координатни оски и отворот на параболата (a>0 отворот е нагоре, a<0 отворот е надолу).



Во овој пример $a=1$, $b=-1$, $c=-6$, поради што за координати на теме имаме

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2},\ \frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot 1\cdot(-6)-(-1)^2}{4\cdot 1}=-\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{T}\left(\frac{1}{2},-\frac{25}{4}\right)$$

Парабола сече x–оска во точки за коишто

$$\text{y}=0 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}$$

$$x_1=-2,\ x_2=3$$

Парабола сече y–оска во точка за којашто $x=0 \Rightarrow \text{y}=0^2-0-6=-6$

Параболата со отвор е свртена нагоре, бидејќи $a=1>0$.

Пример 5: Графички претстави ги експоненцијалните функции $\text{y}=2^x$ и $\text{y}=2^{-x}$.

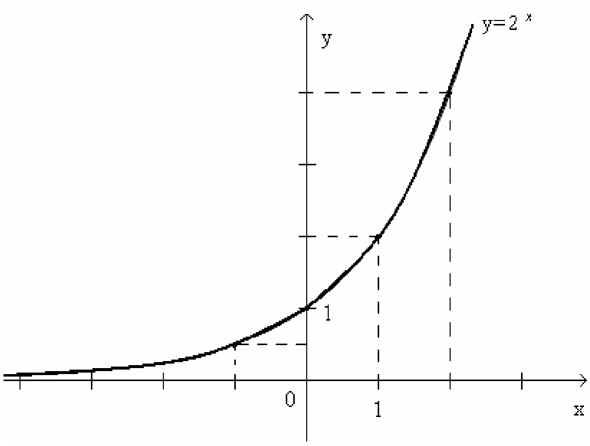
Решение: Општ облик на **експоненцијална функција** е **y=**a^x, $a>0$. $\mathrm{D}_f=(-\infty,+\infty)$. За конструирање на график на експоненцијална функција составуваме табела.

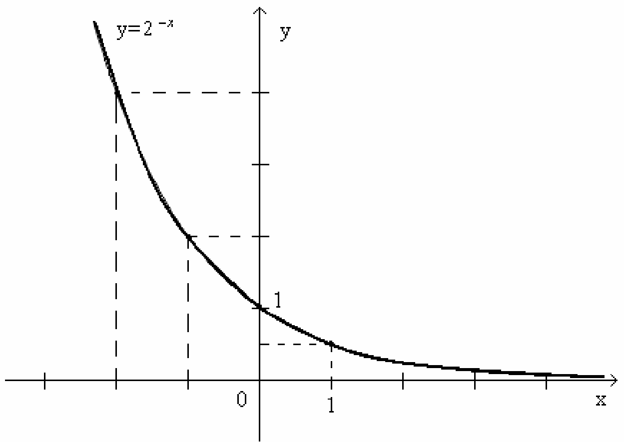
$\text{y}=2^x$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

$\text{y}=2^{-x}$ т.е. $\text{y}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$





Пример 6: Да се конструираат графиците на логаритамските функции y=$\log_2 x$ и y=$\log_{\frac{1}{2}} x$.

Да се најде **logaritam** од број b при основа a>0 (ознака $\log_a b$) значи да се најде број m т.ш. a степенуван на бројот m да е еднаков на бројот b т.е.

$$\boxed{\log_a b = m \Leftrightarrow a^m = b}$$

a се нарекува **основа на логаритам**

b се нарекува **логаритманд**

m се нарекува **вредност на логаритам** од b при основа a

1) $\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$ 2) $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

3) $\log_a A^m = m \log_a A$ 4) $\log_a a^m = m$

Треба да забележиме дека при логаритам со основа 10 наместо $\log_{10} b$ пишуваме $\log b$ (т.е. основата не се пишува), а при логаритам со основа e наместо $\log_e b$ пишуваме $\ln b$.

Општ облик на **логаритамска функција** е **y=**$\log_a x$. Дефинициона област е D$_f$ =$(0,+\infty)$. При конструирање на график составуваме табела при што за независно променлива x земаме броеви од облик $x = a^m$. Зошто?

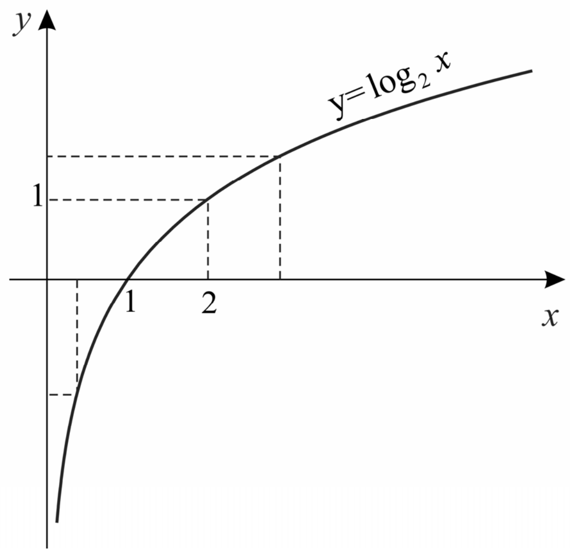
Во нашиот пример имаме:

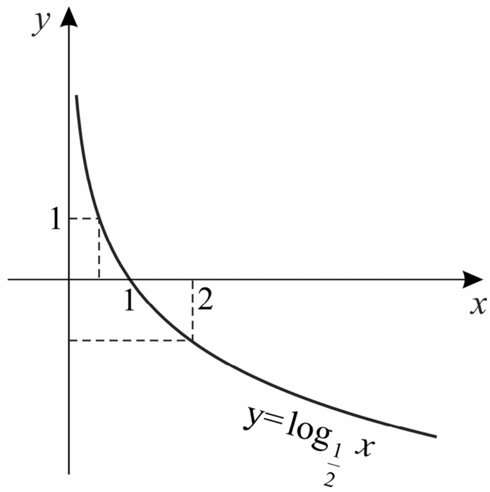
$y = \log_2 x$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	−3	−2	−1	0	1	2	3

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	3	2	1	0	−1	−2	−3





Задача 1: Конструирај ги графиците на следниве функции:

а) $y = e^x$ б) $y = e^{-x}$ в) $y = -e^x$

г) $y = \ln x$ д) $y = -\ln x$.

Забелешка: За e земете приближна вредност $e \approx 2{,}7$.

Забелешка: Во случај кога функцијата f е зададена аналитички, најчесто не е дадена нејзината дефинициона област D_f. Во тие случаи, од самата формула, самите треба да ја определиме D_f. Притоа под D_f се подразбира множество од сите реални броеви што може да ги прими независно променливата x за коишто вредностите на функцијата се исто така реални броеви.

Задача 2: Определи ја дефинициoната област на функцијата:

1) $y=\dfrac{5x+1}{2x+3}$ 2) $y=\dfrac{x}{x^2+x-6}$ 3) $y=\dfrac{3x-1}{x^2+4}$

4) $y=\sqrt{x^2+5x+4}$ 5) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x-6}}$ 6) $y=\sqrt{\dfrac{2x-3}{3x+2}}$

7) $y=\dfrac{x^2+1}{x}+\sqrt{4-x^2}$ 8) $y=\log_3(2-5x)$ 9) $y=\ln(-x^2+7x-12)$

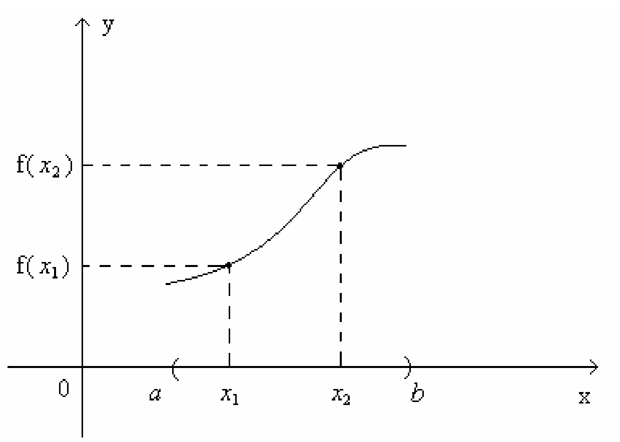
10) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 11) $y=\ln(2+3x)+\sqrt{9-x^2}$

2. МОНОТОНИ И ОГРАНИЧЕНИ ФУНКЦИИ

Дефиниција 1: За функцијата y=f(x) велиме дека е монотоно растечка функција во интервалот $(a,b)\subseteq D_f$, ако

$$(\forall x_1,x_2\in(a,b)\ \wedge\ x_1<x_2)$$

важи $f(x_1)<f(x_2)$.

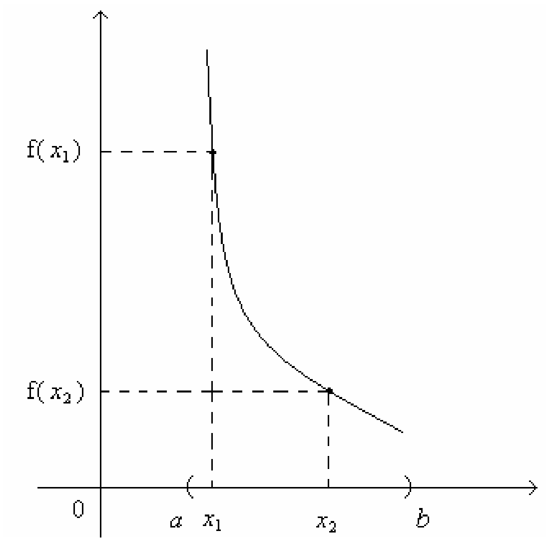


Дефиниција 2: За функцијата y=f(x) велиме дека е неопаднувачка функција во интервалот $(a,b)\subseteq D_f$, ако

$$(\forall x_1,x_2\in(a,b)\ \wedge\ x_1<x_2)\ \textbf{\textit{важи}}\ f(x_1)\le f(x_2).$$

Дефиниција 3: За функцијата y=f(x) велиме дека е монотоно опаднувачка функција во интервалот $(a,b)\subseteq \boldsymbol{D}_f$***, ако***

$(\forall x_1, x_2 \in (a,b) \ \wedge \ x_1 < x_2)$ ***важи*** $f(x_1)>f(x_2)$.

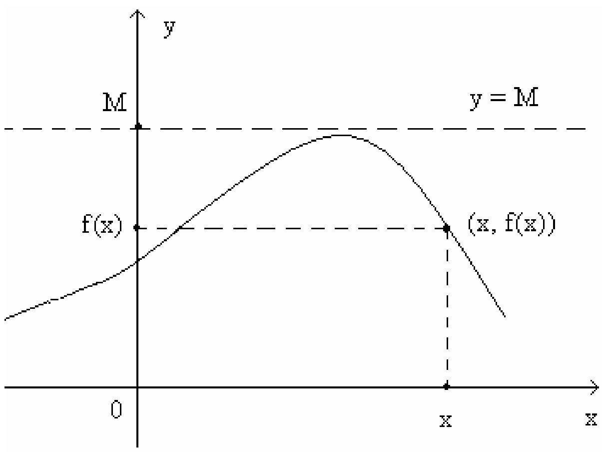


Дефиниција 4: За функцијата y=f(x) велиме дека е нерастечка функција во интервалот $(a,b)\subseteq \boldsymbol{D}_f$***, ако***

$$(\forall x_1, x_2 \in (a,b) \ \wedge \ x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2).$$

Дефиниција 5: За функцијата y=f(x) велиме дека е ограничена функција од горе, ако постои реален број M т.ш.

$$f(x)\leq M \qquad (\forall x\in \boldsymbol{D}_f).$$

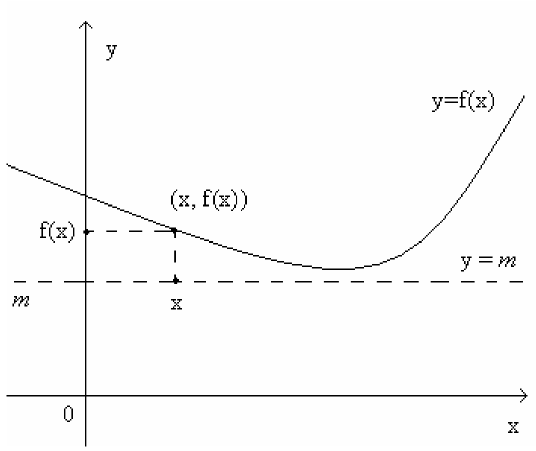


Геометриски тоа значи дека графикот на функцијата не смее да отиде над правата y=M. Најмногу што може е да ја допре споменатата права.

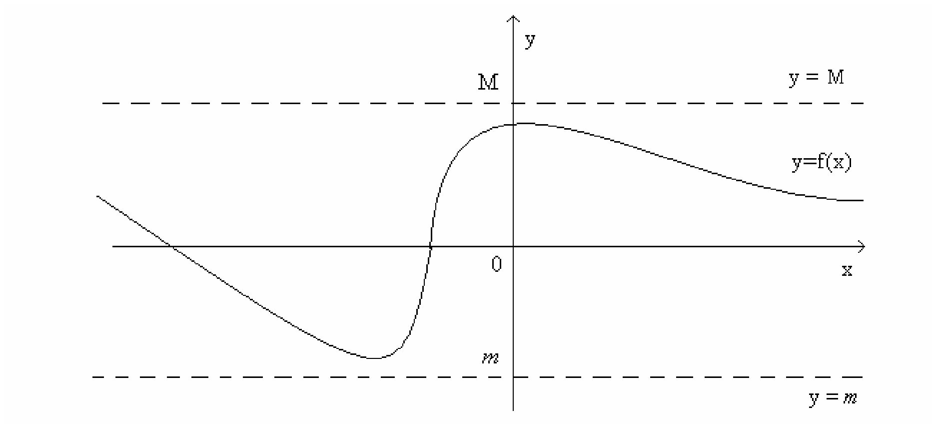
Дефиниција 6: За функцијата y=f(x) велиме дека е ограничена функција од долу, ако постои реален број m ***т.ш.***

$$m \leq f(x) \qquad (\forall x \in D_f).$$

Геометриски ова значи дека графикот на функцијата е целосно над правата $y=m$. Најмалку што може е да ја допре споменатата права.



Дефиниција 7: Функцијата y=f(x) што е ограничена и од горе и од долу се нарекува ограничена функција.



Геометриски, графикот целосно се наоѓа помеѓу правите y=M и $y=m$.

3. ПАРНИ И НЕПАРНИ ФУНКЦИИ

Дефиниција 1: За функцијата y=f(x) велиме дека е парна функција, ако нејзината дефинициона област D_f ***е симетрична во однос на координатниот почеток и притоа важи***

$$f(-x)=f(x) \qquad (\forall x \in D_f).$$

Нека f е парна функција и нека

$x \in D_f \quad \Rightarrow \quad -x \in D_f$, поради симетричност на D_f

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

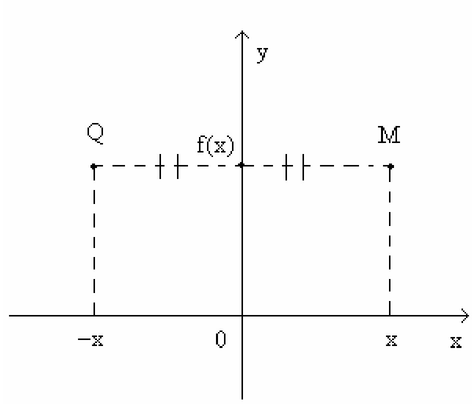
$M(x, f(x)) \in \Gamma_f \qquad Q(-x, f(-x)) \in \Gamma_f$

како функцијата е парна,
тоа $f(-x)=f(x)$

$\Downarrow$

$Q(-x, f(x)) \in \Gamma_f$

Значи, ако графикот на функцијата f минува низ точката M(x, f(x)), тогаш тој минува и низ точката Q(–x, f(x)). Притоа овие точки M и Q се симетрични една на друга во однос на y–оската; Поради ова графикот на парна функција е симетричен во однос на y–оската.



Дефиниција 2: За функцијата y=f(x) велиме дека е непарна функција, ако нејзината дефинициона област D_f е симетрична во однос на координатниот почеток и притоа важи

$$f(-x)=-f(x) \qquad (\forall x \in D_f).$$

Нека f е непарна функција и нека

$x \in D_f \quad \Rightarrow \quad -x \in D_f$, поради симетричност на D_f

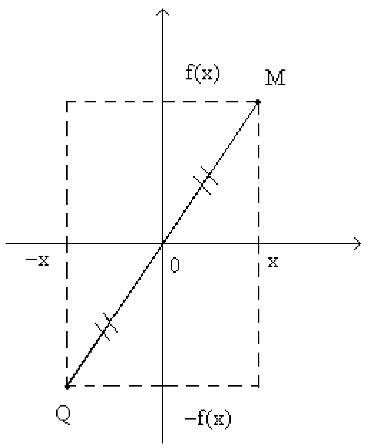
$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$M(x, f(x)) \in \Gamma_f \qquad Q(-x, f(-x)) \in \Gamma_f$

како функцијата е непарна,
$f(-x) = -f(x)$

$\Downarrow$

$Q(-x, -f(x)) \in \Gamma_f$.



Значи, $\forall x \in D_f \Rightarrow$ графикот на функцијата минува низ точките M(x, f(x)) и Q(-x, –f(x)). Овие точки M и Q се симетрични една на друга во однос на координатниот почеток. Според тоа, графикот на непарна функција е симетричен во однос на координатниот почеток.

Пример 1: Дадени се функциите $y=x^2$ и $y=x^3$. Испитај ја нивната парност и конструирај ги нивните графици.

Решение:

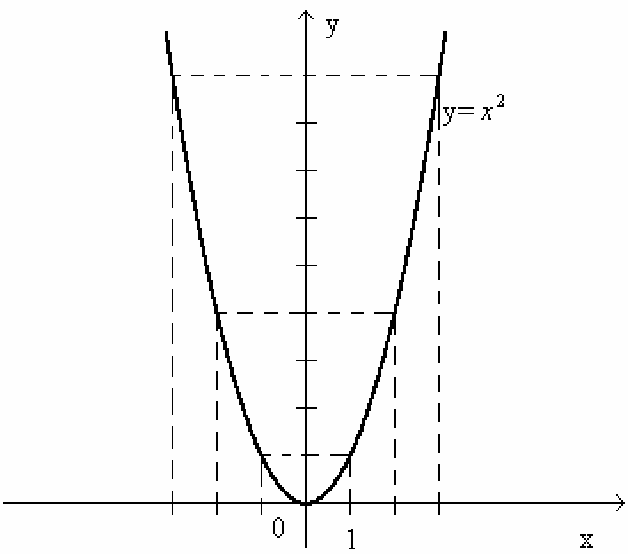
y= $\underbrace{x^2}_{f(x)}$

D $_f$: $x \in (-\infty,+\infty)$

f(–x)=(–x)^2 = x^2 = f(x)

$\Rightarrow$ функцијата е парна.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



Графикот е симетричен во однос на y-оската

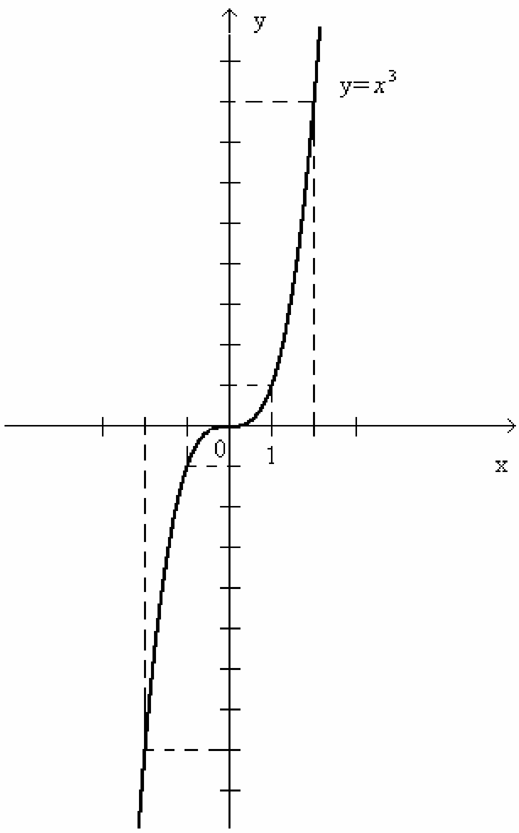
y= $\underbrace{x^3}_{f(x)}$

D $_f$: $x \in (-\infty,+\infty)$

f(–x)=(–x)^3 = –x^3 = –f(x)

$\Rightarrow$ функцијата е непарна.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-27	-8	-1	0	1	8	27



Графикот е симетричен во однос на координатниот почеток

Задача 1: Испитај ја парноста – непарноста на следниве функции:

а) y=$\dfrac{x^2+1}{2x-3}$ б) y=$\dfrac{x^3}{3-x^2}$ в) y=$\dfrac{4-x^2}{x^2-1}$

г) y=$\dfrac{x}{|x|}$ д) y=$\dfrac{x^2+3x-2}{x^2+1}$.

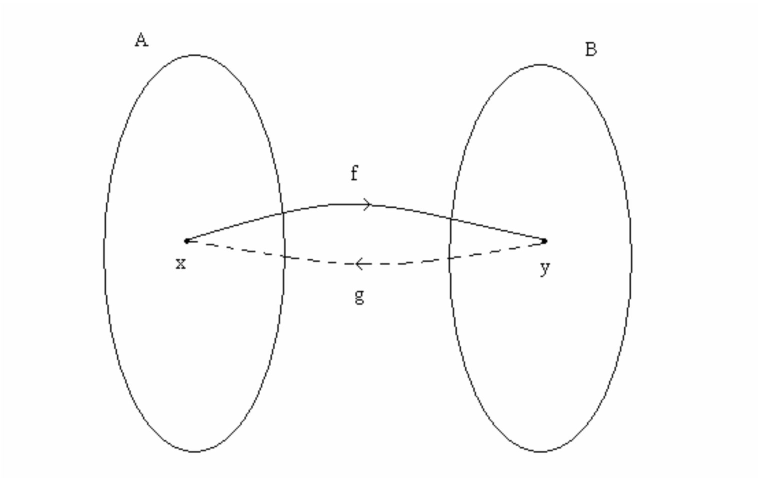
4. ИНВЕРЗНИ ФУНКЦИИ

Дефиниција 1: Нека A,B$\subseteq$R и нека f:A$\to$B е дадена функција. Ако постои функција g:B$\to$A т.ш.:

1) g(f(x))=x ($\forall x\in$ A) и

2) f(g(y))=y ($\forall y\in$ B),

тогаш велиме дека g е инверзна функција на дадената функција f и се означува со f^{-1} (т.е. g = f^{-1}).



Природно се поставува прашањето: Каква треба да е функцијата f за да има инверзна функција f^{-1}?

Јасно е дека f треба да е инјекција, бидејќи во спротивно би имале две различни точки x_1 и $x_2\in$ A кои со f би се пресликале во иста слика y, а оваа точка y со g:B$\to$A ќе има две различни слики x_1 и x_2 во A, што би значело дека g не е пресликување.

f мора да е и сурјекција, бидејќи претпоставката да f не е сурјекција би довело до тоа да во B има барем една точка која со $g:B\to A$ нема да се преслика во A. Ова би било во контрадикција да g е пресликување.

Од сето ова произлегува дека само биекција $f:A\to B$ може да има инверзна функција. Во важност е следнава теорема:

Теорема: Функција y=f(x) ($f:A\to B$) има инверзна функција $\Leftrightarrow$ f е биекција.

Сега се поставува прашањето: Како за дадена функција $f:A\to B$ ќе се најде нејзе инверзната функција f^{-1}?

y=f(x) е дадена функција. Од дефиницијата за инверзна функција

$f^{-1}(f(x))=x$

$f^{-1}(y)=x$

произлегува дека y=f(x) третирана како обична равенка треба да ја решиме по x т.е.

$y=f(x) \Rightarrow x=f^{-1}(y)$.

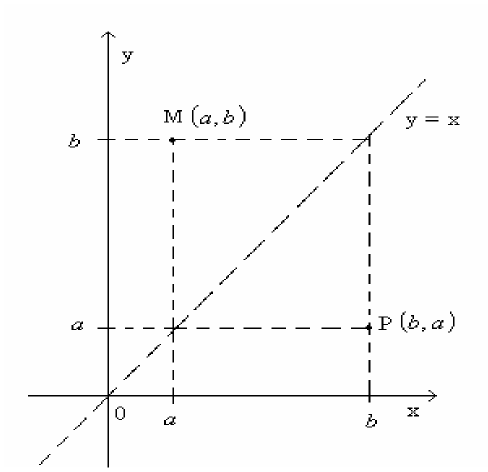
При инверзната функција $x=f^{-1}(y)$ променливата y е независно променлива, а променливата x е зависно променлива. Со други зборови: при премин од дадена функција y=f(x) кон нејзе инверзната функција $x=f^{-1}(y)$, независно променливата и зависно променливата ги промениле своите улоги. Како независно променлива најчесто ја означуваме со x, а зависно променлива со y, тоа во $x=f^{-1}(y)$ наместо x ставаме y и наместо y ставаме x. Така за инверзна функција добиваме $y=f^{-1}(x)$.

Поради ова:

$A=D_f$ поминува во множество од вредности на инверзната функција;

$V_f=\{f(x)|x\in D_f\}$ –множество од вредности на дадена функција поминува во дефинициона област на инверзната функција.

На крај, се прашуваме каков однос постои помеѓу графикот Γ_f на дадената функција y=f(x) и графикот $\Gamma_{f^{-1}}$ на инверзната функција $y=f^{-1}(x)$?



Нека $M(a,b) \in \Gamma_f \Rightarrow P(b,a) \in \Gamma_{f^{-1}}$. Точките M и P се симетрични во однос на правата y=x т.е. во однос на симетралата на првиот и третиот квадрант. Ова важи за секоја точка од графикот Γ_f на функцијата y=f(x) $\Rightarrow$ графикот Γ_f на y=f(x) и графикот $\Gamma_{f^{-1}}$ на нејзе инверзната функција y=f^{-1}(x) стојат симетрично еден на друг во однос на симетралата на првиот и третиот квадрант.

Задача 1: За функцијата y=3^x најди инверзна функција и во ист координатен систем конструирај ги графиците на дадената функција и на нејзе инверзната функција.

Задача 2: Најди инверзни функции на функциите

а) y=$\dfrac{2x-1}{x+3}$ б) y=$3e^{x+1}-2$ в) y=$8\log_2(3x+1)$.

5. ПЕРИОДИЧНИ ФУНКЦИИ

Дефиниција 1: Функција y=f(x) се нарекува периодична ако постои реален број T≠0 таков што

$$f(x+T)=f(x) \qquad \forall x \in D_f.$$

Бројот T со оваа особина се нарекува **период**.

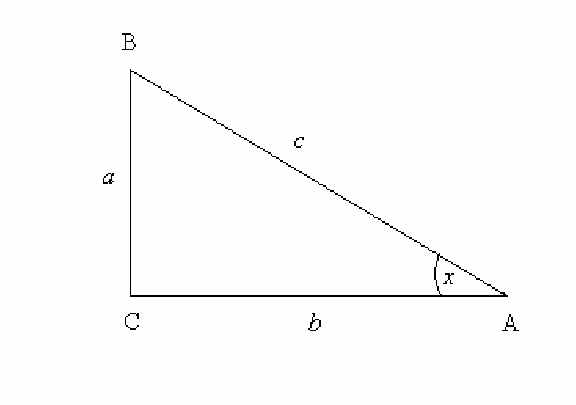
Најмал позитивен број T со оваа особина се нарекува **основен период** на функцијата.

Примери за периодични финкции се т.н. тригонометриски функции.

5.1 ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ НАД ОСТАР АГОЛ

Катетата a за остриот агол x се нарекува **спротивна катета**.

Катетата b за аголот x се нарекува **налегната катета**.



$$\sin x \overset{def}{=} \frac{\textit{спротивна катета}}{\textit{хипотенуза}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos x \overset{def}{=} \frac{\textit{налегната катета}}{\textit{хипотенуза}} = \frac{b}{c}$$

$$tgx \overset{def}{=} \frac{\textit{спротивна катета}}{\textit{налегната катета}} = \frac{a}{b}$$

$$ctgx \overset{def}{=} \frac{\textit{налегната катета}}{\textit{спротивна катета}} = \frac{b}{a}$$

Да најдеме некои врски помеѓу овие тригонометриски функции:

$\sin^2 x + \cos^2 x = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$, следува

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$tgx = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin x}{\cos x}$, следува

$$\boxed{tgx = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$ctgx = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\cos x}{\sin x}$, следува

$$\boxed{ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$tgx \cdot ctgx = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$, следува

$$\boxed{tgx \cdot ctgx = 1}$$

Пример 1: Познато е дека $\sin x = \frac{3}{5}$. Пресметај $\cos x$, tgx и $ctgx$.

Решение: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\Rightarrow \qquad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5},$$

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

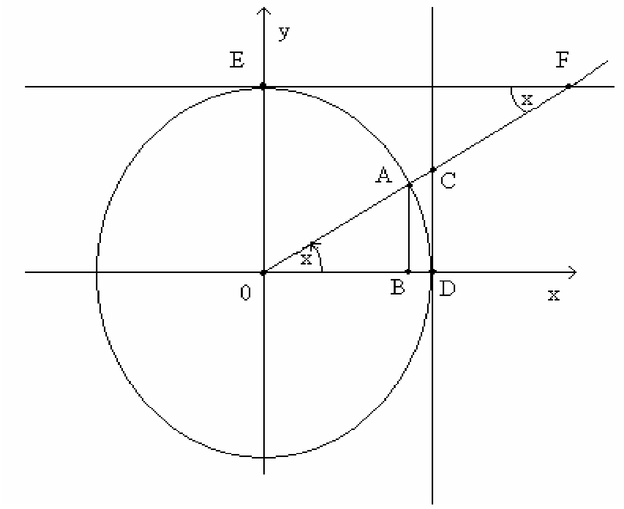
$$tgx \cdot ctgx = 1 \Rightarrow ctgx = \frac{1}{tgx} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Во оваа табела се дадени вредности на тригонометриските функции од аглите 0º, 30º, 45º, 60º и 90º

агол / триг. функција	0º	30º	45º	60º	90º
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
ctg	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

5.2 ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ НАД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ

Воведените тригонометриски функции над остар агол можат да се обопштат над произволен агол со помош на т.н. **тригонометриска кружница**. Тоа е кружница со центар во координатен почеток и радиус 1.



$0 \le x \le 90^{\circ}$

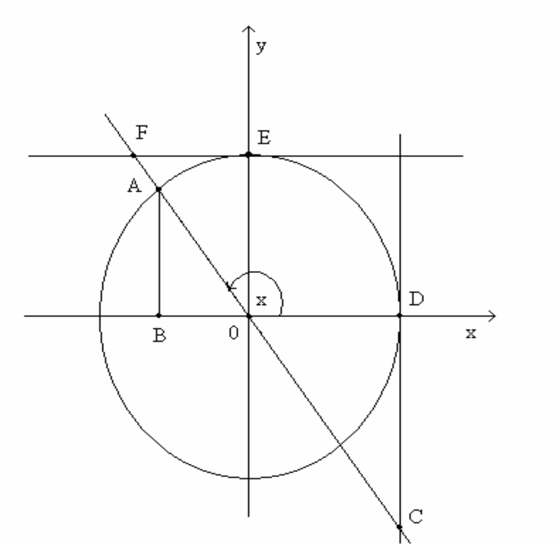
$$\sin x = \frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{OA}}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB} > 0$$

$$\cos x = \frac{\overline{OB}}{\overline{\overline{OA}}} = \frac{\overline{OB}}{1} = \overline{OB} > 0$$

$$tgx = \frac{\overline{CD}}{\overline{\overline{OD}}} = \frac{\overline{CD}}{1} = \overline{CD} > 0$$

$$ctgx = \frac{\overline{EF}}{\overline{\overline{OE}}} = \frac{\overline{EF}}{1} = \overline{EF} > 0$$

$$\overline{OA} = \overline{OD} = \overline{OE} = 1$$



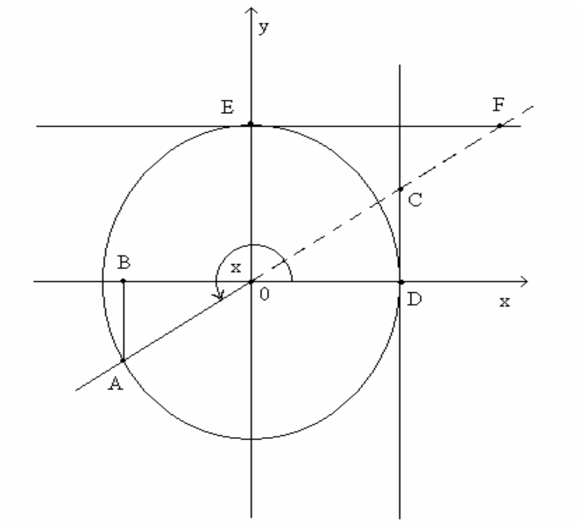
$90^{\circ} \le x \le 180^{\circ}$

$\sin x = \overline{AB} > 0$

$\cos x = -\overline{OB} < 0$

$tgx = -\overline{CD} < 0$

$ctgx = -\overline{EF} < 0$



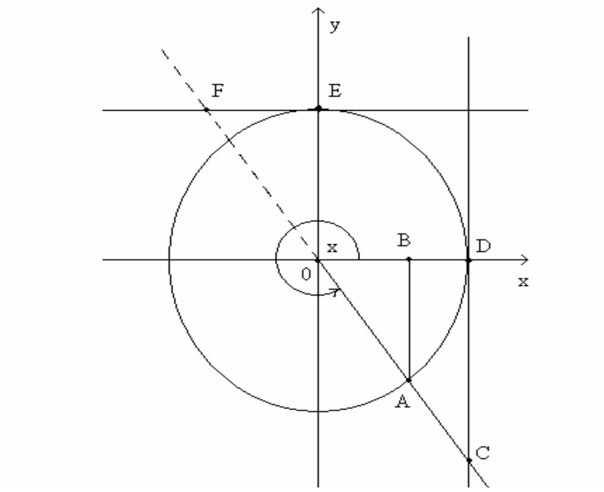
$180^\circ \leq x \leq 270^\circ$

$\sin x = -\overline{AB} < 0$

$\cos x = -\overline{OB} < 0$

$tgx = \overline{CD} > 0$

$ctgx = \overline{EF} > 0$



$270^\circ \leq x \leq 360^\circ$

$\sin x = -\overline{AB} < 0$

$\cos x = \overline{OB} > 0$

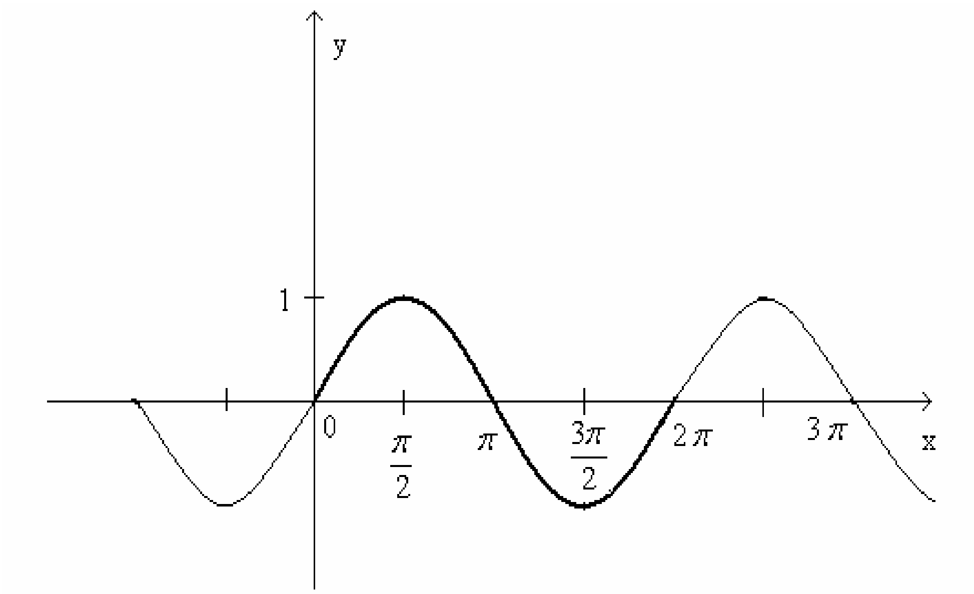
$tgx = -\overline{CD} < 0$

$ctgx = -\overline{EF} < 0$

Сега кратко да се запознаеме со секоја од дефинираните тригонометриски функции:

$\boxed{\mathbf{y}=\sin x}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	-1	0



Функцијата $y=\sin x$ ги има следниве особини:

1) $D_f=(-\infty,+\infty)$

2) е непарна функција т.е.

$$\sin(-x)=-\sin x$$

3) е периодична функција со основен период 2π т.е.

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x \qquad k=0,\pm1,\pm2,...$$

4) е ограничена функција т.е. $-1\le\sin x\le+1$

5) нули на функцијата се точките

$$x=k\pi \quad k=0,\pm1,\pm2,...$$

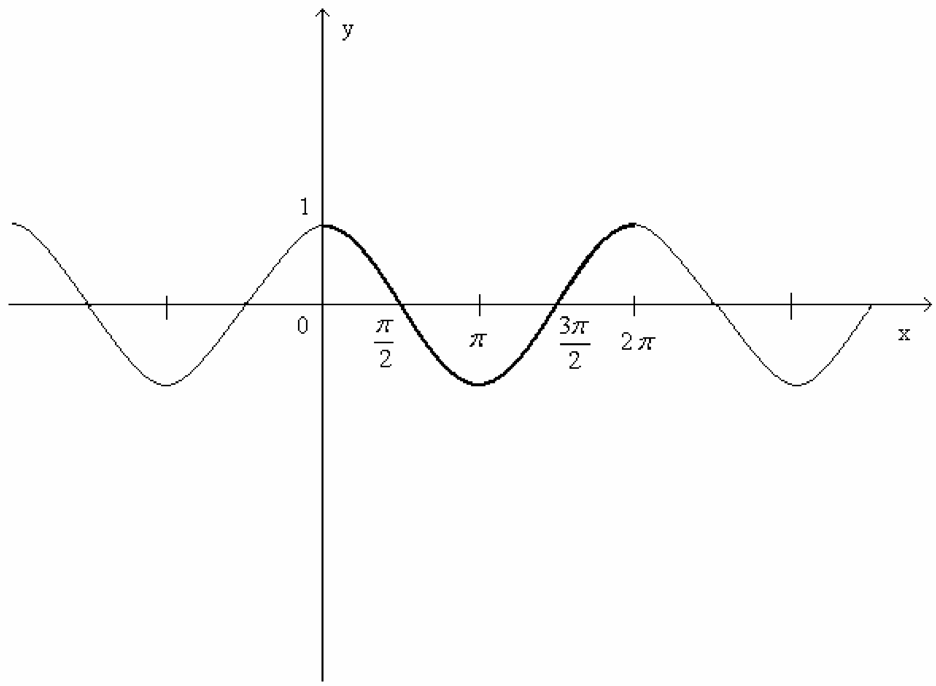
$\boxed{\mathbf{y}=\cos x}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	0	-1	0	1

1) $D_f = (-\infty, +\infty)$

2) е парна функција т.е.

$\cos(-x) = \cos x$



3) е периодична функција со основен период 2π. Значи

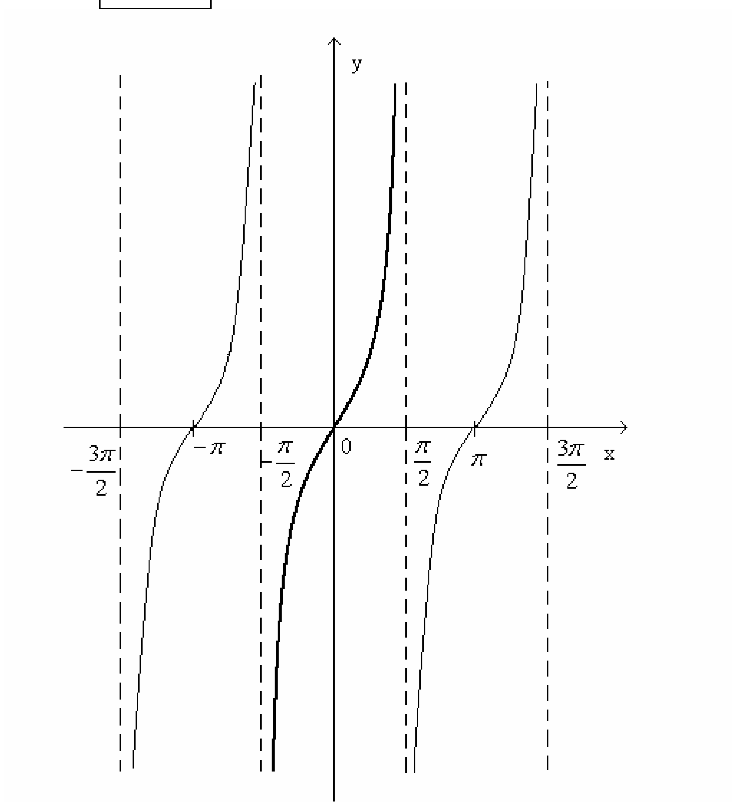
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

4) е ограничена функција т.е. $-1 \le \cos x \le +1$

5) нули на функција

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

$\boxed{\mathbf{y}=tgx}$



1) D$_f$: $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2,...$ т.е.

D$_f$ =$\mathbf{R}\backslash\{$x| x=$(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2,...\}$

2) е непарна функција

$tg(-x) = -tgx$

3) е периодична функција со основен период π. Значи

$tg(x + k\pi) = tgx \quad k = 0, \pm 1, \pm 2,...$

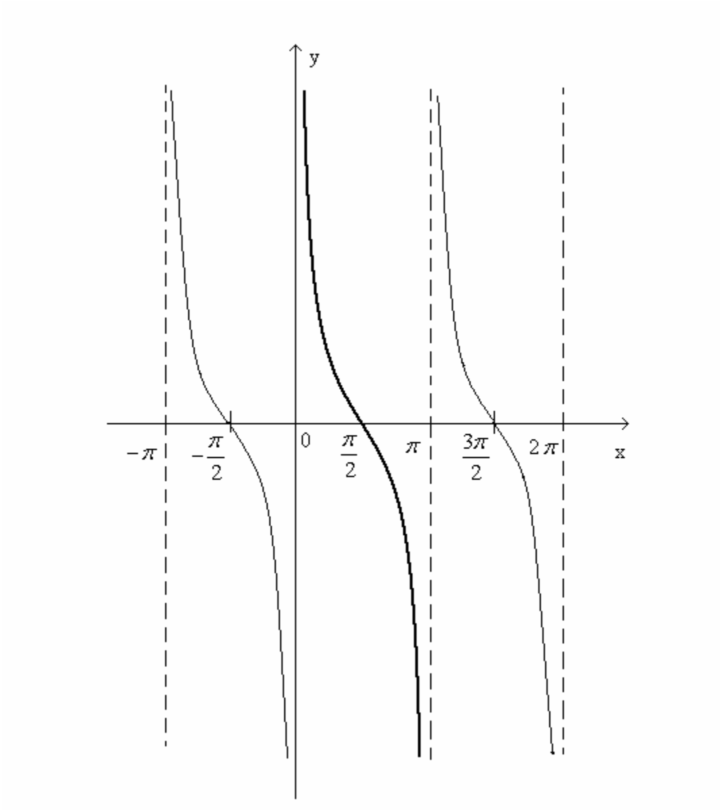
4) е неограничена функција

5) нули на функција се

$x = k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2,...$

6) правите $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2,...$ се т.н. вертикални асимптоти.

$\boxed{\mathbf{y}=ctgx}$



1) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{x \mid x = k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$

2) е непарна функција. Значи

$$ctg(-x) = -ctgx$$

3) е периодична функција со основен период π. Значи

$$ctg(x + k\pi) = ctgx \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

4) е неограничена функција

5) нули на функција се

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

6) правите $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ се вертикални асимптоти.

Пример 2: Испитај ја периодичноста на функциите:

а) y=$a\sin b(x+c)$ б) y=$a\cos b(x+c)$ в) y=$atgb(x+c)$

г) y=$actgb(x+c)$ д) y=$\sin\sqrt{x}$ ѓ) y=$\cos x^2$

Решение:

а) y=$\underbrace{a\sin b(x+c)}_{f(x)}$

$$f(x+T)=f(x)$$

$$\cancel{a}\sin b(x+T+c)=\cancel{a}\sin b(x+c)$$

$$\sin b(x+T+c)=\sin b(x+c)$$

$\Rightarrow$ $$b(x+T+c)=b(x+c)+2k\pi$$

$$\cancel{bx}+bT+\cancel{bc}=\cancel{bx}+\cancel{bc}+2k\pi$$

$$bT=2k\pi$$

$$T=\frac{2k\pi}{b}\quad k=0,\pm 1,\pm 2,...$$

Секој од броевите $\frac{2k\pi}{b}$ е период на дадената функција. Основен период се добива за k=1 и е $\boxed{T=\frac{2\pi}{b}}$

Да забележиме дека во функцијата y=$a\sin b(x+c)$ бројот:

b влијае на периодот

a се нарекува **амплитуда**

c се нарекува **фаза** или **фазно поместување** на синусоидата.

б) Слично се покажува дека функцијата y=$a\cos b(x+c)$ е периодична со основен период $\boxed{T=\frac{2\pi}{b}}$

в) $y=\underbrace{atgb(x+c)}_{f(x)}$

$$f(x+T)=f(x)$$

$$\cancel{a}tgb(x+T+c)=\cancel{a}tgb(x+c)$$

$$tgb(x+T+c)=tgb(x+c)$$

$$\Rightarrow \quad b(x+T+c)=b(x+c)+k\pi$$

$$\cancel{bx}+bT+\cancel{bc}=\cancel{bx}+\cancel{bc}+k\pi$$

$$bT=k\pi$$

$$T=\frac{k\pi}{b} \quad k=0,\pm1,\pm2,...$$

Секој од овие броеви е период на дадената функција. Основен период се добива за $k=1$ и изнесува

$$\boxed{T=\frac{\pi}{b}}$$

г) Слично се покажува дека и функцијата $y=actgb(x+c)$ е периодична со основен период

$$\boxed{T=\frac{\pi}{b}}$$

д) За функцијата $y=\underbrace{\sin\sqrt{x}}_{f(x)}$ имаме

$$f(x+T)=f(x)$$

$$\sin\sqrt{x+T}=\sin\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x+T}=\sqrt{x}+2k\pi \quad /^2$$

$$\cancel{x}+T=\cancel{x}+2k\pi\sqrt{x}+4k^2\pi^2$$

$$T=2k\pi\sqrt{x}+4k^2\pi^2 \quad k=0,\pm1,\pm2,...$$

Како T зависи од x $\Rightarrow$ T не е константен реален број $\Rightarrow$ функцијата не е периодична.

ѓ) Слично се покажува дека и функцијата $y=\cos x^2$ не е периодична.

Пример 3: Функцијата

$$y=-2\cos\frac{x}{2}$$

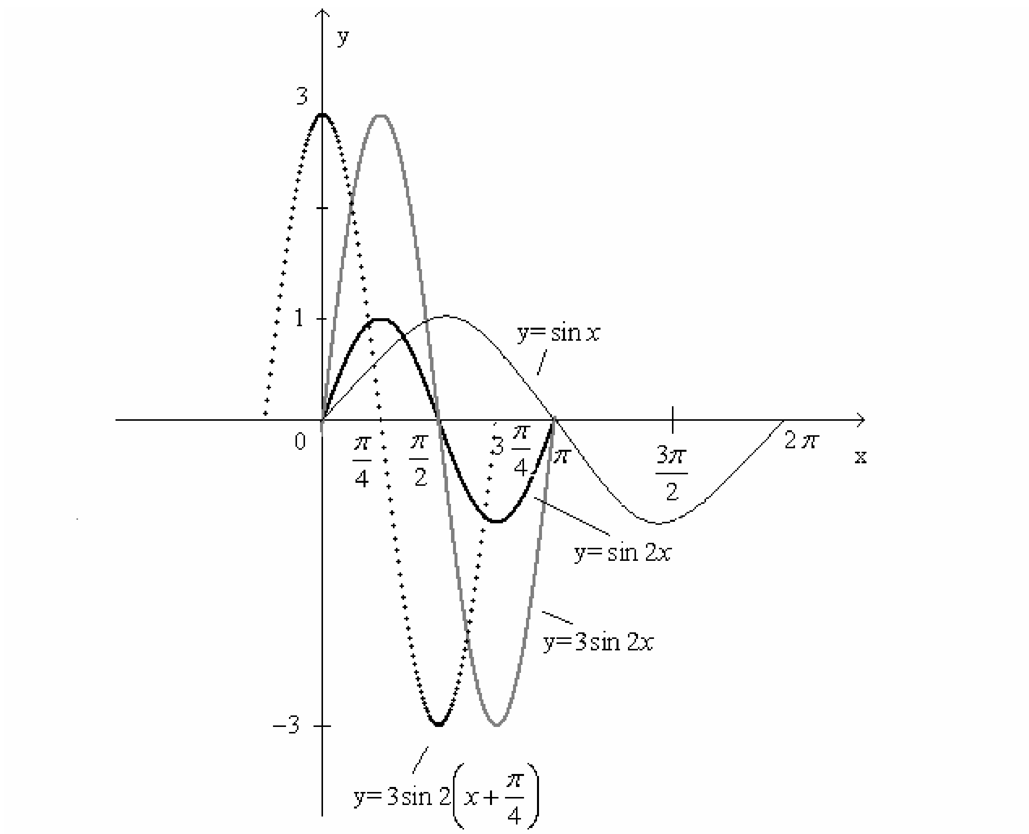
е од облик

$$y=-2\cos\frac{1}{2}(x+0)\,,\quad a=-2,\quad b=\frac{1}{2},\quad c=0$$

поради што таа има основен период $T=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

Пример 4: Во еден ист координатен систем нацртај ги графиците на следниве функции:

$y=\sin x$, $y=\sin 2x$, $y=3\sin 2x$ и $y=3\sin(2x+\dfrac{\pi}{2})$.



Забележуваме дека графикот на функцијата $y=\sin 2x$ е всушност графикот на синусоидата $y=\sin x$ стегнат по хоризонтала на половина, бидејќи за $y=\sin 2x$, $b=2$ и има основен период $T=\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{2}=\pi$. Понатаму, y=$3\sin 2x$ има амплитуда $a=3$, поради што имаме издолжување по вертикала на синусоидата y=$\sin 2x$. На крај, функцијата y=$3\sin(2x+\frac{\pi}{2})$ $\Leftrightarrow$ y=$3\sin 2(x+\frac{\pi}{4})$ има график ист со графикот на функцијата y=$3\sin 2x$, само поместен на лево за $\frac{\pi}{4}$.

Задача: Колку е основниот период на функциите:

а) y=$-\cos(\frac{x}{2}+\pi)$ б) y=$tg3x$

и нацртај го нивниот график.

6. ЦИКЛОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

Функции што се инверзни на тригонометриските функции се познати под име **циклометриски функции**.

Знаеме дека за тригонометриската функција

y=$\underbrace{\sin x}_{f(x)}$

$x\in(-\infty,+\infty)$ и y$\in[-1,1]$ т.е $D_f=(-\infty,+\infty)$, $V_f=f(D_f)=[-1,1]$.

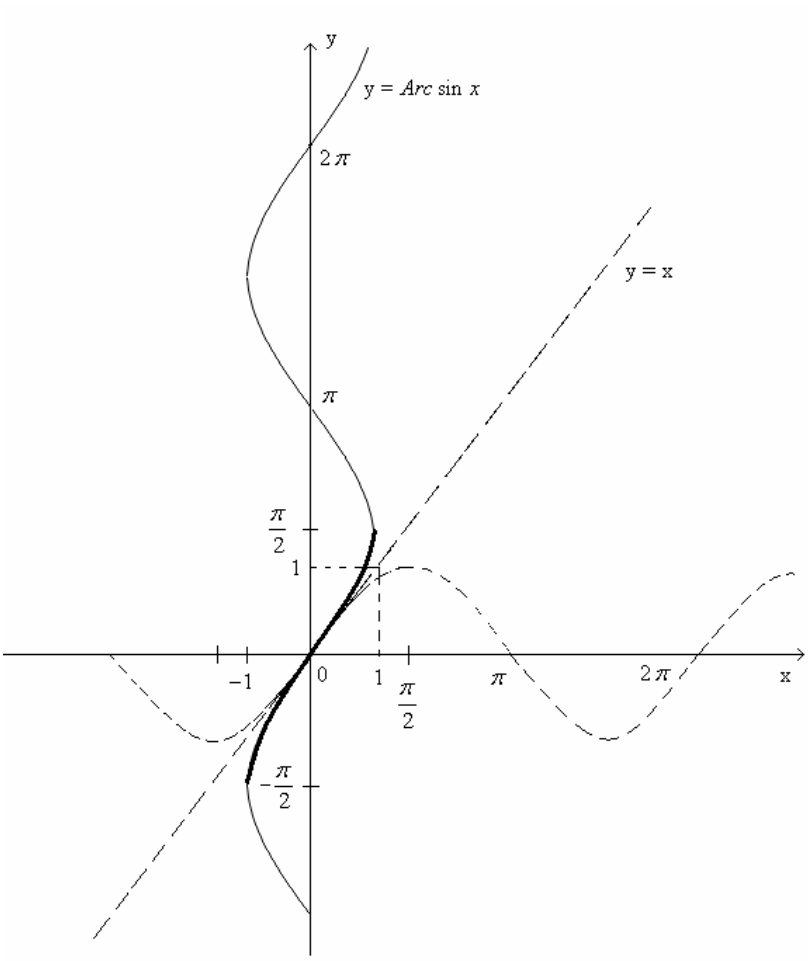
Ако од y=$\sin x$ побараме x, тогаш пишуваме

$x=Arc\sin y$

и читаме “икс е еднакво на Аркус синус од ипсилон”.

Како најчесто независно променлива означуваме со x, а зависно променлива со y, последното равенство се запишува

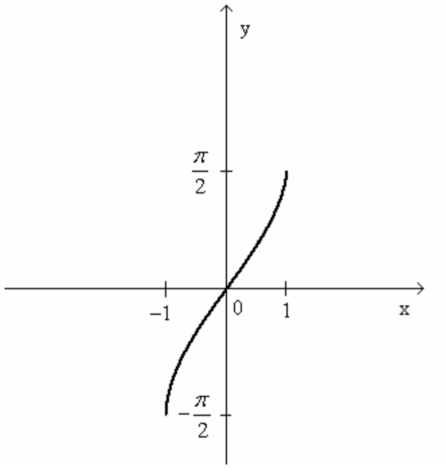
y=$Arc\sin x$ при што $x\in[-1,1]$ и y$\in(-\infty,+\infty)$.



$y = Arc\sin x$

е т.н. **мултиформна** или **повеќезначна функција**, бидејќи за една вредност на $x \in [-1,1]$ одговараат повеќе вредности за y.

Со цел да се вклопиме во дефиницијата за функција (види дефиниција 1, точка 1 од оваа глава), според која на секоја од вредностите на независно променливата $x \in D_{f^{-1}}$ ќе одговара само по една вредност на зависно променливата y, во $y = Arc\sin x$ ќе се задржиме на оној нејзин дел за кој



што $x \in [-1,1]$ и $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Тој дел се означува со $y = \arcsin x$. Значи,

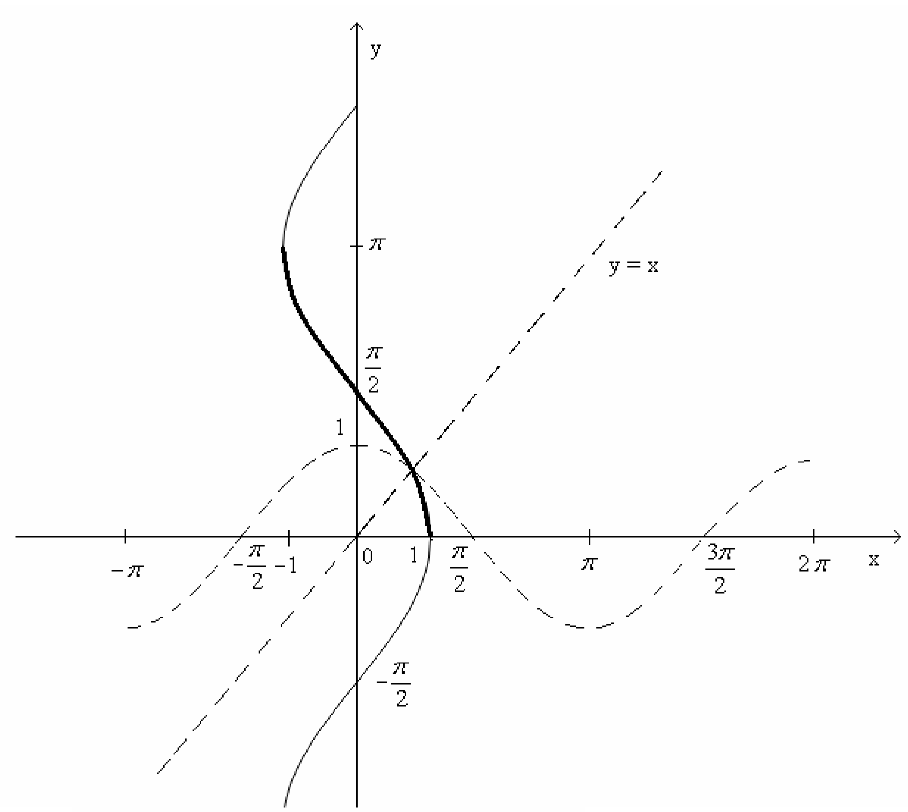
$$y = \underbrace{\arcsin x}_{f^{-1}(x)} \quad D_{f^{-1}} = [-1,1], \quad V_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

Јасно е дека $\sin(\arcsin x) = x$.

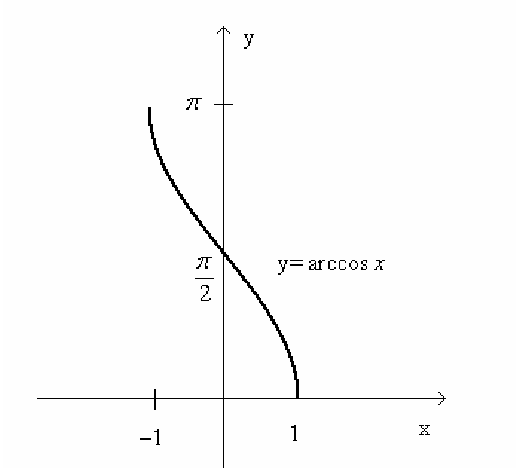
Слично, за y=$\underbrace{\cos x}_{f(x)}$, $x\in(-\infty,+\infty)$, y$\in[-1,1]$, имаме

y=$\cos x \Rightarrow x = Arc\cos y$ т.е. после замена на x со y и на y со x

y=$Arc\cos x$, $x\in[-1,1]$, y$\in(-\infty,+\infty)$.



y=$Arc\cos x$ е мултиформна функција. Со цел да се вклопиме во дефиницијата за функција (види дефиниција 1, точка 1. од оваа глава), се задржуваме на оној нејзин дел за кој што $x\in[-1,1]$ и y$\in[0,\pi]$.



Тој дел се означува со y=$\underbrace{\arccos x}_{f^{-1}(x)}$,

D$_{f^{-1}}=[-1,1]$,

V$_{f^{-1}}=\{f^{-1}(x)|\,x\in[-1,1]\}=[0,\pi]$.

Јасно е дека $\cos(\arccos x)=x$.

За да најдеме инверзна функција на функцијата y=tgx се задржуваме на оној нејзин дел за којшто $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и y∈ $(-\infty, +\infty)$.

Имаме

$$y = \underbrace{tgx}_{f(x)},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \wedge\ y \in (-\infty, +\infty)$$

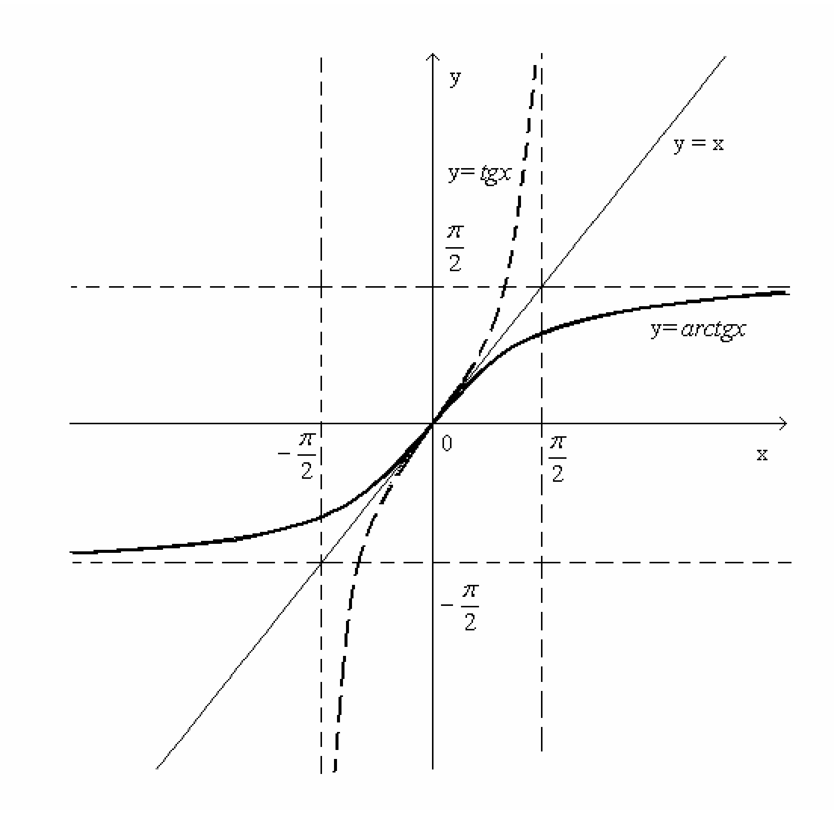
$$\Downarrow$$

$$x = arctgy,\ y \in (-\infty, +\infty) \wedge x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

или, после замена на x со y и на y со x,

$$y = \underbrace{arctgx}_{f^{-1}(x)},\ D_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty) \wedge\ V_{f^{-1}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Јасно е дека $tg(arctgx) = x$.



Слично, за инверзна функција на функцијата y=$ctgx$, имаме

$$y=\underbrace{ctgx}_{f(x)}, \quad x\in(0,\pi) \ \wedge \ y\in(-\infty,+\infty)$$

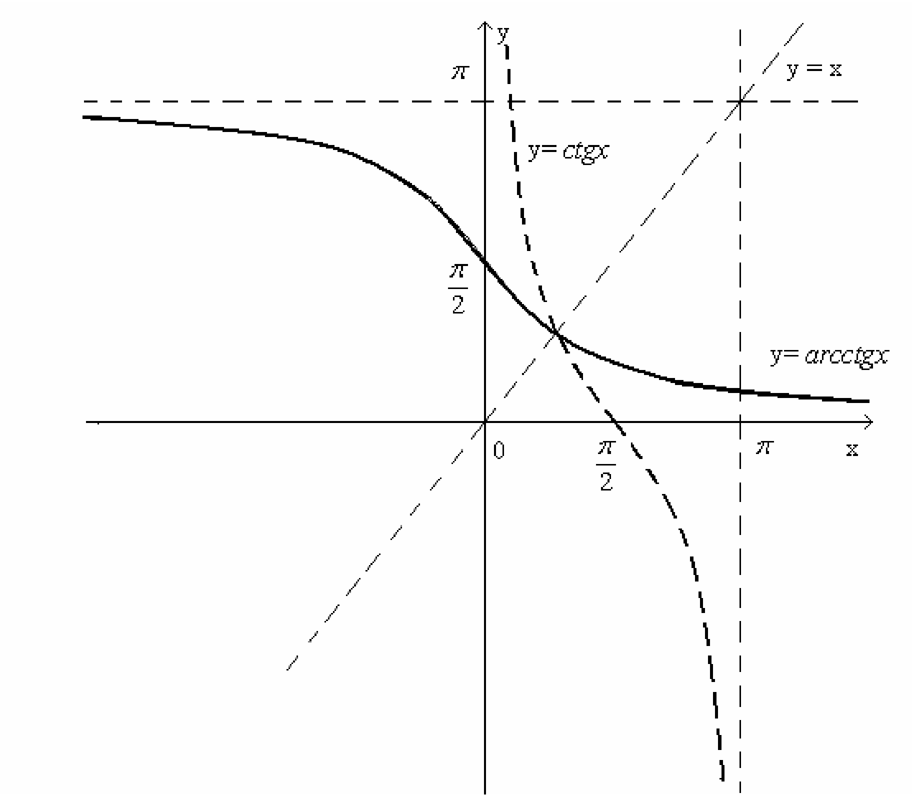
$$\Downarrow$$

$$x = arcctgy, \ y\in(-\infty,+\infty), \quad x\in(0,\pi)$$

односно

$$y=\underbrace{arcctgx}_{f^{-1}(x)}, \ D_{f^{-1}}=(-\infty,+\infty), \ V_{f^{-1}}\in(0,\pi)$$

Јасно е дека $ctg(arcctgx) = x$.

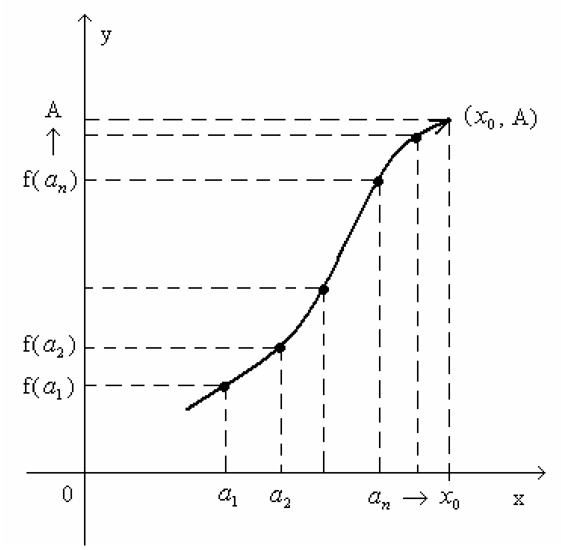


7. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА ФУНКЦИИ

7.1 ПОИМ ЗА ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ

Нека y=f(x) е дадена функција дефинирана во некоја околина на точката $x_0 \in \mathbf{R}$ освен можеби во самата таа точка.

Дефиниција 1: ***За бројот A∈ R велиме дека е граница на функција y=f(x) при*** $x \to x_0$ ***ако*** $\forall$ ***низа (***a_n***) од точки т.ш.*** $a_n \neq x_0$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ ***и*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ ***соодветната низа (f(***a_n***)), од вредности на функцијата y=f(x) во точките*** a_n***, тежи кон A. Пишуваме*** $\lim\limits_{x\to x_0}$ ***f(x)=A.***



Илустрација:

Во случај $\lim\limits_{x\to x_0}$ f(x)=A имаме

$\forall(a_n): a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \to x_0$

$\Rightarrow$ соодветната низа од вредности

f(a_1), f(a_2), f(a_3),…,f(a_n),... →A

Ова значи дека: додека независно променливата x, преку точките од низата (a_n), на апсцисната оска се приближува кон точката x_0, дотогаш зависно променливата – функцијата y, преку точките од низата

f(a_1), f(a_2), f(a_3),…,f(a_n),…

на ординатната оска се приближува кон точката A. За сметка на ова точките (a_1,f(a_1)), (a_2,f(a_2)), (a_3,f(a_3)),…,(a_n,f(a_n)),… кои што се точки од графикот Γ_f на функцијата y=f(x) се повеќе се приближуваат кон точката (x_0, A).

Дефиниција 2: ($\varepsilon - \delta$ ***дефиниција): За бројот A велиме дека е граница на функција y=f(x) при*** $x \to x_0$ ***ако*** $\forall \varepsilon > 0$ ***произволно мало постои*** $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ***т.ш.***

$\forall x \neq x_0 \ \wedge \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Пишуваме $\lim\limits_{x\to x_0}$ ***f(x)=A.***

Илустрација:

$\lim\limits_{x\to x_0}$ f(x)=A $\Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)$ т.ш. $\forall x\neq x_0\ \wedge\ |x-x_0|<\delta$ важи $|f(x)-A|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)$ т.ш. $\forall x\neq x_0\ \wedge\ -\delta<x-x_0<+\delta$ важи

$-\varepsilon<f(x)-A<\varepsilon$

$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)$ т.ш. $\forall x\neq x_0\ \wedge\ x_0-\delta<x<x_0+\delta$ важи

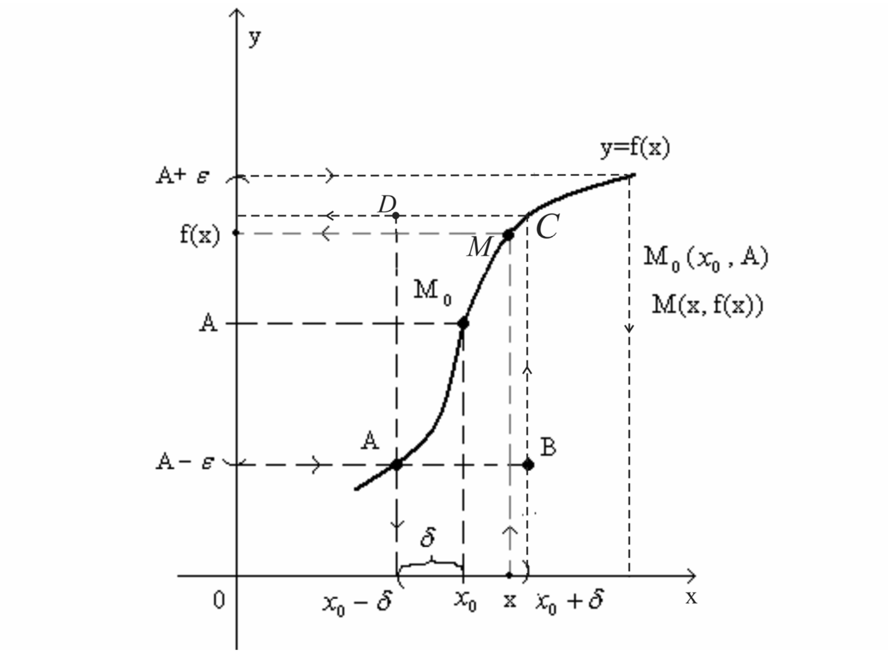
$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$

$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)$ т.ш. $\forall x\neq x_0\ \wedge\ x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ важи

$f(x)\in(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$.

Значи, во случај на граница A= $\lim\limits_{x\to x_0}$ f(x) за произволна ε–околина $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ на границата A постои δ–околина $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ на бројот x_0 така што $\forall x\neq x_0$ од оваа δ–околина $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ вредноста на функцијата $f(x)\in(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$.

Следува точката M(x, f(x))$\in\Gamma_f$ е во правоаголникот ABCD.



На крај да забележиме дека за гранични вредности на функции важат операциски правила слични на операциските правила за гранични вредности на низи.

Теорема 1: Нека y=f(x) и y=g(x) се две дадени функции дефинирани во некоја околина на точката x_0, освен можеби во самата таа точка. Важат формулите:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} c\,f(x)=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

4) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

Последица (од формулата 3) се формулите:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^k=[\lim_{x\to x_0} f(x)]^k, \qquad (k\in \mathbf{N})$$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim_{x\to x_0} f(x)}, \qquad (k\in \mathbf{N})$$

Теорема 2: Нека y=f(x) и y=g(x) се две функции дефинирани во некоја околина на точката x_0, освен можеби во самата таа точка и нека $\forall x\neq x_0$ од оваа околина важи

$f(x)\leq g(x)$ (т.е. $f(x)<g(x)$).

Тогаш важи формулата

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Теорема 3: Нека y=f(x), y=g(x) и y=φ(x) се функции дефинирани во некоја околина на точката x_0, освен во самата таа точка и нека $\forall x\neq x_0$ од оваа околина важи

$f(x)\leq \varphi(x)\leq g(x)$.

Ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, тогаш следува дека и $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=A$.

Примери:

1) $$\lim_{x\to -1}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2-6x-4}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(4x^2-3x+1)}{\lim\limits_{x\to -1}(2x^2-6x-4)}=\frac{4(-1)^2-3(-1)+1}{2(-1)^2-6(-1)-4}=2$$

2) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\,(x+1)}{-x\,\cancel{(x-1)}}=\frac{1+1}{-1}=-2$$

3) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{2-\sqrt{6-x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{2-\sqrt{6-x}}\cdot\frac{2+\sqrt{6-x}}{2+\sqrt{6-x}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+x-6)(2+\sqrt{6-x})}{2^2-(\sqrt{6-x})^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+x-6)(2+\sqrt{6-x})}{4-(6-x)}=$$

$$x^2+x-6=0\ \Rightarrow\ x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}$$

$$x_1=-3,\ \ x_2=2\quad\Rightarrow\quad x^2+x-6=1\cdot(x+3)(x-2)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)\,\cancel{(x-2)}\,(2+\sqrt{6-x})}{\cancel{-2+x}}=\frac{(2+3)(2+\sqrt{6-2}}{1}=\frac{5\cdot 4}{1}=20\,.$$

Задачи:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-5}-1}{x^2-6x}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+3}}{2x^2-5x-3}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2-3x-4}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt[3]{x}}$

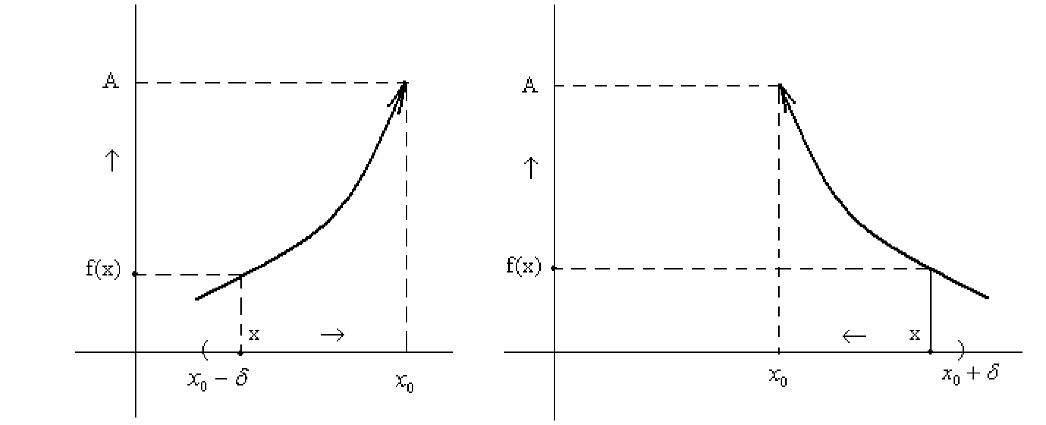
6) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^3-x-1}{2x^3+x^2-4x+1}$

7.2 ЛЕВА И ДЕСНА ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ

Во дефиницијата за гранична вредност на функции

$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{f(x)}= A$$

не е важен начинот на кој што точката x се приближува кон x_0, т.е. $x\in\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)$.



Во случај кога $x \to x_0$ од лево т.е. $x\in(x_0-\delta, x_0)$, имаме т.н. **лева гранична вредност** и пишуваме

$$\lim_{x\to x_0-0} \mathrm{f(x)}= A_1 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to x_0-} \mathrm{f(x)}= A_1$$

а во случај кога x се приближува кон x_0 од десно т.е. $x\in(x_0, x_0+\delta)$, имаме т.н. **десна гранична вредност** и пишуваме

$$\lim_{x\to x_0+0} \mathrm{f(x)}= A_2 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to x_0+} \mathrm{f(x)}= A_2$$

Во општ случај A_1 и A_2 не мора да се еднакви. Во важност е следнава теорема:

Теорема 1: Ако границата $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)= A$ постои, тогаш постојат левата $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)= A_1$ и десната $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)= A_2$ гранична вредност и притоа се еднакви, т.е.

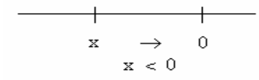
$$A_1 = A_2 = A.$$

Обратното, од постоење на левата $\lim\limits_{x\to x_0-} \mathrm{f(x)}= A_1$ и десната $\lim\limits_{x\to x_0+} \mathrm{f(x)}= A_2$ гранична вредност не мора да следува постоење и на границата $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{f(x)}= A$.

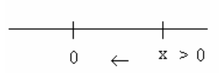
Теорема 2: Од постоење на $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ ***и*** $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ ***и нивна еднаквост т.е.*** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ $= \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) \Rightarrow$ ***постоење и на*** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ***и притоа*** $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

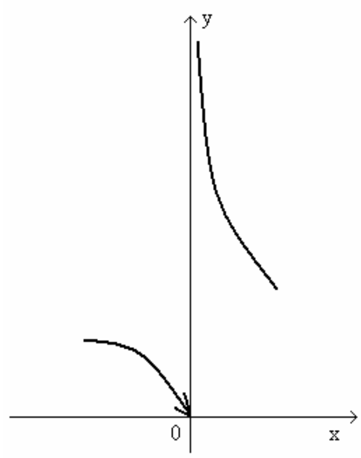
Пример 1: $y=e^{\frac{1}{x}}$ $\quad x_0 = 0$

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$



$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty$$





Како

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ не постои } \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}.$$

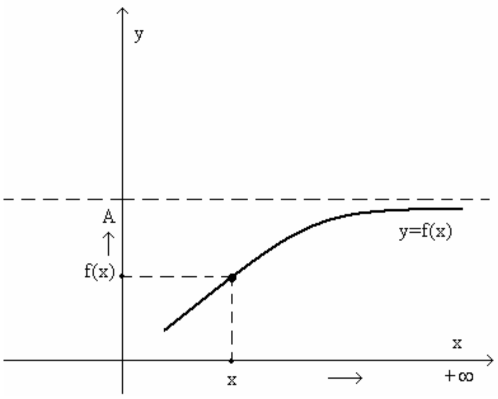
7.3 ПРОШИРУВАЊЕ НА ПОИМОТ ЗА ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА ФУНКЦИИ. АСИМПТОТИ НА ФУНКЦИИ

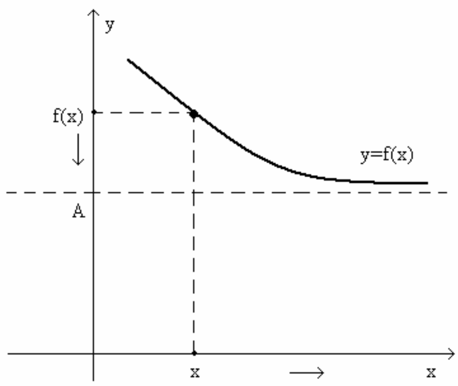
Во дефиницијата за гранична вредност на функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, за левата $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_1$ и десната $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_2$ гранична вредност претпоставуваме дека x_0, A, A_1 и A_2 се реални броеви.

Во оваа точка поимот за граница на функции ќе го прошириме претпоставувајќи дека x_0 и (или) еден од броевите A, A_1 или A_2 е $+\infty$ или $-\infty$.

1) $x_0 = +\infty \ \wedge \ A \in \mathbf{R}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{f}(x) = A$

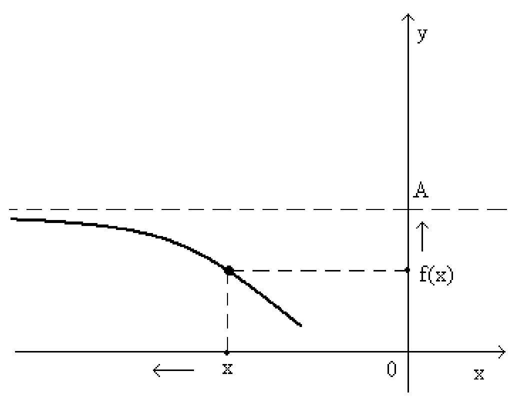


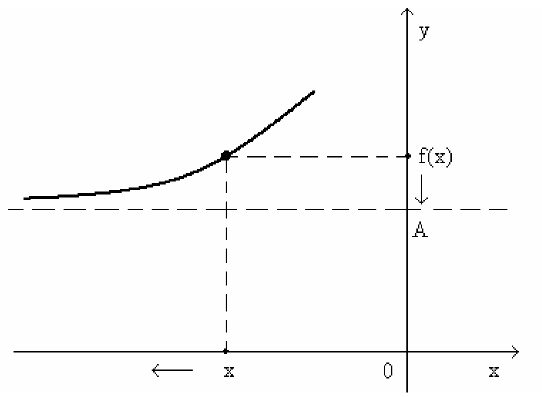


$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{f}(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \mathrm{M} \in \mathbf{R} \wedge \mathrm{M} > 0)$ т.ш. $\forall x > \mathrm{M}$ важи $|\mathrm{f}(x) - A| < \varepsilon$

2) $x_0 = -\infty \ \wedge \ A \in \mathbf{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{f}(x) = A$





$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{f}(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \mathrm{M} \in \mathbf{R} \wedge \mathrm{M} < 0)$ т.ш. за $x < \mathrm{M}$ важи $|\mathrm{f}(x) - A| < \varepsilon$

Дефиниција 1: Права y= A ***(која што сече y–оска во A и е паралелна на x–оска) кон којашто графикот на функцијата y=f(x) се повеќе и повеќе се приближува се нарекува хоризонтална асимптота.***

Правило за нејзино наоѓање:

Дадена е функција y=f(x). Бараме

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \mathrm{f}(x) = A \neq \pm\infty \ \Rightarrow$ y=A е хоризонтална асимптота.

Пример 1: Најди хоризонтална асимптота за функцијата y=$\dfrac{2x-x^2}{x^2+1}$

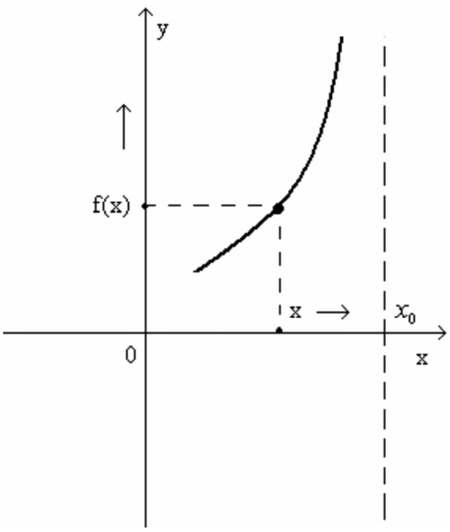
Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x^2}(\cancel{\frac{2}{x}}^{0}-1)}{\cancel{x^2}(1+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{0})}=\dfrac{-1}{1}=-1\neq\pm\infty$

$\Rightarrow$ y= -1 е хоризонтална асимптота.

За разлика од претходните два случаи, во наредните случаи нема да дадеме дефиниции за соодветните гранични вредности, туку само нивни графички илустрации.

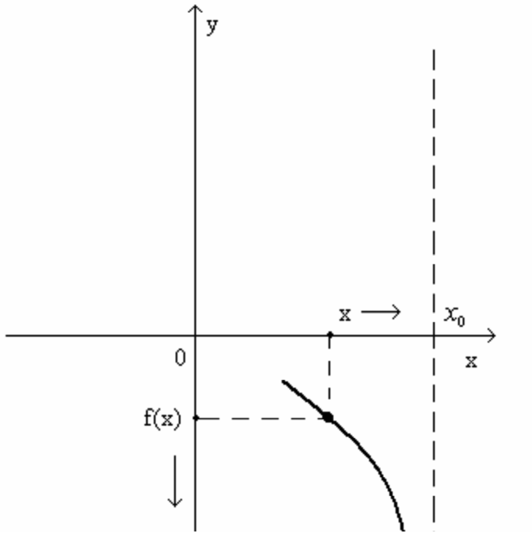
3) $x_0\in\mathbf{R}\wedge A_1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0-}$ f(x)= $+\infty$



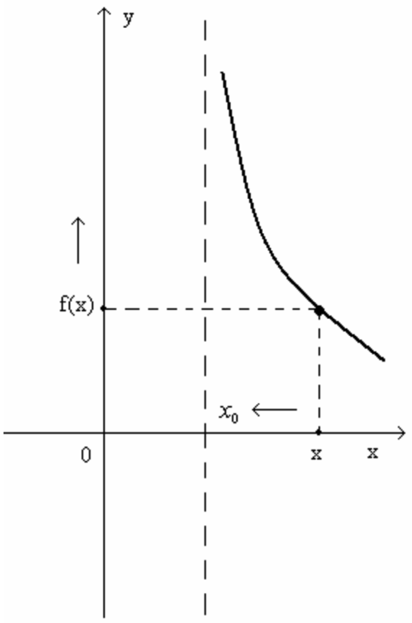
4) $x_0\in\mathbf{R}\wedge A_1=-\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0-}$ f(x)= $-\infty$



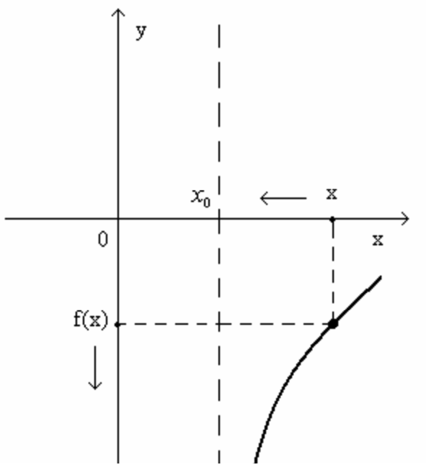
5) $x_0 \in \mathbf{R} \wedge A_2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to x_0+} \mathrm{f(x)} = +\infty$



6) $x_0 \in \mathbf{R} \wedge A_2 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to x_0+} \mathrm{f(x)} = -\infty$



Дефиниција 2: Правата $x = x_0$ (што ја сече x–оската во x_0 и е паралелна со y–оската) кон која што графикот на функцијата y=f(x) се повеќе се приближува се нарекува вертикална асимптота на функцијата y=f(x).

Пример 2: Најди вертикална асимптота на функцијата y=$\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

Решение:

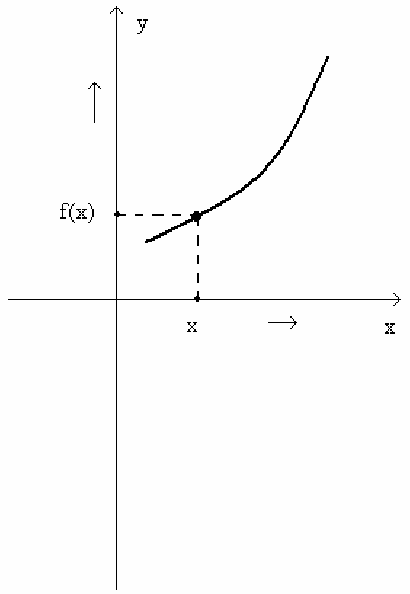
$$\lim_{x \to 1+} \mathrm{f(x)} = \lim_{x \to 1+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{\delta \to 0+} \frac{(1+\delta)^3}{(1+\delta-1)^2} = \lim_{\delta \to 0+} \frac{(1+\delta)^3}{\delta^2} = \frac{1}{(+0)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1-} \mathrm{f(x)} = \lim_{x \to 1-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{\delta \to 0+} \frac{(1-\delta)^3}{(1-\delta-1)^2} = \lim_{\delta \to 0+} \frac{(1-\delta)^3}{(-\delta)^2} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $x = 1$ е вертикална асимптота.

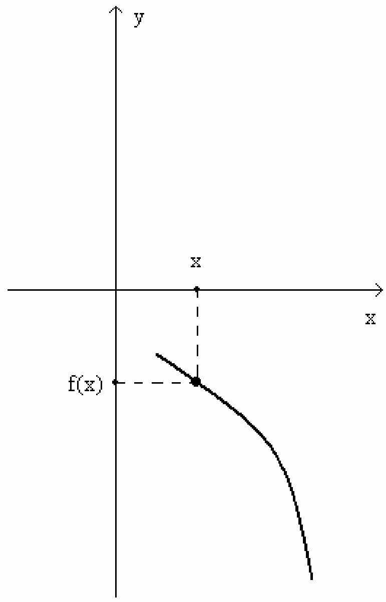
7) $x_0 = +\infty \ \wedge \ A = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



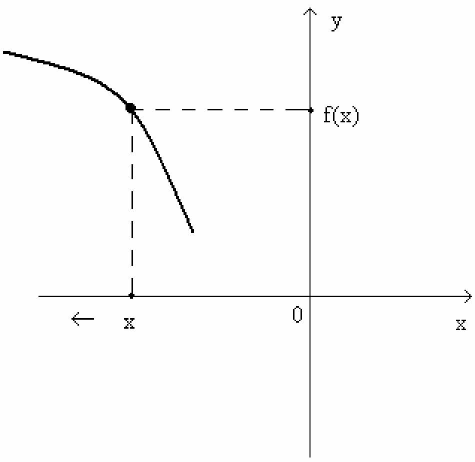
8) $x_0 = +\infty \ \wedge \ A = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



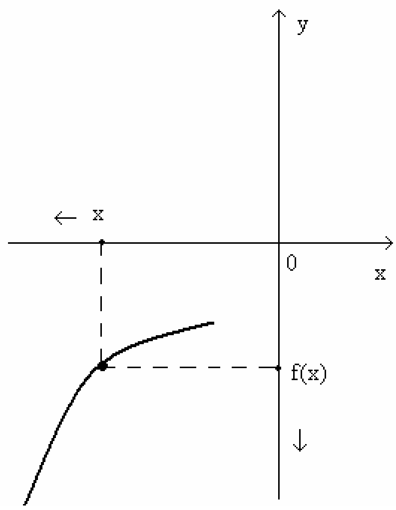
9) $x_0 = -\infty \ \wedge \ A = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



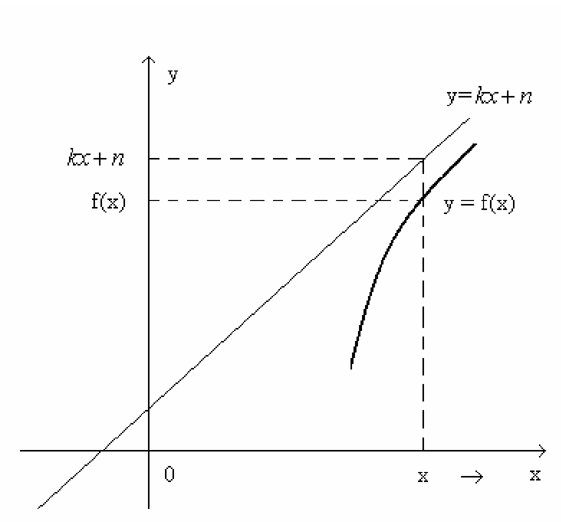
10) $x_0 = -\infty \ \wedge \ A = -\infty$

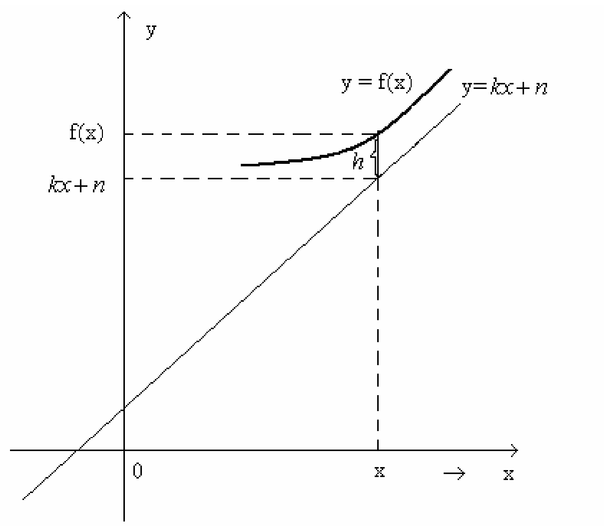
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



Треба да забележиме дека, покрај хоризонтална и вертикална асимптота, една функција y=f(x) може да има и **коса асимптота**

y=$kx+n$, при што $k,n \in \mathbf{R}$ и $k \neq \pm\infty$, $k \neq 0$.





Да ставиме f(x)–($kx+n$)=h. Јасно е дека при $x \to +\infty$ разликата h помеѓу f(x) и $kx+n$ тежи кон нула т.е.

$$\lim_{x\to+\infty} h = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx+n)) = 0$$

k=?

$$\frac{f(x)-(kx+n)}{x} = \frac{h}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x} - k - \frac{n}{x} = \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{n}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{h}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to+\infty} k - \lim_{x\to+\infty} \frac{n}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{h}{x}$$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$, следува

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k}$$

За вака најдено k, од

$$h = f(x) - (kx + n) \Rightarrow n = (f(x) - kx) - h$$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to+\infty} n = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) - \lim\limits_{x\to+\infty} h$, следува

$$\boxed{n = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx)}$$

Слични формули имаме и за определување на коса асимптота при $x \to -\infty$.

Пример 3: Најди коса асимптота за функцијата y=$\dfrac{x^3}{3-x^2}$

Решение:

y=$kx+n$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{x^{\cancel{3}}}{3-x^2}}{\dfrac{\cancel{x}}{1}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{3-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(\dfrac{3}{\cancel{x^2}}^{0} - 1\right)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$\Rightarrow \quad k = -1$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{3-x^2} - (-1)x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{3-x^2} + x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^3} + 3x - \cancel{x^3}}{3-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{3-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(\dfrac{3}{\cancel{x^2}}^{0} - 1\right)} = \frac{3}{\pm\infty\cdot(-1)} = \frac{3}{\mp\infty} = 0$$

$\Rightarrow \quad n=0$

Според тоа, оваа функција за коса асимптота ја има правата

y=$-x$

Задача 1: За функцијата од примерот 2 побарај хоризонтална и коса асимптота.

Задача 2: За функцијата од примерот 3 побарај хоризонтална и вертикална асимптота.

Задача 3: Побарај асимптоти за функцијата y=$\dfrac{1-x^3}{x^2-x}$.

7.4 НЕКОИ ПОВАЖНИ ГРАНИЧНИ ВРЕДНОСТИ НА ФУНКЦИИ

I. $$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Доказ:

$(\forall x\in \mathbf{R} \ \wedge \ x>0)(\exists n\in \mathbf{N})$ т.ш.

$$n\le x<n+1$$

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$$

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Согласно теорема 2 точка 7.1 и дефиницијата за бројот e, имаме

$$\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}\le\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

т.е. $$\frac{e}{1}\le\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le e\cdot 1$$

$$e\le\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le e\,,$$

од каде што се добива

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,.$$

Забелешка: Оваа гранична вредност се користи при неопределеност од облик $1^{+\infty}$ и притоа независно променливата x се наоѓа и во основа и во степеновиот показател.

Задачи:

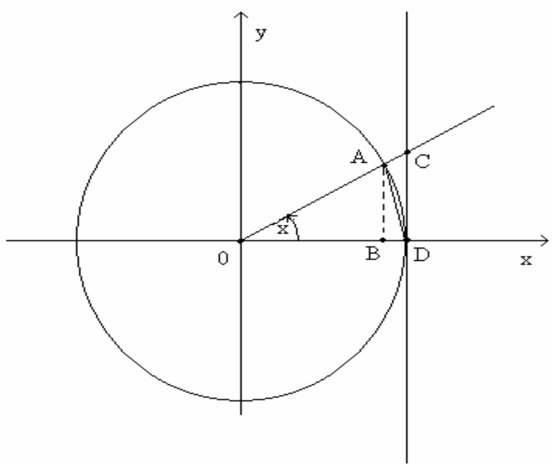
1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{5}{8x}\right)^{x+4}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{\frac{x^2+x+1}{x-2}}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{3x^2+1}\right)^{x-\sqrt{x+1}}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{9x^2-1}\right)^{\frac{x^2}{2x^2+3}}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{9x^2-1}\right)^{\frac{x^3}{x^2+3}}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{9x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^3}{x^2+3}}$

7) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x^2-1}}$ 8) $\lim\limits_{x\to2}(3-x)^{\frac{5-4x}{x^2+x-6}}$ 9) $\lim\limits_{x\to0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$.

II. $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$

Доказ:



Да земеме тригонометриска кружница и агол x поголем од нула, но помал од $\dfrac{\pi}{2}$, т.е. $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

Од цртежот се гледа дека плоштината на кружниот исечок $OD\widehat{A}$ е поголема од плоштината на триаголникот AOD, а помала од плоштината на триаголникот COD т.е. $P_{\Delta AOD}<P_{O\overset{\frown}{DA}}<P_{\Delta COD}$.

Како

$$P_{\Delta AOD}=\frac{\overline{OD}\cdot\overline{AB}}{2}=\frac{1\cdot\sin x}{2}=\frac{\sin x}{2}$$

$$P_{\widehat{ODA}}=\frac{1^2\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}}\cdot x=\frac{x}{2} \quad \text{и} \quad P_{\Delta COD}=\frac{\overline{OD}\cdot\overline{DC}}{2}=\frac{1\cdot tgx}{2}=\frac{tgx}{2},$$

тоа со замена на овие плоштини во горното двојно неравенство, добиваме

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tgx}{2} \quad \text{т.е.}$$

$$\sin x < x < tgx\,.$$

Делејќи ги сите членови во неравенството со $\sin x$, добиваме

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}\,,$$

од каде што $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$.

Земајќи граничен процес при $x \to 0$, имаме

$$\lim_{x\to 0+} \cos x \le \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to 0} 1$$

$$1 \le \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \le 1\,,$$

од каде што се добива дека

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

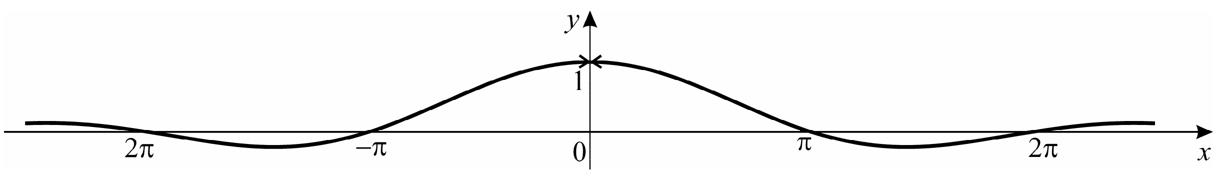
Да забележиме дека последната гранична вредност важи и за $x < 0$ при $x \to 0-$ т.е. дека важи $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Навистина, од $x < 0 \Rightarrow -x > 0$. Ставајќи $-x = t > 0$, имаме

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-\sin x}{-x} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t} = 1\,,$$

$$x \to 0- \Leftrightarrow t \to 0+$$

Значи, од $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \;\wedge\; \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, согласно теорема 2, точка 7.2, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.



Забелешка: Оваа гранична вредност се користи при неопределеност од облик $\frac{0}{0}$ и притоа независно променливата величина x се наоѓа под знакот на тригонометриски функции.

Задачи:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 7x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-2\sin 4x}{x+5\sin x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos x}{x^2}$ 7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^3 x-1}{x^2}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos 3x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

III. $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad (a>0)}$$

Доказ: Да ставиме

$$a^x-1=t \Leftrightarrow a^x=t+1 \Leftrightarrow x=\log_a(1+t)$$

$$x\to 0 \Leftrightarrow t\to 0$$

Имаме $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log_a(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=$

$$=\frac{\lim\limits_{t\to 0}1}{\lim\limits_{t\to 0}\log_a\left(1+\frac{1}{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log_a\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{t}}}=$$

$$\frac{1}{t}=m,\ t\to 0 \Leftrightarrow m\to\infty$$

$$=\frac{1}{\log_a\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}=\frac{1}{\log_a e}=\log_e a=\ln a\,.$$

Забелешка: Оваа гранична вредност се користи при неопределеност од облик $\frac{0}{0}$ и притоа независно променливата величина x се наоѓа во степенов показател, а основата на степенот е константа.

Задачи:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-1}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-3^{5x}}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{4x}}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{e^x}-1}{x^2+x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}-1}{x^2-x-2}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{1-e^{2x}}$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3^x+5^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x+3^x+5^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

IV. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1}$

Доказ:

Ставајќи

$\ln(1+x)=t \Leftrightarrow 1+x=e^t \Leftrightarrow x=e^t-1$

и притоа $x\to 0 \Leftrightarrow t\to 0$,

имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{e^t-1}{t}}=\frac{\lim\limits_{t\to 0}1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}}=\frac{1}{\ln e}=\frac{1}{1}=1.$$

Забелешка: Оваа гранична вредност се користи при неопределеност од облик $\frac{0}{0}$ и притоа независно променливата величина x се наоѓа под знакот $\ln$.

Задачи:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+10x)}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+e)-1}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to +\infty} x[\ln(5+x)-\ln x]$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 5x}$

8. НЕПРЕКИНАТОСТ НА ФУНКЦИИ

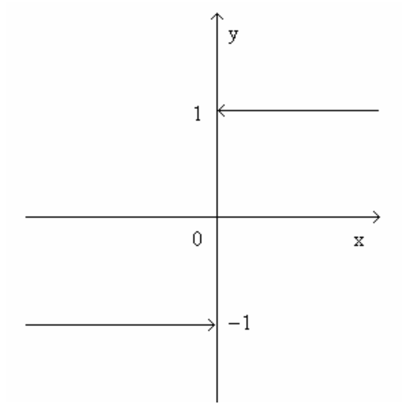
8.1 НЕПРЕКИНАТОСТ ВО ТОЧКА

Да го погледнеме графикот на функцијата

y= $\operatorname{sgn} x$ (се чита **"сигнум од икс"**)

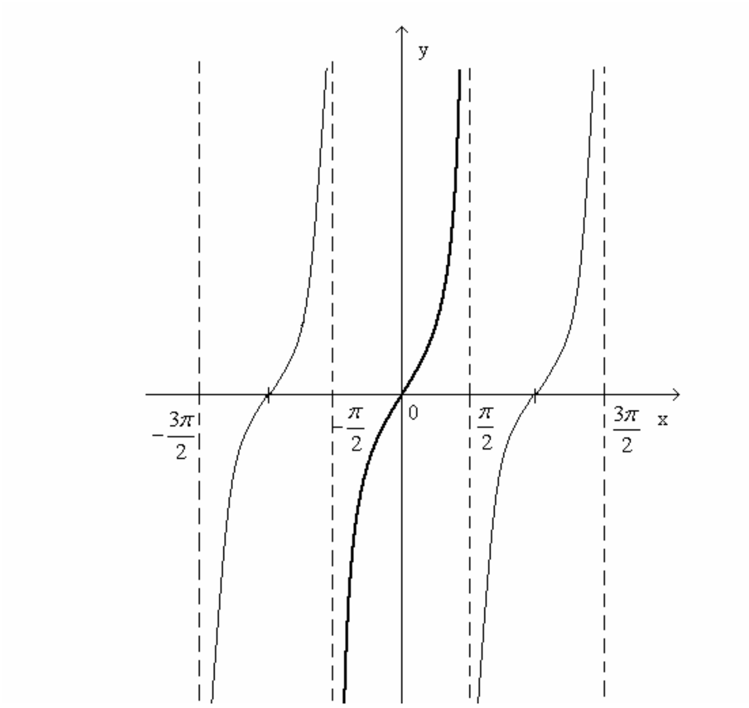
при што

$$\operatorname{sgn} x \overset{def}{=} \begin{cases} 1 & за \quad x > 0 \\ 0 & за \quad x = 0 \\ -1 & за \quad x < 0 \end{cases}$$



Гледаме дека тој има "прекин" во x =0.

Слично, ако го погледнеме графикот на функцијата у=tgx,



забележуваме дека тој има "прекини" во точките $x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0,\pm1,\pm2,...$

Дефиниција 1: За функцијата y=f(x) велиме дека е непрекината во точката x_0 ако:

1) $x_0 \in D_f$ т.е. f(x_0) постои

2) $\lim\limits_{x \to x_0}$ f(x) постои и

3) $\lim\limits_{x \to x_0}$ f(x)=f(x_0).

Значи,

y=f(x) е непрекината во x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0}$ f(x)=f(x_0)$\in$ R (1)

Согласно теорема 1 во точка 7.2, за лев и десен лимес, имаме

y=f(x) е непрекината во точка x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0 -}$ f(x)= $\lim\limits_{x \to x_0 +}$ f(x)=f(x_0)$\in$ R (2)

Дефиниција 2: Точка x_0 во која што функцијата y=f(x) не е непрекината се нарекува точка на прекин.

Да забележиме дека во случај на точка на прекин x_0 нарушено е равенството во (1) или е нарушено барем едно од равенствата во (2).

Така на пример, за функцијата y=$\underbrace{\operatorname{sgn} x}_{f(x)}$ и точката x_0=0, имаме

f(x_0)=f(0)=sgn0=0,

$\lim\limits_{x \to x_0 -}$ f(x)= $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{x \to 0-}(-1) = -1$

$\lim\limits_{x \to x_0 +}$ f(x)= $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{x \to 0+} 1 = 1$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0 -}$ f(x)$\neq$ $\lim\limits_{x \to x_0 +}$ f(x)$\neq$ f(x_0),

поради што x_0=0 е точка на прекин за функцијата y=$\operatorname{sgn} x$.

Пример 1: Секоја **полиномна функција** т.е. функција од облик

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

е непрекината функција во секоја точка $x_0 \in$ D$_f$ =**R**.

Навистина, како производ на реални броеви е реален број и збир од реални броеви е реален број, тоа

$$P(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0{}^2 + \cdots + a_nx_0{}^n \in \mathbf{R}.$$

Освен тоа

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to x_0} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) =$$

$$= \lim_{x\to x_0} a_0 + a_1(\lim_{x\to x_0} x) + a_2(\lim_{x\to x_0} x)^2 + \cdots + a_n(\lim_{x\to x_0} x)^n =$$

$$= a_0 + a_1x_0 + a_2x_0{}^2 + \cdots + a_nx_0{}^n = P(x_0).$$

Поради ова y=$P(x)$ е непрекината функција во $x_0 \in \mathrm{D}_f$.

Пример 2: Функција што е количник од две полиномни функции се нарекува **рационална функција** т.е. тоа е функција од облик

$$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Секоја рационална функција

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

е непрекината функција во точка $x_0 \in \mathbf{R}$ во која што $Q(x_0) \neq 0$.

Навистина,

$$\lim_{x\to x_0} y = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = y(x_0) \in \mathbf{R}$$

што значи дека y=$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ е непрекината во точката x_0.

Така, функцијата

$$y = \frac{5x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$$

е непрекината во секоја точка $x \neq \pm 1$, а има прекин во точките $x = 1$ и $x = -1$.

Од y=f(x) е непрекината во точката $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}$ f(x)=f(x_0), имаме

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x\to x_0} x),$$

што значи дека во случај на непрекината функција во точка x_0 операцијата lim и функцијата f можат “да си ги променат” местата т.е.

$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{f} = \mathrm{f} \lim_{x\to x_0}$$

***Теорема 1:** Ако y=f(x) и y=g(x) се непрекинати функции во точката x_0, тогаш непрекинати во точката x_0 се и функциите: y=cf(x)*

y=f(x)±g(x)

y=f(x)·g(x)

y=$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (g(x_0) ≠ 0).

Доказот на оваа теорема непосредно следува од дефиницијата за непрекинатост на функција во точка и од операциските правила за граници на функции.

8.2 НЕПРЕКИНАТОСТ НА СЕГМЕНТ

***Дефиниција 1:** За функцијата y=f(x) велиме дека е непрекината во интервалот (a,b) ако таа е непрекината во секоја точка од тој интервал.*

***Дефиниција 2:** За функцијата y=f(x) велиме дека е непрекината од лево во точката $x_0 \in \boldsymbol{D}_f$ ако*

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0).$$

***Дефиниција 3:** За функцијата y=f(x) велиме дека е непрекината од десно во точката $x_0 \in \boldsymbol{D}_f$ ако*

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0).$$

***Дефиниција 4:** За функцијата y=f(x) велиме дека е непрекината на сегментот $[a,b]$ ако:*

***1)** е непрекината во интервалот (a,b)*
***2)** е непрекината од десно во точката a и*
***3)** е непрекината од лево во точката b.*

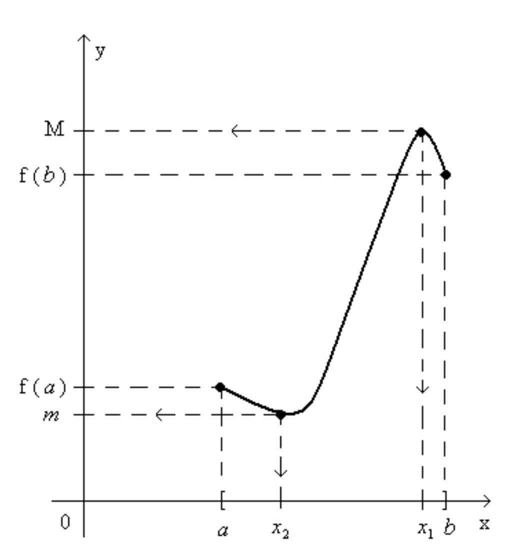
Дефиниција 5: ***Најголема вредност т.е. maximum на функцијата y=f(x) на сегментот*** $[a,b]$ ***се нарекува онаа нејзина вредност f(***x_1***)=M, (***$x_1 \in [a,b]$***) за која што важи***

$$f(x) \leq M, \qquad \forall x \in [a,b].$$

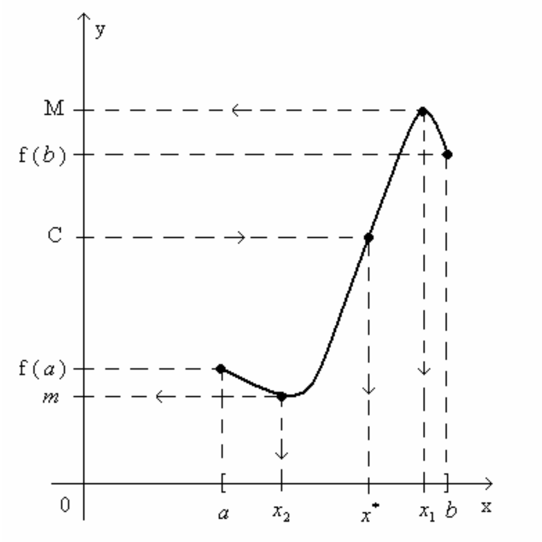
Дефиниција 6: ***Најмала вредност т.е. minimum на функцијата y=f(x) на сегментот*** $[a,b] \subseteq D_f$ ***се нарекува онаа нејзина вредност f(***x_2***)=***m***, (***$x_2 \in [a,b]$***) за која што***

$$m \leq f(x), \qquad \forall x \in [a,b].$$

Функции непрекинати на сегмент поседуваат низа особини, некои од кои што ќе ги искажеме (без докази) преку следниве теореми:

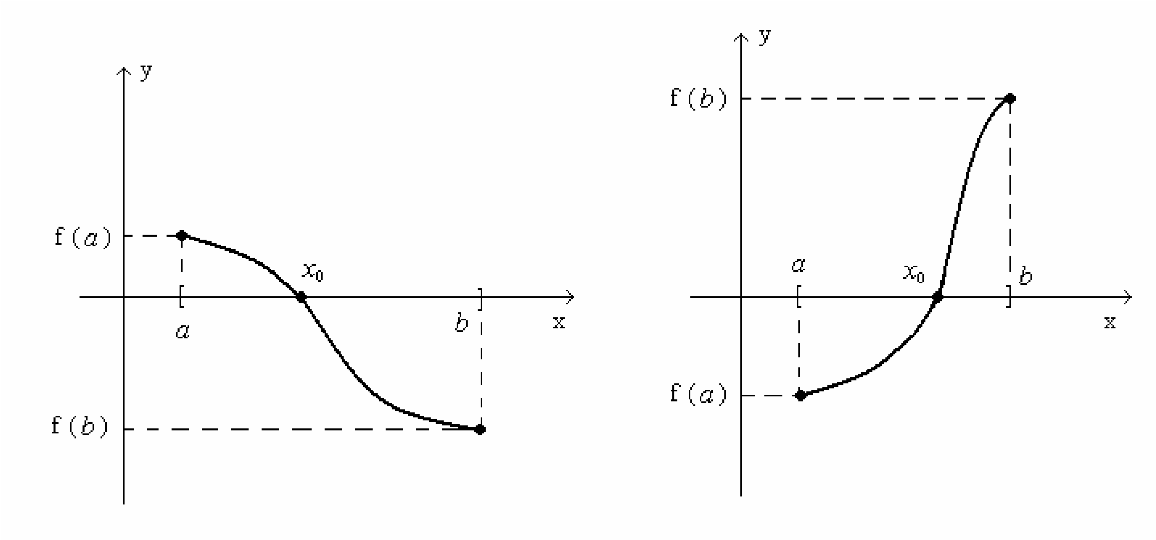


Теорема 1: ***Секоја непрекината функција y=f(x) на сегментот*** $[a,b]$ ***ја достигнува својата најмала вредност*** m ***и својата најголема вредност M т.е. постојат*** x_1 ***и*** x_2 ***од овој сегмент така што f(***x_1***)=M и f(***x_2***)=***m***.***



Теорема 2: ***Ако*** m ***е најмалата, а M најголемата вредност на непрекинатата функција y=f(x) на сегментот*** $[a,b]$ ***и ако*** m ***< C < M, тогаш постои точка*** $x^* \in [a,b]$ ***т.ш. f(***x^****)=C.***

Теорема 3: Ако y=f(x) е непрекината функција на сегментот $[a,b]$ ***и ако вредностите f(***a***) и f(***b***) на функцијата во крајните точки на сегментот се со различен знак, тогаш постои точка*** x_0 ***во внатрешноста на сегментот во која што f(***x_0***)=0.***



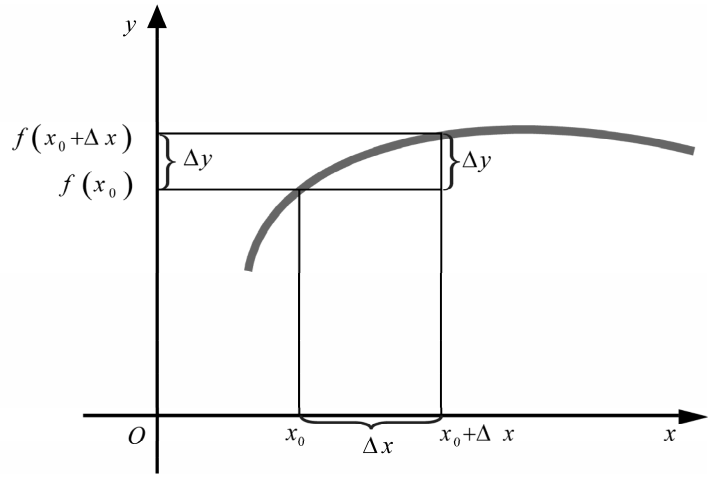
ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ

III

1. ПОИМ ЗА ИЗВОД. ПРИМЕРИ

Нека $y = f(x)$ е функција дефинирана во некоја околина на точката $x_0 \in D_f$. На независно променливата x во точката x_0 даваме промена Δx. Станува $x_0 + \Delta x \Rightarrow$ зависно променливата y добива промена

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right).$$



Го формираме количникот:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{промена на зависно променливата}}{\text{промена на независно променливта}} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

<u>Дефиниција 1:</u> Гранична вредност на количникот од промената на зависно променливата-функцијата и промената на независно променливата кога промената на независно променливата тежи кон нула, доколку тоа постои, се нарекува прв извод (или само извод) на функцијата $y = f\left(x\right)$ во точка x_0 и се означува со $y'\left(x_0\right)$ или $f'\left(x_0\right)$.

Значи,

$$\boxed{y'\left(x_0\right) \overset{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}}$$

Пример 1: $y = x^2, \quad y'(1) = ?$

$$x_0 = 1, \quad y'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{1} + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{1}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x} \cdot (2 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2 + 0 = 2.$$

Дефиниција 2: ***Функција $y = f(x)$ за која што изводот $y'(x_0)$ во точката x_0 постои (т.е. $y'(x_0) \in R$) се нарекува диференцијабилна функција во таа точка.***

Дефиниција 3: ***Функција $y = f(x)$ се нарекува диференцијабилна во интервалот $(a,b) \subseteq D_f$ ако таа е диференцијабилна функција во секоја точка x од тој интервал.***

Забелешка: Во случај на произволна точка x наместо да пишуваме $y'(x)$ т.е. $f'(x)$ пишуваме y' т.е. f'.

Теорема 1: ***Секоја диференцијабилна функција $y = f(x)$ во точка $x_0 \in D_f$ е непрекината функција во таа точка.***

Доказ:

$y = f(x)$ е диференцијабилна функција во точка x_0

$\Rightarrow \exists f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \in \mathbf{R}$. Имаме, $\forall x \neq x_0$

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0) \cdot 0}_{0}$$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbf{R} \Rightarrow y = f(x)$ е непрекината функција во точката x_0.

Пример 2: $y = x^n, \quad n \in \mathbf{N}. \quad y' = ?$

$$y' = y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\binom{n}{0} x^n (\Delta x)^0} + \binom{n}{1} x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 (\Delta x)^n - \cancel{x^n}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}\left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta x + \cdots + \binom{n}{n} (\Delta x)^{n-1}\right]}{\cancel{\Delta x}} = \binom{n}{1} x^{n-1} = n x^{n-1}$$

Значи,

$$\boxed{\left(x^n\right)' = n x^{n-1}} \qquad (\forall n \in \mathbf{N}).$$

Пример 3: $y = a^x, \quad (a \in \mathbf{R} \wedge a > 0) \quad y' = ?$

$$y' = y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Значи,

$$\boxed{\left(a^x\right)' = a^x \ln a}$$

Специјално, ако $a = e$, имаме

$$\left(e^x\right)' = e^x \ln e = e^x$$

т.е.

$$\boxed{\left(e^x\right)' = e^x}$$

Пример 4: $y = \ln x, \quad y' = ?$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{x \cdot \frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}.$$

Значи,

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Задача 1: Покажи дека $\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

Пример 5: $y = \sin x, \quad y' = ?$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x} = 2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{2\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2} = 1\cdot\cos x = \cos x.$$

Значи,

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

Задача 2: Слично покажи дека

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

Пример 6: $y = c, \quad c\in\mathbf{R} \quad y' = ?$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}0 = 0.$$

Значи,

$$\boxed{(c)' = 0}$$

2. ИЗВОД ОД ЗБИР, РАЗЛИКА, ПРОИЗВОД И КОЛИЧНИК

Теорема 1: ***Ако $y = f(x)$ и $y = g(x)$ се две диференцијабилни функции во точка $x \in D_f \cap D_g$ и $c \in R$, тогаш и функциите: производ на функција со константа $y = cf(x)$, збир и разлика $y = f(x) \pm g(x)$, производ $y = f(x) \cdot g(x)$ и количник $y = \frac{f(x)}{g(x)}$*** (во случај на количник $g(x) \neq 0$) ***на овие две функции се исто така диференцијабилни функции во точка x и при тоа важат формулите:***

1) $$\left(cf(x)\right)' = cf'(x)$$

2) $$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$$

3) $$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

4) $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Доказ:

$y = f(x)$ е диференцијабилна во точка x следи постои

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$y = g(x)$ е диференцијабилна во точка x следи постои

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Имаме,

1) $y = cf(x)$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} =$$

$$= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = cf'(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(cf(x)\right)' = cf'(x)}$$

Пример 1: $y' = ?$ ако:

а) $y = 7x^{15}$ б) $y = 10\sqrt{x}$ в) $y = -3\cos x$.

Решение:

а) $y' = \left(7x^{15}\right)' = 7\left(x^{15}\right)' = 7 \cdot 15x^{14} = 105x^{14}$

б) $y' = \left(10\sqrt{x}\right)' = 10\left(\sqrt{x}\right)' = 10 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$

в) $y' = \left(-3\cos x\right)' = -3\left(\cos x\right)' = -3 \cdot \left(-\sin x\right) = 3\sin x.$

2) $\quad y = f(x) + g(x)$

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - \left(f(x) + g(x)\right)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right) + \left(g(x+\Delta x) - g(x)\right)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right)}{\Delta x} + \frac{\left(g(x+\Delta x) - g(x)\right)}{\Delta x}\right] = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}$$

Следи

$$\boxed{\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)}$$

Слично се покажува дека за функцијата $y = f(x) - g(x)$ важи

$$\boxed{\left(f(x) - g(x)\right)' = f'(x) - g'(x) \cdot}$$

Пример 2: $\quad y = x^2 + 2^x$

$$\Rightarrow \quad y' = \left(x^2\right)' + \left(2^x\right)' = 2x + 2^x \ln 2$$

Пример 3: $y = e^x - \sin x$

$$\Rightarrow \quad y' = \left(e^x\right)' - \left(\sin x\right)' = e^x - \cos x.$$

Забелешка: Ова правило за извод од збир или разлика на две функции се обопштува на случај кога функцијата има повеќе од два, но конечен број на членови..

Пример 4: $y' = ?$ ако:

а) $y = 6x^3 - 7x^2 + 3x$

б) $y = 5^x + x^4 - \ln x + 10$

Решение:

а) $y' = \left(6x^3\right)' - \left(7x^2\right)' + \left(3x\right)' =$

$$= 6\left(x^3\right)' - 7\left(x^2\right)' + 3\left(x\right)' =$$

$$= 18x^2 - 14x + 3$$

б) $y' = \left(5^x\right)' + \left(x^4\right)' - \left(\ln x\right)' + \left(10\right)' =$

$$= 5^x \ln 5 + 4x^3 - \frac{1}{x} + 0 =$$

$$= 5^x \ln 5 + 4x^3 - \frac{1}{x}\cdot$$

3) $y = f(x) \cdot g(x)$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right)g(x+\Delta x) + f(x)\left(g(x+\Delta x) - g(x)\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Следи,

$$\boxed{\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).}$$

Специјално, ако во последната формула ставиме

$$g(x) \equiv c \quad (c = const)$$

имаме

$$\left(cf(x)\right)' = (c)' f(x) + cf'(x) = 0 \cdot f(x) + cf'(x) = cf'(x)$$

со што уште еднаш ја докажавме точноста на формулата 1) од оваа теорема.
Следува

$$\boxed{\left(cg(x)\right)' = cg'(x)}$$

Пример 5: $y = 4x^{10} \ln x$

$$y' = \left(4x^{10}\right)' \ln x + 4x^{10} (\ln x)' = 4\left(x^{10}\right)' \ln x + 4x^{10} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= 40x^9 \ln x + 4x^9 = 4x^9 (10 \ln x + 1).$$

Пример 6: $y = x^3 3^x$

$$y' = \left(x^3\right)' 3^x + x^3 \left(3^x\right)' = 3x^2 \cdot 3^x + x^3 3^x \ln 3 = x^2 3^x (3 + x \ln 3).$$

4) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \qquad \left(g(x) \neq 0\right)$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x) g(x) - f(x) g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x) g(x)}}{\dfrac{\Delta x}{1}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) g(x) - f(x) g(x+\Delta x)}{g(x) g(x+\Delta x) \cdot \Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) g(x) - f(x) g(x) + f(x) g(x) - f(x) g(x+\Delta x)}{g(x) g(x+\Delta x) \cdot \Delta x} =$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)}\cdot\frac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]g(x)-f(x)\left[g(x+\Delta x)-g(x)\right]}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)}\cdot\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x)-f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)}\cdot\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x)-f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]=$$
$$=\frac{1}{g(x)g(x)}\cdot\left[f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Следи,

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$$

<u>Пример 7:</u> $y=\frac{\ln x}{x^2}$

$$y'=\frac{(\ln x)'x^2-(\ln x)(x^2)'}{(x^2)^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{x^4}=$$
$$=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{x(1-2\ln x)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}\cdot$$

<u>Пример 8:</u> $y=tgx \quad y'=?$

$$y'=(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2}=$$
$$=\frac{\cos x\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Следи,

$$\boxed{(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}}$$

<u>Пример 9:</u> $y=ctgx \quad y'=?$

$$y=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Значи,

$$\boxed{(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

3. ИЗВОД ОД ИНВЕРЗНИ ФУНКЦИИ

Нека $y = f(x)$ е дадена функција за којашто постои инверзна функција $x = f^{-1}(y)$. Се поставува прашање: Која врска постои помеѓу изводот $y'(x)$ на дадената функција и изводот $x'(y)$ на нејзе инверзната функција?

Имаме

$$y' = y'(x) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} 1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{x'(y)},$$

бидејќи при $\Delta x \to 0 \;\Rightarrow$ и $\Delta y \to 0$.

Значи,

$$\boxed{y'(x) = \frac{1}{x'(y)}}$$

<u>Пример 1:</u> $y = \arcsin x, \quad y' = ?$

Од

$$y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y \Rightarrow x'(y) = \cos y$$

Согласно формулата за извод од инверзни функции, имаме

$$y' = y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Значи,

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

<u>Пример 2:</u> $y = \arccos x, \quad y' = ?$

Од

$$y = \arccos x \Rightarrow x = \cos y \Rightarrow x'(y) = -\sin y.$$

Според формулата

$$y' = y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$$

имаме

$$y' = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Значи,

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Пример 3: $y = \operatorname{arc} tgx, \quad y' = ?$

Од

$$y = \operatorname{arc} tgx \Rightarrow x = tgy \Rightarrow x'(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$$

Па имаме

$$y' = y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \left(\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 y}}\right)^2 = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

бидејќи

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}.$$

Значи,

$$\boxed{(\operatorname{arc} tgx)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

Пример 4: $y = \operatorname{arc} ctgx, \quad y' = ?$

Слично, од $y = arcctgx$ имаме $x = ctgy$ од каде што

$$x'(y) = -\frac{1}{\sin^2 y}$$

и согласно правилото за извод од инверзни функции

$$y' = y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y = -(\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2 y}})^2 = -\frac{1}{1+ctg^2 y} = -\frac{1}{1+x^2},$$

бидејќи

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}.$$

Значи,

$$\boxed{(\operatorname{arc} ctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}}$$

4. ТАБЕЛА НА ОСНОВНИ ИЗВОДИ

Имајќи ги в предвид заокружените формули во претходните три точки можеме да ја составиме следнава т.н. **табела на основни изводи** т.е. **изводи од елементарни функции**:

1) $(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (n \in \boldsymbol{N})$

2) $(a^x)' = a^x \ln a \qquad (a \in \boldsymbol{R} \wedge a > 0)$

3) $(e^x)' = e^x$

4) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

5) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

6) $(\sin x)' = \cos x$

7) $(\cos x)' = -\sin x$

8) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

9) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

10) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

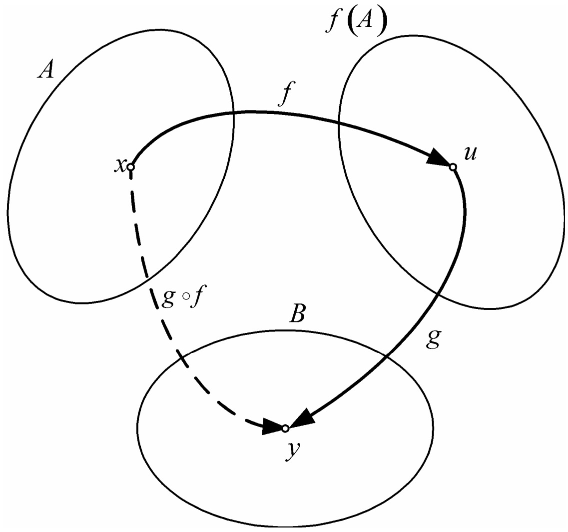
12) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

13) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

5. ИЗВОД ОД СЛОЖЕНИ ФУНКЦИИ

<u>Дефиниција:</u> Нека $A,B \subseteq R$ ***и нека*** $f : A \to f(A)$ ***и*** $g : f(A) \to B$ ***се две дадени функции такви што*** $x \xrightarrow{f} u$ ***(т.е.*** $u = f(x)$***) и*** $u \xrightarrow{g} y$ ***(т.е.*** $y = g(u)$***). Велиме дека е зададена сложена функција*** $g \circ f : A \to B$ ***и пишуваме*** $y = (g \circ f)(x)$***.***

Со други зборови велиме дека y е сложена функција од x .



Значи, $y=g(u), u=f(x) \Rightarrow y=g(f(x))$

Од

$$\left.\begin{array}{l} y=(g\circ f)(x) \\ y=g(f(x)) \end{array}\right\} \Rightarrow (\boldsymbol{gof})(\boldsymbol{x}) \overset{def}{=} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})).$$

Пример 1. $y=\sqrt{1+x^2}$

е сложена функција и имаме

$$y=\sqrt{u} \quad , \quad u=1+x^2.$$

Пример 2. $y=\left(x^2+3x+5\right)^4$

е сложена функција и имаме

$$y=u^4 \quad , \quad u=x^2+3x+5.$$

Пример 3: $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x} \quad \Rightarrow \quad y=\ln u \quad , \quad u=\dfrac{1-x}{1+x}.$

Забелешка: Ако во елементарните функции, кои што ги набројавме во табелата на основни изводи, на местото од независно променливата стои некоја функција, тогаш имаме сложена функција.

Теорема: ***Ако $u=f(x)$ е диференцијабилна функција во точка $x\in D_f$ и ако $y=g(u)$ е диференцијабилна функција во точка $u\left(=f(x)\right)\in D_g$, тогаш и сложената функција $y=(g\circ f)(x)$ е диференцијабилна функција во точката x и притоа важи формулата***

$$\boxed{y'=y'(x)=y'(u)\cdot u'(x)}$$

Доказ:

Земаме $x\in D_f$

На x даваме промена Δx. Станува $x+\Delta x$, следува дека променливата u добива промена:

$$\Delta u=f(x+\Delta x)-f(x).$$

$\Rightarrow$ доаѓа до промена на y за

$$\Delta y=g(u+\Delta u)-g(u).$$

Како резултат на промена на x за Δx доаѓа до промена и на сложената функција $y=(g\circ f)(x)$ за Δy:

$$\Delta y=(g\circ f)(x+\Delta x)-(g\circ f)(x).$$

Имаме

$$\begin{aligned} y' = y'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(g\circ f)(x+\Delta x)-(g\circ f)(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g\left(f(x+\Delta x)\right)-g\left(f(x)\right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(u+\Delta u)-g(u)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(u+\Delta u)-g(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(u+\Delta u)-g(u)}{\Delta u}\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(u+\Delta u)-g(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \\ &= g'(u)\cdot f'(x) = y'(u)\cdot u'(x)\cdot \end{aligned}$$

Значи,

$$y'(x) = y'(u)\cdot u'(x)$$

со што теоремата е докажана.

__Пример 1:__ $y=\sqrt{1+x^2}, \quad y' = ?$

Имаме

$$\begin{array}{ll} y=\sqrt{u}, & u = 1+x^2 \\ \Downarrow & \Downarrow \\ y'(u)=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}, & u'(x)=2x \end{array}$$

Следува

$$y' = y'(u)\cdot u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

__Пример 2:__ $y=\left(x^2+3x+5\right)^4, \quad y' = ?$

Имаме

$$\begin{array}{ll} y=u^4, & u = x^2+3x+5 \\ \Downarrow & \Downarrow \\ y'(u)=4u^3, & u'(x)=2x+3 \end{array}$$

и следува дека

$$y' = y'(u)\cdot u'(x) = 4u^3\cdot(2x+3) = 4\left(x^2+3x+5\right)^3(2x+3).$$

Пример 3: $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}, \quad y' = ?$

Слично,

$$y = \ln u, \qquad u = \frac{1-x}{1+x}$$

од каде што

$$y'(u) = \frac{1}{u}, \quad u'(x) = \frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{-1(1+x)-(1-x)1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

и следува дека

$$y' = y'(u)\cdot u'(x) = \frac{1}{u}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2(1+x)}{(1-x)(1+x)^2} = \frac{-2}{(1-x)(1+x)}.$$

Пример 4: $y = e^{x^2+5x-7}, \quad y' = ?$

Имаме

$$y = e^u, \qquad u = x^2+5x-7$$

$$y'(u) = e^u, \quad u'(x) = 2x+5$$

и следува дека

$$y' = y'(u)\cdot u'(x) = e^u\cdot(2x+5) = e^{x^2+5x-7}(2x+5).$$

Со цел што побргу да се најде извод на сложена функција, се препорачува не постапно применување на правилата за извод од сложена функција (како во претходните четири примери) туку тоа да се прави директно.

Пример 1`: $y = \sqrt{1-x^2}, \quad y' = ?$

Имаме

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(1-x^2\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 2`: $y = \left(x^2+3x+5\right)^4, \quad y' = ?$

$$\Rightarrow y' = 4\left(x^2+3x+5\right)^3\left(x^2+3x+5\right)' = 4\left(x^2+3x+5\right)^3(2x+3).$$

Пример 3`: $y=\ln\frac{1-x}{1+x}, \quad y'=?$

$$y'=\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)(1+x)'}{(1+x)^2}=\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{-1(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}=$$

$$=\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2}=\frac{-2}{(1-x)(1+x)}=-\frac{2}{1-x^2}.$$

Пример 4`: $y=e^{x^2+5x-7}, \quad y'=?$

$$\Rightarrow y'=e^{x^2+5x-7}\left(x^2+5x-7\right)'=e^{x^2+5x-7}(2x+5).$$

Пример 5: $y=e^{\sqrt{1+\ln x}}$,

$$y'=e^{\sqrt{1+\ln x}}\cdot\left(\sqrt{1+\ln x}\right)'=e^{\sqrt{1+\ln x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}\cdot(1+\ln x)'=$$

$$=e^{\sqrt{1+\ln x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{e^{\sqrt{1+\ln x}}}{2x\sqrt{1+\ln x}}\cdot$$

Задача 1: $y'=?$ ако: а) $y=\ln\sqrt{1+x^2}$, б) $y=arctg\sqrt{x}$.

Задача 2: Провери дали функцијата $y=\ln\frac{1}{1+x}$ задоволува равенство $xy'+1=e^y$.

6. ИЗВОД ОД ИМПЛИЦИТНИ ФУНКЦИИ

Нека функција е зададена во имплицитен облик $F(x,y)=0$. За да најдеме извод од вака зададената функција бараме извод од секој нејзин член водејќи притоа сметка дека x е независно променлива, а y зависи од x т.е. е функција од x.

Пример 1: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}, \quad a=const, \quad y'=?$

Решение:

$$\left(\sqrt{x}\right)'+\left(\sqrt{y}\right)'=\left(\sqrt{a}\right)'$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=0$$

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y=-\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}=-\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot$$

Пример 2: $x^2+y^2-4x+4y-1=0 \quad y'=?$

Решение:

$$2x+2yy'-4+4y'=0$$

$$(2y+4)\,y'=4-2x$$

$$y'=\frac{4-2x}{2y+4}=\frac{2-x}{y+2}\cdot$$

Забелешка 1: Знаеме дека за функцијата $y=x^n$, $(n\in\mathbf{N})$ важи $y'=nx^{n-1}$. Сега ќе покажеме дека слична формула важи и во случај кога степеновиот показател е било кој реален број.

Нека $$y=x^r \quad , \quad (r\in\mathbf{R})$$

$$\ln y=r\ln x$$

Имаме $$\frac{1}{y}y'=r\frac{1}{x}$$

$$y'=ry\frac{1}{x}$$

$$y'=rx^r\frac{1}{x}$$

$$y'=rx^{r-1}\Rightarrow \boxed{\left(x^r\right)'=rx^{r-1}}$$

Пример 3: $y=\sqrt[3]{x^2} \quad y'=?$

Решение:

$$y=x^{\frac{2}{3}}$$

$$y'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Пример 4: $y=\frac{4}{x^5} \quad y'=?$

Решение:

$$y=4x^{-5}$$

$$y'=-20x^{-6}=-\frac{20}{x^6}.$$

Забелешка 2: Нека е дадена функција од облик $y=f(x)^{\varphi(x)}$, при што независно променлива се наоѓа и во основа и во степеновиот показател. За да најдеме y' прво логаритмираме:

$$\ln y=\varphi(x)\ln f(x),$$

а потоа бараме извод

$$\frac{1}{y}y'=\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\varphi(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$\frac{y'}{y}=\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}$$

$$y'=y\left[\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}\right]$$

$$y'=f(x)^{\varphi(x)}\left[\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}\right].$$

Пример 5: $y=x^{\sqrt{x}},\quad y'=?$

Решение:

Имаме

$$\ln y=\sqrt{x}\ln x$$

$$\frac{1}{y}y'=\left(\sqrt{x}\right)'\ln x+\sqrt{x}\left(\ln x\right)'$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$y'=y\left[\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right]=x^{\sqrt{x}}\left[\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right].$$

Задача: Најди $y'=?$ ако:

а) $x^2+y^2+2x-y-1=0$ **б)** $\sin x+\sin y=0$ **в)** $e^{xy}+y^3-x^2=0$

г) $arctg\frac{x}{y}-\ln x+\ln y=0$ **д)** $x^3+y^3-3xy=0.$

7. ИЗВОД ОД ПАРАМЕТАРСКИ ЗАДАДЕНИ ФУНКЦИИ

Нека y како функција од x т.е. $y=f(x)$ е зададена во параметарски облик

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t\in(\alpha,\beta)$ е параметар.

Теорема: ***Ако*** $x=\varphi(t)$ ***и*** $y=\psi(t)$ ***се диференцијабилни функции од*** t ***и при тоа*** $x'(t)=\varphi'(t)=\dot{x}\neq 0$, ***тогаш и*** $y=f(x)$ ***е диференцијабилна функција и важи формулата***

$$\boxed{y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}} \quad \textbf{т.е.} \quad \boxed{y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}}$$

Доказ:

На параметарот t даваме промена Δt. Станува $t+\Delta t$. Доаѓа до промена на x за $\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)$, а доаѓа и до промена на y за $\Delta y=\psi(t+\Delta t)-\psi(t)$.

Имаме

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dfrac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t}}{\dfrac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \Rightarrow y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Пример 1: $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ $y'=?$

Решение:

$$\dot{x}=3\cos^2 t\cdot(\cos t)'=3\cos^2 t\cdot(-\sin t)=-3\cos^2 t\cdot\sin t$$

$$\dot{y}=3\sin^2 t\cdot(\sin t)'=3\sin^2 t\cdot\cos t$$

$$\Rightarrow y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{3\sin^2 t\cdot\cos t}{-3\cos^2 t\cdot\sin t}=-\frac{\sin t}{\cos t}=-tgt.$$

Задача 1: Најди $y' = ?$ ако:

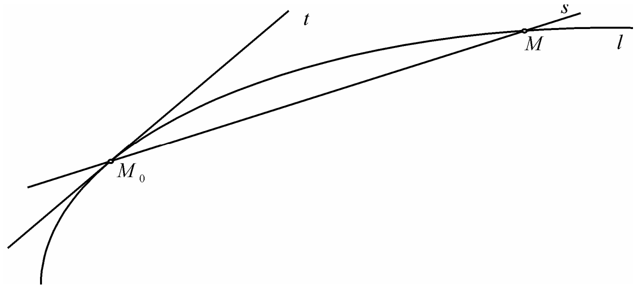
1) $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\dfrac{2t}{1+t} \\ y=\dfrac{1-t}{1+t} \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-\cos t \end{cases}$

Задача 2: Покажи дека функцијата $\begin{cases} x=\dfrac{1+\ln t}{t^2} \\ y=\dfrac{3+2\ln t}{t} \end{cases}$ задоволува равенство

$$yy' = 2xy'^2 + 1.$$

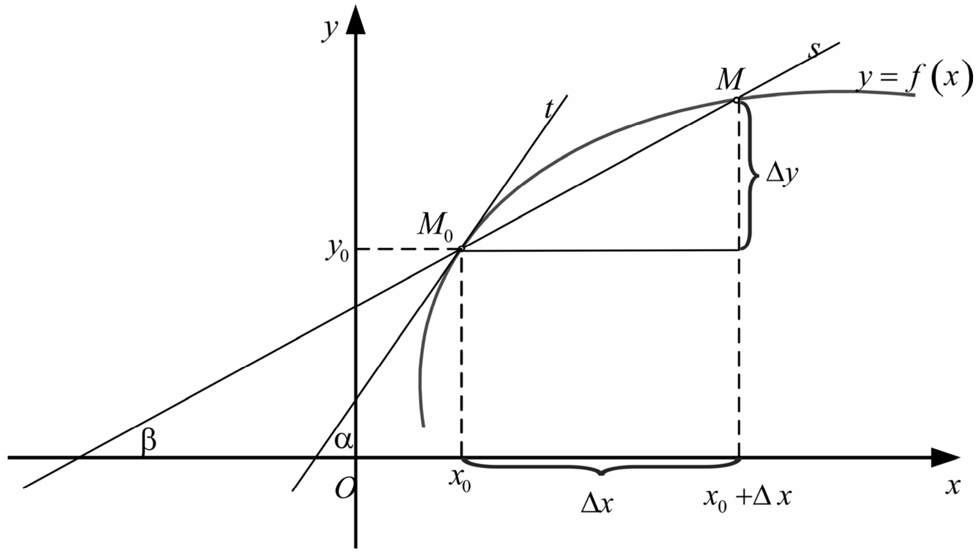
8. ГЕОМЕТРИСКО ЗНАЧЕЊЕ НА ИЗВОД. РАВЕНКИ НА ТАНГЕНТА И НОРМАЛА

Дефиниција 1: ***Да земеме една крива l и на неа две точки M_0 и M. Права s што минува низ точките M_0 и M се наречува секанта на кривата l.***



Дефиниција 2: ***Гранична положба t на секантата $s = M_0M$ кога точката M, движејќи се по кривата l, се придвижува кон точката M_0 се нарекува тангента на кривата l во точката M_0.***

Нека $y = f(x)$ е дадена непрекината функција во околина на точката $x_0 \in D_f$ и диференцијабилна во таа точка. Во однос на една правоаголна Декартова координатна система оваа функција има свој график - крива l. На кривата l земаме фиксна точка $M_0(x_0, y_0)$, при што $y_0 = f(x_0)$. Со α да го означиме аголот што го зафаќа тангентата t, на кривата l во точката M_0, со позитивниот смер на апцисната оска. Во точка x_0 на независно променливата величина x даваме промена Δx.



Со тоа на апсцисната оска ја имаме точката $x_0+\Delta x$ а во пресекот на вертикалата, повлечена во $x_0+\Delta x$, со кривата l ја имаме точката $M\left(x_0+\Delta x, f\left(x_0+\Delta x\right)\right)$. Аголот што го зафаќа секантата $s=M_0M$ со позитивниот смер на апсцисната оска да го означиме со β.

Сега поминуваме на граничен процес пуштајќи $\Delta x\to 0$. При овој процес точката $x_0+\Delta x$, на x-оската, ќе се приближува кон точката x_0, како резултат на што точката M ќе се движи по кривата l и ќе се приближува кон точката M_0. Поради ова секантата s ќе се приближува кон тангентата t, што од своја страна ќе повлече дека $\sphericalangle\beta$ ќе тежи кон $\sphericalangle\alpha$. Значи

$$\Delta x\to 0\Rightarrow x_0+\Delta x\to x_0\Rightarrow M\to M_0\Rightarrow s\to t\Rightarrow \sphericalangle\beta\to\sphericalangle\alpha .$$

Поради ова од

$$tg\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0} tg\beta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

т.е.

$$\boxed{tg\alpha=f'\left(x_0\right)}$$

Од последното равенство, како и од познатиот факт дека

$$tg\alpha=k_t$$

е коефициент на правец на правата t, го имаме следното геометриско значење на изводот:

Првиот извод $f'(x_0)$ на функцијата $y=f(x)$, пресметан во точката $x_0\in D_f$, е еднаков на коефициентот на правецот k_t на тангентата t повлечена во точката $M_0(x_0,y_0)\in l$ т.е.

$$\boxed{f'(x_0)=k_t}$$

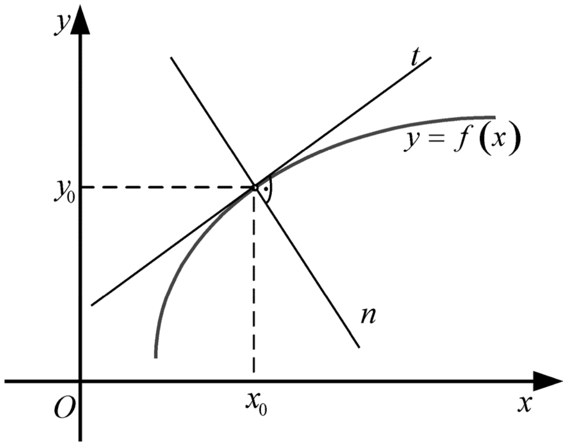
Имајќи ја в предвид формулата

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

за равенка на права низ една точка $M_0(x_0,y_0)$ и даден коефициент на правец k, за равенка на тангентата t на кривата l низ точка $M_0(x_0,y_0)\in l$ добиваме

$$\boxed{y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)}$$

<u>Дефиниција 3:</u> Права n што минува низ точката $M_0\in l$ и стои нормално на тангентата t на кривата l во таа точка се вика нормала на кривата l повлечена во точката M_0.



Согласно условот за нормалност

$$k_n=-\frac{1}{k_t}=-\frac{1}{f'(x_0)},$$

за равенката на нормалата n на кривата l добиваме

$$\boxed{y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)}$$

<u>Пример 1:</u> Состави равенки на тангента и нормала на крива $y=\dfrac{1}{e^x+2}$ во нејзина точка со апсциса 0.

<u>Решение:</u> $x_0=0,\quad y_0=\dfrac{1}{e^0+2}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow M_0(0,\dfrac{1}{3})$

$$y'=\frac{(1)'(e^x+2)-1\cdot(e^x+2)'}{(e^x+2)^2}=\frac{0(e^x+2)-1\cdot e^x}{(e^x+2)^2}=\frac{-e^x}{(e^x+2)^2}$$

$$y'(0)=\frac{-e^0}{\left(e^0+2\right)^2}=-\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow t: \quad y-\frac{1}{3}=-\frac{1}{9}(x-0) \qquad\qquad n: \quad y-\frac{1}{3}=-\frac{1}{-\frac{1}{9}}(x-0)$$

$$y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{3} \qquad\qquad y=9x+\frac{1}{3}.$$

9. ФИЗИЧКО ЗНАЧЕЊЕ НА ИЗВОД

Нека со s го означиме патот што го изминува една материјална точка за време t. Јасно е дека изминатиот пат s зависи од времето t. Со други зборови патот s е функција од времето t т.е. $s=s(t)$.

Ако една материјална точка се движи рамномерно (со постојана брзина) и праволиниски, тогаш изминатиот пат $s\left(=s(t)\right)$ поделен со времето t (за кое што е изминат тој пат) ни ја дава брзината на рамномерното движење т.е.

$$\frac{s}{t}=v=const$$

Во случај на рамномерно движење, материјалната точка за еднакви временски интервали Δt ќе изминува еднакви патишта Δs, поради што односот

$\frac{\Delta s}{\Delta t}=const=v$-брзина на рамномерното движење.

Сега, нека материјалната точка се движи нерамномерно (со променлива брзина) и праволиниски. Во овој случај за еднакви временски интервали Δt материјалната точка ќе изминува различни патишта Δs, поради што односот $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ нема да биде ист за секој од временските интервали $[t,t+\Delta t]$ со должина Δt.

<u>Дефиниција 1:</u> Односот $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ од изминат пат Δs за време Δt во интервалот $[t,t+\Delta t]$ се нарекува средна брзина на материјалната точка во интервалот $[t,t+\Delta t]$ и се означува v_{cp}.

Значи

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=v_{cp} \text{ во } [t,t+\Delta t]$$

Оваа средна брзина е една замислена брзина со која што ако материјалната точка би се движела рамномерно во временски интервал $[t, t+\Delta t]$ ќе го измине истиот тој пат Δs како и во случај на нерамномерното движење.

<u>Дефиниција 2:</u> Граничната вредност $\lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{sr}$ на средната брзина во интервалот $[t, t+\Delta t]$, кога $\Delta t \to 0$ се нарекува моментна брзина или брзина на материјална точка во момент t. Се означува со $v(t)$.

Значи,

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_{cp} = v(t)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = v(t)$$

$$\boxed{s'(t) = v(t)}$$

Според тоа, **извод од изминат пат како функција од време е еднаков на моментната брзина.**

Слично, при нерамномерно праволиниско движење во различит временски момент t брзината v е различна, што значи дека брзината е функција од време т.е. $v = v(t)$.

<u>Дефиниција 3:</u> Количникот

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\text{промена на брзина}}{\text{промена на време}} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = a_{cp}$$

се нарекува средно забрзување на материјална точка во интервалот $[t, t+\Delta t]$.

<u>Дефиниција 4:</u> Граничната вредност $\lim\limits_{\Delta t \to 0} a_{\text{ср}}$, на средното забрзување во временски интервал $[t, t+\Delta t]$, се нарекува моментно забрзување т.е. забрзување во моментот t.

Значи,

$$\lim_{\Delta t \to 0} a_{cp} = a(t)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a(t)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = a(t)$$

$$\boxed{v'(t) = a(t)}$$

Според тоа, **извод од брзина како функција од време е еднаков на моментното забрзување.**

10. ХЕМИСКО ЗНАЧЕЊЕ НА ИЗВОД

Нека со x mola означиме количество супстанца од некој реагенс што изреагирало за време t. Јасно е дека изреагираното количество супстанца x ќе зависи од времето t т.е. x е функција од времето t т.е. $x = x(t)$. Ако дојде до промена на времето за Δt $\Rightarrow$ ќе дојде до промена и на изреагираното количество супстанца. Таа промена е дадена со формулата

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t).$$

<u>Дефиниција 1:</u> Средна брзина на хемиска реакција во временскиот интервал од t до $t + \Delta t$ се нарекува количникот

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = v_{cp},$$

а брзина на хемиска реакција во моментот t се нарекува граничната вредност

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{cp}} = v(t).$$

Според тоа

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t).$$

т.е.

$$\boxed{x'(t) = v(t)}$$

Значи, **извод од изреагирано количество супстанца, како функција од време, е еднаков на моментната брзина на хемиската реакција.**

11. ПОИМ ЗА ДИФЕРЕНЦИЈАЛ НА ФУНКЦИЈА

Нека $y = f(x)$ е дадена диференцијабилна функција во точка $x \in D_f$. Тоа значи дека постои граничната вредност

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Значи, кога Δx се повеќе и повеќе се приближува кон 0, количникот $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ се повеќе се приближува до границата $f'(x)$, што значи дека разликата помеѓу споменатиот количник и границата се намалува и тежи кон 0. Имаме

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = h, \quad \text{при што } h \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + h$$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + h\Delta x$$

Дефиниција 1: ***Производот $f'(x)\Delta x$, од изводот $f'(x)$ на функцијата $y = f(x)$ во точка $x \in D_f$ и промената Δx на независно променливата величина, се нарекува прв диференцијал (или само диференцијал) на функцијата $y = f(x)$ во точка x и се означува со $df(x)$ или $dy(x)$ или dy.***

Значи

$$\boxed{dy \overset{def}{=} f'(x)\Delta x}$$

Специјално, ако $y = x \Rightarrow f'(x) = 1$, па имаме: $dy = 1 \cdot \Delta x$

$$dx = \Delta x.$$

Според тоа, за диференцијал на функцијата ја имаме формулата:

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

Пример 1: $y = \sqrt{1+x^2}, \quad dy = ?$

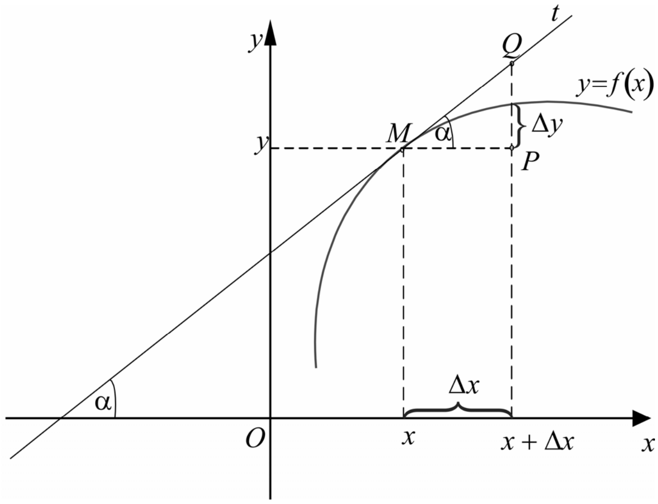
Решение:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

Забелешка: Од формулата за диференцијал на функција

$$dy = f'(x)dx \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

т.е дека изводот $f'(x)$ на функцијата $y = f(x)$ е количник од диференцијал на функција и диференцијал на независно променливата. Од тука се добива друга ознака



за изводот на функцијата $y = f(x)$, а тоа е $\frac{dy}{dx}$.

Се поставува прашање кое е геометриското значење на првиот диференцијал dy на функцијата $y = f(x)$. Имаме

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{MP}} = tg\alpha \Rightarrow \overline{PQ} = \overline{MP}tg\alpha$$

$$\overline{PQ} = \Delta x \cdot tg\alpha \Rightarrow \overline{PQ} = \Delta x \cdot f'(x)$$

$$\Rightarrow \overline{PQ} = dy.$$

Значи, прв диференцијал на функција геометриски е еднаков на промената по тангентата t на кривата $y = f(x)$ во точката x.

Да се навратиме на формулата

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + h\Delta x$$

Имаме $\Delta y - f'(x)\Delta x = h \cdot \Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

т.е. $\Delta y - dy \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Според тоа, во колку Δx е се помало и помало во толку разликата $\Delta y - dy$ е се помала и се приближува кон 0. Затоа за мали Δx имаме

$$\Delta y - dy \approx 0 \quad \text{т.е.} \quad \boxed{\Delta y \approx dy}$$

Ова приближно равенство е во толку поточно доколку Δx е се помало и помало.

Поаѓајќи од формулите за извод од збир, разлика, производ, количник и извод од сложени функции, како и од формулата за диференцијал на функција, лесно се докажуваат следниве операциски правила за диференцијал:

1) $d\left(cf(x)\right) = cdf(x)$

2) $d\left(f(x) \pm g(x)\right) = df(x) \pm dg(x)$

3) $d\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \left(df(x)\right) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x)$

4) $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\left(df(x)\right) \cdot g(x) - f(x) \cdot dg(x)}{g^2(x)} \qquad \left(g(x) \neq 0\right)$

5) Ако $y = f(u)$, $u = g(x)$, тогаш $dy = f'(u)du$ и $du = g'(x)dx$.

Пример 2: Пресметај промена и диференцијал на функција $y=3x^2+x+3$ во точка $x=1$, при промена на независно променливата за $\Delta x=0,01$.

Решение:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f(1+0,01)-f(1)=f(1,01)-f(1)=$$

$$=3\cdot(1,01)^2+1,01+3-\left(3\cdot1^2+1+3\right)=3\cdot1,0201+4,01-7=0,0703$$

$$dy=f'(x)dx$$

$$dy=(6x+1)dx$$

$$dy=(6\cdot1+1)\cdot0,01=0,07.$$

Пример 3: Приближно пресметај ја промената на функцијата $y=\sqrt[3]{x^2-1}$, ако независно променливата x се промени од $x=3$ на $x=2,95$.

Решение:

$$\Delta y\approx dy \qquad y=\sqrt[3]{x^2-1}$$

$$dy=f'(x)dx \qquad y=\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$y'=\frac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(x^2-1\right)'=\frac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot2x=\frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}$$

$$dy=\frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}dx$$

$$x=3,\quad dx=\Delta x=2,95-3=-0,05$$

$$dy=\frac{2\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt[3]{\left(3^2-1\right)^2}}\cdot(-0,05)=-\frac{0,1}{4}=-0,025$$

$$\Rightarrow\Delta y\approx-0,025.$$

Пример 4: Приближно пресметај ја вредноста на изразот $arctg\sqrt{2,04^2-3}$.

Решение:

$$arctg\sqrt{2,04^2-3}=arctg\sqrt{(2+0,04)^2-3}=arctg\sqrt{(x+\Delta x)^2-3}=f(x+\Delta x)=$$

$$y=\underbrace{arctg\sqrt{x^2-3}}_{f(x)}$$

$$=f(x)+\Delta y\approx f(x)+dy$$

$$\approx f(2)+dy$$

$$f(2)=arctg\sqrt{2^2-3}=arctg\sqrt{1}=arctg1=\frac{\pi}{4}=\frac{3,14}{4}=0,785$$

$$dy=f'(x)dx$$

$$y'=\frac{1}{1+\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x^2-3}\right)'=\frac{1}{1+x^2-3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-3}}\cdot\left(x^2-3\right)'=$$

$$=\frac{1}{x^2-2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-3}}\cdot\cancel{2}x=\frac{x}{\left(x^2-2\right)\sqrt{x^2-3}}$$

$$\Rightarrow dy=\frac{x}{\left(x^2-2\right)\sqrt{x^2-3}}dx=\frac{2}{\left(2^2-2\right)\sqrt{2^2-3}}\cdot 0,04=0,04$$

$$x=2,\quad \Delta x=0,04$$

$$\Rightarrow arctg\sqrt{2,04^2-3}\approx 0,785+0,04=0,825.$$

Задача 1: Пресметај приближно:

а) $\sqrt[3]{2,97^2-1}$ **б)** $arctg\left(3-\frac{2,05^3}{4}\right).$

12. ИЗВОДИ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛИ ОД ПОВИСОК РЕД

Нека $y=f(x)$ е диференцијабилна функција во некој интервал $(a,b)\subseteq D_f$. Следува дека постои изводот од први ред

$$y'=f'(x),\quad x\in(a,b).$$

Извод од првиот извод

$$(y')'=y''=f''(x)$$

се нарекува **извод од втори ред**.

Извод од вториот извод

$$(y'')'=y'''=f'''(x)$$

се нарекува **извод од трети ред**.

Општо, извод од изводот од $n-1$-иот ред се нарекува **извод од n-ти ред**

$$\left(y^{(n-1)}\right)'=y^{(n)}=f^{(n)}(x)$$

Пример 1: $y=x\ln x,\quad y'''=?$

$$y' = (x)' \ln x + x(\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$y'' = (\ln x)' + (1)' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$y''' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Слично на изводи од повисок ред се дефинираат и диференцијали од повисок ред. Имаме:

$$y = f(x)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{dy = f'(x)dx}$ - **диференцијал од први ред**

Диференцијал од диференцијал од први ред

$$d(dy) \overset{def}{=} d^2 y$$

се нарекува **диференцијал од втори ред**.

Диференцијал од диференцијал од втори ред

$$d(d^2 y) \overset{def}{=} d^3 y$$

се нарекува **диференцијал од трети ред.**

Општо, диференцијал од диференцијалот од $n-1$-виот ред

$$d(d^{n-1} y) \overset{def}{=} d^n y$$

се нарекува **диференцијал од n-ти ред**.

Сега да видиме на што се еднакви диференцијалите од повисок ред. За диференцијал од втори ред имаме

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x)) \cdot dx + f'(x) \cdot d(dx) =$$

$$= (f'(x))' dx \cdot dx + f'(x) \cdot (dx)' dx = f''(x)(dx)^2 + f'(x) \cdot 0 \cdot dx = f''(x)(dx)^2$$

$\Rightarrow$ $\boxed{d^2 y = f''(x)dx^2}$

од каде што се добива

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x)$$

друга ознака за вториот извод $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

За диференцијал од трети ред, имаме

$$d^3y = d\left(d^2y\right) = d\left(f''(x)dx^2\right) = d\left(f''(x)\right)\cdot dx^2 + f''(x)\cdot d\left(dx^2\right) =$$

$$= \left(f''(x)\right)' dx\cdot dx^2 + f''(x)\cdot\left(dx^2\right)' dx = f'''(x)(dx)^3 + f''(x)\cdot 0\cdot dx = f'''(x)(dx)^3$$

$\Rightarrow$ $\boxed{d^3y = f'''(x)dx^3}$

Од последната формула добиваме

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$$

т.е. добиваме друга ознака $\frac{d^3y}{dx^3}$ за изводот од трети ред на функцијата $y = f(x)$.

Индуктивно, за диференцијал од n-ти ред добиваме

$$\boxed{d^ny = f^{(n)}(x)dx^n,}$$

од каде ја имаме другата ознака на изводот од n-ти ред $\frac{d^ny}{dx^n}$ за функцијата $y = f(x)$.

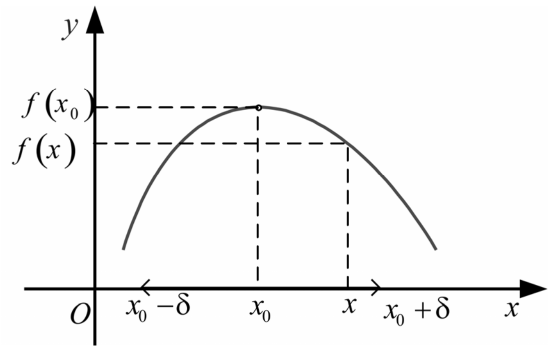
<u>Задача 1:</u> Провери дали функцијата $y = e^{-x}\sin 3x$ задоволува равенство $y'' + 2y' + 10y = 0$.

<u>Задача 2:</u> Слично на претходната задача:

а) $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ $\quad xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0$ б) $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ $\quad y''' - 13y' - 12y = 0.$

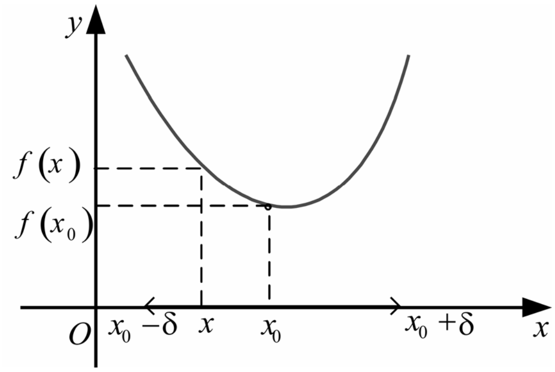
13. ЛОКАЛНИ ЕКСТРЕМИ И ТЕОРЕМА НА ФЕРМА

<u>Дефиниција 1:</u> За функцијата $y = f(x)$ ***велиме дека има локален максимум во точката*** $x_0 \in D_f$ ***ако постои околина*** $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f$ ***така што*** $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ***важи*** $f(x) \le f(x_0)$.



Дефиниција 2: ***За функцијата $y = f(x)$ велиме дека има локален минимум во точката $x_0 \in D_f$ ако постои околина $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f$ така што***

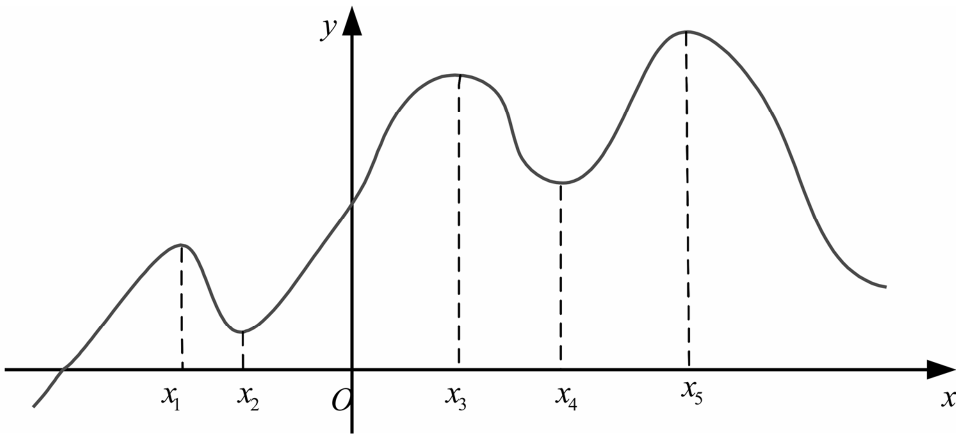
$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ важи } f(x) \geq f(x_0).$$



Дефиниција 3: ***Локален максимум и локален минимум се познати под заедничко име локални екстреми.***

Треба да забележиме дека една функција може да има (еден или повеќе локални екстреми), а може и да нема локални екстреми.

На пример, функцијата $y = f(x)$ зададена графички на следниот начин има 5 локални екстреми и тоа: два локални минимума и три локални максимума.



Теорема 1: ***(на Ферма) Ако функцијата $y = f(x)$ има локален екстрем во точката $x_0 \in D_f$ и ако во таа точка функцијата е диференцијабилна, тогаш првиот извод на функцијата во таа точка е еднаков на нула т.е. $f'(x_0) = 0$.***

Доказ: Нека функцијата $y = f(x)$ во точката x_0 има локален максимум $\Rightarrow \exists$ околина $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f$ на точката x_0 т.ш.

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ важи } f(x) \leq f(x_0).$$

На независно променливата величина x во точката x_0 даваме промена Δx (ова Δx може да е позитивно, а може да е и негативно) т.ш.

$$x_0+\Delta x\in\left(x_0-\delta,x_0+\delta\right)$$

За $\Delta x>0$ т.е. $x_0<x_0+\Delta x<x_0+\delta$, имаме

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=\frac{-}{+}\le 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}\le \lim_{\Delta x\to 0}0$$

$$\boxed{f'\left(x_0\right)\le 0}$$

За $\Delta x<0$ т.е. $x_0-\delta<x_0+\Delta x<x_0$ имаме

$$\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=\frac{-}{-}\ge 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}\ge \lim_{\Delta x\to 0}0$$

$$\boxed{f'\left(x_0\right)\ge 0}$$

Од двете добиени неравенства

$$\begin{cases} f'(x_0)\le 0 \\ f'(x_0)\ge 0, \end{cases}$$

имајќи в предвид дека функцијата $y=f\left(x\right)$ е диференцијабилна во точката $x_0\in D_f$, добиваме

$$\boxed{f'\left(x_0\right)=0}$$

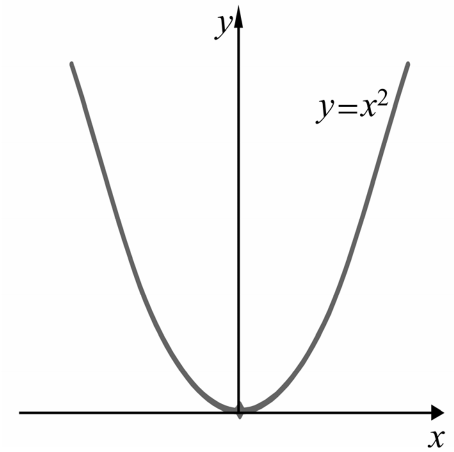
Слично се покажува теоремата на Ферма и во случај на локален минимум во точката x_0.

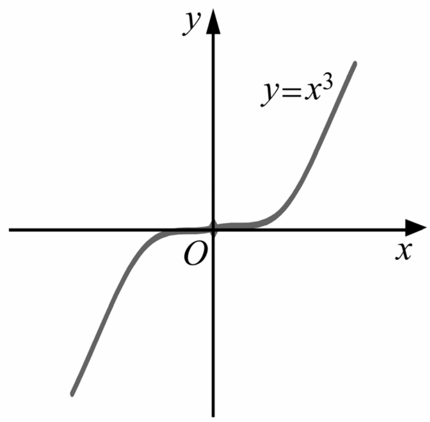
Забелешка: Треба да забележиме дека во случај на диференцијабилни функции во точка $x_0\in D_f$ од постоење на локален екстрем во $x_0\Rightarrow$ првиот извод во таа точка е нула т.е. $f'\left(x_0\right)=0$, додека обратното во општ случај не важи, т.е. од $f'\left(x_0\right)=0$ не мора да следува дека во точката x_0 има локален екстрем.

Пример 1:

$y=x^2$	$y=x^3$
$y'=2x$	$y'=3x^2$
$x_0=0$	$x_0=0$
$y'_{(0)}=2\cdot 0=0$	$y'_{(0)}=2\cdot 0^2=0$

Гледаме дека и двете функции $y=x^2$ и $y=x^3$ во точката $x_0=0$ имаат прв извод еднаков на нула. Но, првата функција во $x_0=0$ има локален екстрем (минимум), а втората функција во $x_0=0$ нема локален екстрем.





Дефиниција 4: ***Точка $x_0 \in D_f$ во која што првиот извод на функцијата $y=f(x)$ е еднаков на нула се нарекува стационарна точка за функцијата $y=f(x)$.***

Согласно претходниот пример, една функција $y=f(x)$ во стационарна точка x_0 може да има локален екстрем но и не мора да има локален екстрем.

Дефиниција 5: ***Точка $P(x_0, f(x_0))$, при што x_0 е стационарна точка во која што функцијата $y=f(x)$ нема локален екстрем, се нарекува превојна точка за функцијата $y=f(x)$.***

Да забележиме дека превојна точка е точка во која што функцијата од испупчена надолу (**конвексна**) поминува во испупчена нагоре (**конкавна**) и обратно.

Природата на стационарната точка $x_0 \in D_f$ на функцијата $y=f(x)$ може да се испита со помош на:

1. **интервали на монотоност** и
2. **изводи од повисок ред**.

Во првиот случај се користат следниве две теореми:

Теорема 2: ***Ако $y=f(x)$ е диференцијабилна функција во интервалот (a,b) и притоа $f'(x)>0$ $\forall x \in (a,b)$, тогаш $y=f(x)$ е монотоно растечка во споменатиот интервал.***

***<u>Теорема 3:</u>* Ако $y = f(x)$ е диференцијабилна функција во интервалот (a,b) и притоа $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$, тогаш $y = f(x)$ е монотоно опаднувачка функција во споменатиот интервал.**

Во случај на испитување на стационарната точка x_0 за функцијата $y = f(x)$ со помош на изводи од повисок ред го користиме следново

<u>Правило:</u> Бараме извод од втори ред $y'' = f''(x)$.

Ако	$f''(x_0) < 0,$	тогаш функцијата има локален maximum;
Ако	$f''(x_0) > 0,$	тогаш функцијата има локален minimum;
Ако	$f''(x_0) = 0,$	тогаш бараме извод од трети ред $y''' = f'''(x)$.
За	$f'''(x_0) \neq 0$	функцијата има превојна точка $P(x_0, f(x_0))$.
За	$f'''(x_0) = 0$	бараме извод од четврти ред $y^{IV} = f^{IV}(x)$.
Ако	$f^{IV}(x_0) < 0,$	тогаш функцијата има локален maximum
Ако	$f^{IV}(x_0) > 0,$	тогаш функцијата има локален minimum
Ако	$f^{IV}(x_0) = 0,$	тогаш бараме извод од петти ред $y^{V} = f^{V}(x)$.
За	$f^{V}(x_0) \neq 0$	функцијата има превојна точка $P(x_0, f(x_0))$.
За	$f^{V}(x_0) = 0$	бараме извод од шести ред, и.т.н.

Процесот на испитувањето на природата на стационарната точка x_0 завршува во моментот кога ќе добиеме некој извод од повисок ред во точката x_0 да е различен од нула. Во тој момент гледаме каков е редот на споменатиот извод. Ако тој е парен имаме локален екстрем во стационарната точка x_0, а ако редот на споменатиот извод е непарен имаме превојна точка $P(x_0, f(x_0))$.

<u>Пример 1:</u> Најди стационарни точки на функцијата

$$y = x^3 - 3x$$

и испитај ја нивната природа.

Решение:

$$y' = 3x^2 - 3$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 1$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x_1 = 1}$ и $\boxed{x_2 = -1}$ се стационарни точки.

$$y'' = 6x$$

$y''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0 \quad \Rightarrow$ функцијата има локален minimum во $x_1 = 1$.

$$y_{\min} = y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2.$$

Слично,

$y''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0 \quad \Rightarrow$ функцијата има локален max за $x_2 = -1$.

$$y_{\max} = y(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2.$$

Пример 2: $y = \sqrt{2x - x^2}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (2 - 2x) = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 - x = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x = 1}$ - стационарна точка.

Бараме извод од втори ред

$$y'' = \frac{(1-x)' \sqrt{2x - x^2} - (1-x)\left(\sqrt{2x - x^2}\right)'}{\left(\sqrt{2x - x^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{-1 \cdot \sqrt{2x - x^2} - (1-x) \cdot \dfrac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}}{2x - x^2} = \cdots = \frac{-1}{\left(2x - x^2\right)\sqrt{2x - x^2}}$$

Како $y''(1) = \dfrac{-1}{1 \cdot \sqrt{1}} = -1 < 0 \quad \Rightarrow$ функцијата има локален maximum за $x = 1$.

$$y_{\max} = \sqrt{2 \cdot 1 - 1^2} = 1.$$

Пример 3: Од кружно парче филтер хартија со радиус R cm треба да се направи конусен филтер така што при филтрирање во него да може да се стави максимално количество хемикалија за филтрирање. Колку изнесуваат димензиите на бараниот конусен филтер?

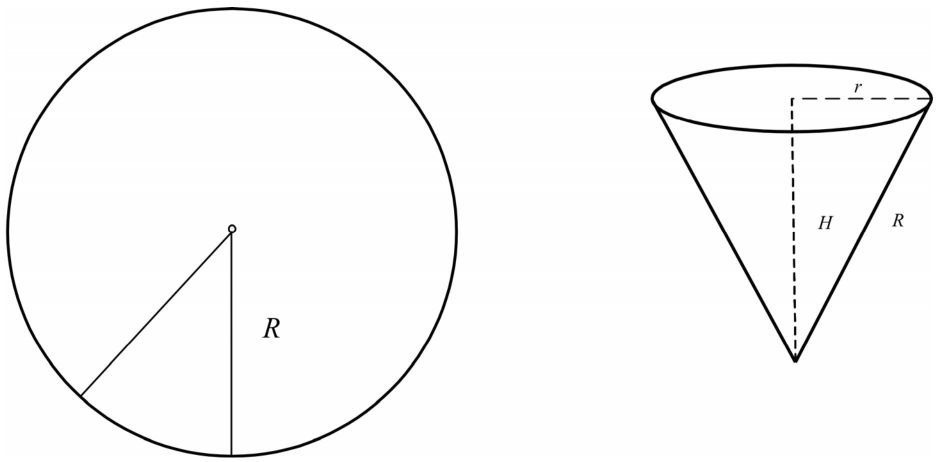
Решение:

$$V = \frac{r^2\pi \cdot H}{3}$$

$$V = \frac{\pi}{3} H\left(R^2 - H^2\right)$$

$$r^2 + H^2 = R^2$$

$$r^2 = R^2 - H^2$$



Да ставиме $H = x$

$$V = \frac{\pi}{3} x\left(R^2 - x^2\right)$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left(R^2 x - x^3\right)$$

$$V' = \frac{\pi}{3}\left(R^2 - 3x^2\right)$$

$$V' = 0$$

$$\frac{\pi}{3}\left(R^2 - 3x^2\right) = 0 \Leftrightarrow R^2 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{R^2}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{R^2}{3}}$$

$x = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$ и $\cancel{x = -\dfrac{R}{\sqrt{3}}}$ стационарни точки

$$V'' = \frac{\pi}{3}(-6x)$$

$$V'' = -2\pi x$$

$$V''\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = -2\pi \cdot \frac{R}{\sqrt{3}} < 0$$

$\Rightarrow V$ има max за $x = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$

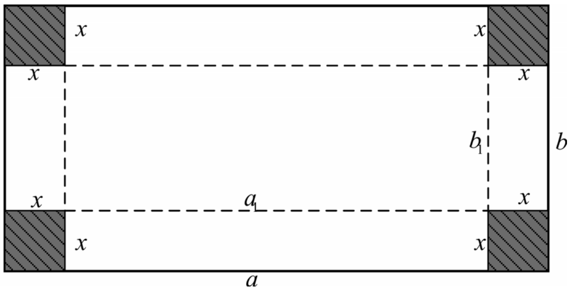
Димензии на бараниот конусен филтер се $H = x = \frac{R}{\sqrt{3}}\, cm$ - висина

$$r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \sqrt{\frac{2R^2}{3}} = R\sqrt{\frac{2}{3}}\, cm$$ - радиус на отворот.

Пример 4: Од правоаголно парче картон со должина $a\,cm$ и ширина $b\,cm\,(a > b)$ треба да се направи кутија без поклопец со најголем волумен.

Забелешка: Кутијата се прави на тој начин што од секое ќоше на картонот се отсекуваат еднакви квадрати.

Решение:



Ако страната на квадратите што ги отсекуваме е $x\,cm$, тогаш, кутијата ќе има должина $a_1 = a - 2x$, ширина $b_1 = b - 2x$ и висина $H = x\, cm$.

$$V = a_1 b_1 H$$
$$V = (a-2x)(b-2x)x$$
$$V' = (a-2x)'(b-2x)x + (b-2x)'(a-2x)x + (x)'(a-2x)(b-2x)$$
$$V' = -2(b-2x)x - 2(a-2x)x + 1\cdot(a-2x)(b-2x)$$
$$V' = -2bx + 4x^2 - 2ax + 4x^2 + ab - 2ax - 2bx + 4x^2$$
$$V' = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$$
$$V' = 0$$
$$12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{4(a+b) \pm \sqrt{16(a+b)^2 - 48ab}}{24}$$
$$x_{1/2} = \frac{4(a+b) \pm \sqrt{16\left[a^2 + 2ab + b^2 - 3ab\right]}}{24}$$
$$x_{1/2} = \frac{4(a+b) \pm 4\sqrt{a^2 - ab + b^2}}{24}$$

$$x_1=\frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\quad,\quad x_2=\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$$ стационарни точки.

Бараме извод од втори ред

$$V''=24x-4(a+b)$$

и

$$V''(x_1)=\cancel{24}\,\frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{\cancel{6}}-4(a+b)=$$

$$=4\cancel{(a+b)}+4\sqrt{a^2-ab+b^2}-4\cancel{(a+b)}=4\sqrt{a^2-ab+b^2}>0$$

$\Rightarrow V$ има min во стационарната точка x_1.

$$V''(x_2)=\cancel{24}\,\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{\cancel{6}}-4(a+b)=$$

$$=4\cancel{(a+b)}-4\sqrt{a^2-ab+b^2}-4\cancel{(a+b)}=-4\sqrt{a^2-ab+b^2}<0$$

$\Rightarrow V$ има max во стационарната точка x_2.

Димензии на бараната кутија се:

должина $\quad a_1=a-2\dfrac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\ cm$

ширина $\quad b_1=b-2\dfrac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\ cm$

висина $\quad H=\dfrac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\ cm.$

Задача 1: За дадените функции најди стационарни точки и испитај ја нивната природа:

а) $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ **б)** $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$ **в)** $y=(x+1)^2e^x$ **г)** $y=x-\ln(x+1)$

Задача 2: Кој позитивен реален број собран со својата реципрочна вредност дава најмал збир?

Задача 3: Да се определи оној правоаголник со периметар 36 cm што има максимална плоштина.

Задача 4: Да се определат димензиите на правоаголникот со најголема плоштина што може да се впише во круг со даден радиус $r\ cm$.

Задача 5: Да се определат димензиите на цилиндерот со најголем волумен што може да се впише во круг со радиус $R\ cm$.

14. НЕКОИ ОСНОВНИ ТЕОРЕМИ НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ

Теорема 1 (на Рол) ***Ако функцијата*** $y = f(x)$ ***е:***

1) ***непрекината на сегментот*** $[a,b]$
2) ***диференцијабилна во интервалот*** (a,b) ***и***
3) $f(a) = f(b)$,

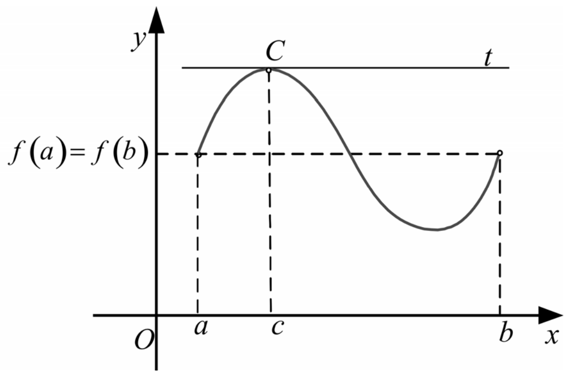
тогаш постои точка c ***помеѓу*** a ***и*** b ***во која што првиот извод на функцијата е еднаков на нула т.е.***

$$f'(c) = 0 \quad (a < c < b).$$

Доказ: Ако функцијата е константна на сегментот $[a,b]$ т.е. $y = c \quad \forall x \in [a,b]$, тогаш $y' = f'(x) = (c)' = 0 \quad \forall x \in [a,b]$.
Според тоа, во улога на точка c може да се земе било која точка од внатрешноста на сегментот $[a,b]$.

Нека функцијата не е константна на сегментот $[a,b]$. Согласно условот 1) функцијата е непрекината на $[a,b]$, а познато е дека секоја непрекината функција на сегмент ја достигнува својата најмала и најголема вредност.

Најмалата и најголемата вредност не се поклопуваат, бидејќи $y = f(x)$ не е константна на сегментот $[a,b]$. Поради ова барем една од овие две вредности функцијата ја достигнува за вредност c на независно променливата x што се наоѓа во внатрешноста на сегментот $[a,b]$. Значи, за $x = c \in (a,b)$ функцијата $y = f(x)$ има локален екстрем. Согласно условот 2) функцијата е диференцијабилна во c. Исполнети се условите од теоремата на Ферма во точка c, поради што $f'(c) = 0$.



Геометриски:

$0 = f'(c) = k_t$-коефициент на правец на тангента t на крива $y = f(x)$ повлечена во нејзина точка $C(c, f(c))$. Значи, споменатата тангента е паралелна со апсцисната оска.

<u>Теорема 2 (на Лагранж)</u> Ако функцијата $y = f(x)$ ***е:***

1) **непрекината на сегментот** $[a,b]$ **и**
2) **диференцијабилна во интервалот** (a,b),

тогаш постои точка c ***помеѓу*** a ***и*** b ***т.е.*** $a < c < b$ ***т.ш.***

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

<u>Доказ:</u> Ја разгледуваме помошната функција

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x.$$

Функцијата $F(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$ како разлика од две непрекинати функции и диференцијабилна во интервалот (a,b) како разлика од две диференцијабилни функции. Освен тоа $F(a) = F(b)$, бидејќи

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a = \frac{bf(a) - \cancel{af(a)} - af(b) + \cancel{af(a)}}{b-a} =$$

$$= \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b = \frac{\cancel{bf(b)} - af(b) - \cancel{bf(b)} + bf(a)}{b-a} =$$

$$= \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

Значи, за функцијата $F(x)$ се исполнети условите од теоремата на Рол на сегментот $[a,b]$. Според оваа теорема постои точка $c \in (a,b)$ т.ш.

$$F'(c) = 0.$$

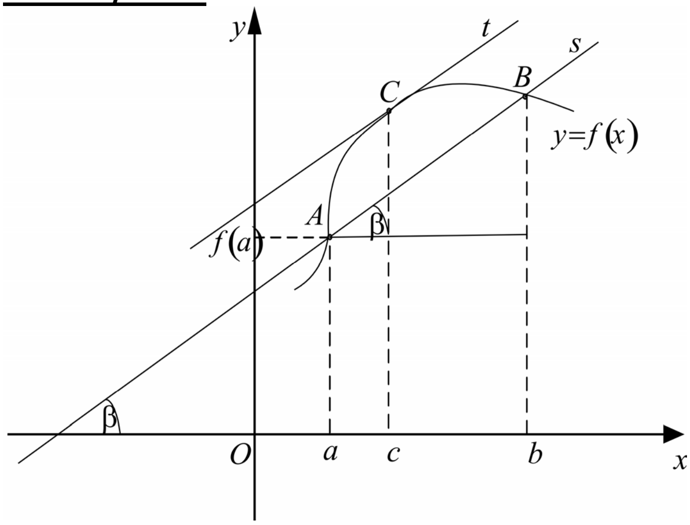
Како

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot 1$$

$$\Rightarrow F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad (a < c < b)$$

<u>Геометриски:</u>



$$A\left(a,f\left(a\right)\right),\ B\left(b,f\left(b\right)\right)$$

Како $\dfrac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}=tg\beta=k_s$ и $f'\left(c\right)=k_t$

$$\Rightarrow\quad f'\left(c\right)=\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}\Leftrightarrow k_t=k_s$$

Значи, при исполнување на условите од теоремата на Лагранж постои точка c помеѓу a и b т.ш. тангентата t на кривата $y=f\left(x\right)$ повлечена во точката $C\left(c,f\left(c\right)\right)$ е паралелна на секантата s низ точките $A\left(a,f\left(a\right)\right)$ и $B\left(b,f\left(b\right)\right)$.

<u>Теорема 3 (на Коши)</u> ***Ако*** $y=f\left(x\right)$ ***и*** $y=g\left(x\right)$ ***се две дадени функции:***

1) ***непрекинати на сегментот*** $\left[a,b\right]$ ***и***
2) ***диференцијабилни во интервалот*** $\left(a,b\right)$ ***и притоа*** $g'\left(x\right)\neq 0\quad \forall x\in\left[a,b\right]$

тогаш постои точка c ***помеѓу*** a ***и*** b ***т.е.*** $a<c<b$ ***т.ш.***

$$\frac{\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{b}\right)-\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{a}\right)}{\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{b}\right)-\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{a}\right)}=\frac{\boldsymbol{f}'\left(\boldsymbol{c}\right)}{\boldsymbol{g}'\left(\boldsymbol{c}\right)}\qquad \left(\boldsymbol{a}<\boldsymbol{c}<\boldsymbol{b}\right).$$

<u>Доказ:</u> Ја формираме помошната функција

$$\Phi\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{g\left(b\right)-g\left(a\right)}g\left(x\right).$$

Функцијата $\Phi\left(x\right)$ е непрекината функција на сегментот $\left[a,b\right]$ и диференцијабилна во интервалот $\left(a,b\right)$ како разлика од две непрекинати, односно диференцијабилни функции. Освен тоа лесно се проверува дека $\Phi\left(a\right)=\Phi\left(b\right)$. Значи, помошната функција ги исполнува условите од теоремата на Рол, па според тоа постои точка c помеѓу a и b т.ш.

$$\Phi'\left(c\right)=0\qquad \left(a<c<b\right).$$

Како

$$\Phi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

$$\Rightarrow \Phi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0,$$

од каде што $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)$

т.е. $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

15. МОНОТОНОСТ НА ФУНКЦИИ СО ПОМОШ НА ИЗВОДИ

Теорема 1: ***Ако во секоја точка од интервалот (a,b), првиот извод на функцијата $y=f(x)$ е позитивен т.е. $f'(x)>0 \quad \forall x\in(a,b)$, тогаш $y=f(x)$ е монотоно растечка функција во тој интервал.***

Доказ: Нека $x_1,x_2\in(a,b)$ се две произволни точки т.ш. $x_1<x_2$. Како $y=f(x)$ е диференцијабилна функција во интервалот $(a,b)\Rightarrow$ таа е и непрекината во тој интервал. Значи, на сегментот $[x_1,x_2]\subseteq(a,b)$ функцијата е непрекината, а во интервалот $(x_1,x_2)\subseteq(a,b)$ таа е диференцијабилна. Според тоа, на сегментот $[x_1,x_2]$ се исполнети условите од теоремата на Лагранж за функцијата $y=f(x)$. Согласно оваа теорема, имаме

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c) \qquad (x_1<c<x_2)$$

$$\Rightarrow \quad f(x_2)-f(x_1)=\underbrace{f'(c)}_{>0}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}>0$$

т.е. $f(x_2)>f(x_1)$.

Добивме, $\forall x_1,x_2\in(a,b)$ и $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ што значи дека функцијата $y=f(x)$ е монотоно растечка во интервалот (a,b).

Теорема 2: ***Ако** $y=f(x)$ **е диференцијабилна функција во интервалот** (a,b) **и притоа** $f'(x)<0 \quad \forall x\in(a,b)$**, тогаш** $y=f(x)$ **е монотоно опаднувачка функција во споменатиот интервал.***

Доказ: $\forall x_1,x_2\in(a,b)$ и $x_1<x_2$, согласно теоремата на Лагранж за функцијата $y=f(x)$ над сегментот $[x_1,x_2]$, имаме

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c) \qquad (x_1<c<x_2)$$

$$\Rightarrow \quad f(x_2)-f(x_1)=\underbrace{f'(c)}_{<0}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}<0$$

$\Rightarrow \quad f(x_1)>f(x_2)$, што значи дека функцијата $y=f(x)$ е монотоно опаднувачка во интервалот (a,b).

Пример 1: Најди ги интервалите на монотоноста на функцијата $y=x^3-3x$.

Решение:

$$D_f=(-\infty,+\infty),\ y'=3x^2-3$$

$$y'>0$$

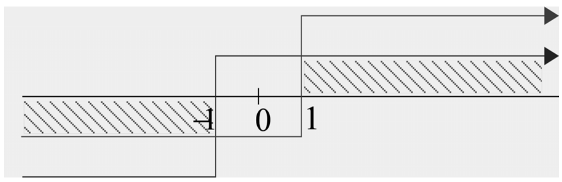
$$3x^2-3>0$$

$$x^2-1>0$$

$$(x-1)(x+1)>0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-1<0 \\ x+1<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>1 \\ x>-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<1 \\ x<-1 \end{cases}$$



Значи, во $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ функцијата монотоно расте, а во $(-1,1)$ монотоно опаѓа.

Забелешка: Функцијата $y=x^3-3x$ има две стационарни точки $x=-1$ и $x=1$. Нивна природа може да се испита со помош на интервали на монотоност на следен начин:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
y	$\nearrow$	max 2	$\searrow$	min	$\nearrow$
y'	+	0	-	0	+

$$y_{\max}=y(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)=-1+3=2$$

$$y_{\min}=y(1)=1^3-3\cdot1=-2$$

Пример 2: $y=\sqrt{2x-x^2}$

Решение: Функцијата има $D_f=[0,2]$.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}\cdot\left(2x-x^2\right)'=\frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}\cdot(2-2x)=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$y'>0\Rightarrow\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}>0\Rightarrow 1-x>0$$

$$-x>-1\quad/(-1)\quad\Rightarrow x<1$$

$\Rightarrow$ во $(0,1)$ функцијата монотоно расте, а во $(1,+2)$ монотоно опаѓа.

x	0		1		2
y		$\nearrow$	max 1	$\searrow$	
y'		+	0	-	

$y_{\max}=y(1)=\sqrt{2\cdot1-1^2}=1.$

16. НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИЗРАЗИ. ЛОПИТАЛОВИ ПРАВИЛА

Често пати при преместување вредност на функција $y=f(x)$ во некоја точка x_0 се добива нешто што нема смисла т.е. се добива еден од изразите

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \infty-\infty,\quad 0\cdot\infty,\quad 1^{\infty},\quad 0^{0} \text{ и } \infty^{0},$$

познати под име **неопределени изрази**. Меѓутоа, во граничен процес, при $x\to x_0$, може да се случи да постои граничната вредност $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

Пример 1: $y=\dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}$, $x_0=1$.

$f(x_0)=f(1)=\dfrac{1^3-1}{1^2+1-2}=\dfrac{0}{0}$ - неопределен израз, но граничната вредност

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+1\right)}{\cancel{(x-1)}(x+2)}=\dfrac{1^2+1+1}{1+2}=1$ постои.

Теорема 1: ***(Прво Лопиталово правило)***

Нека функциите $y = f(x)$ и $y = g(x)$ ги исполнуваат условите од теоремата на Коши на сегментот $[a,b]$ и нека x_0 е точка од внатрешноста на сегментот $[a,b]$ во која што $f(x_0) = 0$ и $g(x_0) = 0$. Ако граничната вредност

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

постои, тогаш постои и со граничната вредност

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

и при тоа тие се еднакви т.е.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Доказ: Функциите $y = f(x)$ и $y = g(x)$ ги задоволуваат условите на Коши на сегментот $[a,b]$, па според тоа, ќе ги задоволуваат споменатите услови и на било кој подсегмент од сегментот $[a,b]$.

Земаме произволна точка $x \in [a,b]$.

Ако x е на десно од x_0 т.е. $x_0 < x$, тогаш според теоремата на Коши применета на подсегментот $[x_0, x]$, имаме

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (x_0 < c < x)$$

$$\frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ т.е. } \underline{\underline{\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}}$$

Ако x е на лево од x_0 т.е. $x < x_0$, тогаш од теоремата на Коши применета на подсегментот $[x, x_0]$, имаме

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (x < c < x_0)$$

$$\frac{0 - f(x)}{0 - g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ т.е. } \underline{\underline{\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}}$$

Ако во подцртаните равенства поминеме на граничен процес пуштајќи $x \to x_0 \quad (\Rightarrow c \to x_0)$, имаме

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to x_0}\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

т.е.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ ,$$

бидејќи гранична вредност не зависи од ознака на независно променливата величина.

Забелешка 1: Во формулацијата и во доказот на првото Лопиталово правило претпоставувавме дека $x_0 \in \mathbf{R}$. Ќе покажеме дека ова правило важи и во случај да x_0 е еднаков на $+\infty$ или $-\infty$, т.е. во случај да $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Навистина, имаме

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\cancel{\left(\frac{1}{t}\right)'}}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\cancel{\left(\frac{1}{t}\right)'}} = \lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$$x = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{x}$$

при $\quad x \to \pm\infty \Rightarrow t \to 0.$

.

Теорема 2: ***(Второ Лопиталово правило)***

Нека $y = f(x)$ ***и*** $y = g(x)$ ***се две диференцијабилни функции во*** $(a,b)\setminus\{x_0\}$ ***при што*** $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$ ***и нека*** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ ***и*** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty.$ ***Ако граничната вредност*** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ***постои, тогаш постои и граничната вредност*** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ***и при тоа тие се еднакви т.е.***

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказ:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2\cdot\frac{g'(x)}{f'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2}{\frac{f'(x)}{g'(x)}}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Забелешка 2: При неопределеност од облик $\frac{0}{0}$ се користи првото Лопиталово правило, а при неопределеност од облик $\frac{\infty}{\infty}$ се користи второто Лопиталово правило. За одстранување на другите неопределености, со соодветни постапки, истите ги сведуваме на неопределеностите $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, за да потоа го примениме првото, односно второто Лопиталово правило.

Примери:

$\boxed{\frac{0}{0}}$ и $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{3x}}{5x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-e^{3x}\right)'}{(5x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\cdot 2-e^{3x}\cdot 3}{5}=-\frac{1}{5}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x-\sin 3x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 4x)'}{(2x-\sin 3x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\cos 4x}{2-3\cos 3x}=\dfrac{4}{2-3}=-4$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\cos x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1\cdot\sin x+x\cos x}{-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\cos x-x\sin x}{-\cos x}=\dfrac{1+1-0}{-1}=-2$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{e^x}=\dfrac{6}{\infty}=0$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\cancel{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^{\cancel{2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=\dfrac{2}{\sqrt{+\infty}}=0$

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{ctgx}{ctg3x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{-\frac{3}{\sin^2 3x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 3x}{3\sin^2 x}=\dfrac{1}{3}$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(x^2-3\right)}{x^2+3x-10}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{2x}{x^2-3}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x}{\left(x^2-3\right)\left(2x+3\right)}=\dfrac{4}{1\cdot 7}=\dfrac{4}{7}.$

$\boxed{\infty-\infty}$

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{1\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x\ln x+x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{\ln x+2}=-\dfrac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{tgx}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{0}{1}=0.$

Задача 1: $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\dfrac{1}{x}\right)$

$0\cdot\infty$

1. $$\lim_{x\to 0} x\ln x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

2. $$\lim_{x\to 0}\ln(1-\sin x)\,ctgx = \lim_{x\to 0}\ln(1-\sin x)\cdot\frac{1}{tgx} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{tgx} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-\sin x}(-\cos x)}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos^3 x}{1-\sin x} = \frac{-1}{1} = -1$$

3. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)tgx = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\frac{1}{tgx}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{ctgx} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin^2 x = 1.$$

1^∞

За оваа неопределеност се користи табличниот limes

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

1. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\cos x}} \overset{1^\infty}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\sin x-1}{1}\right)^{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\sin x-1}}\right)^{\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin x-1}\cdot\frac{\sin x-1}{1}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\sin x-1}}\right)^{\frac{1}{\sin x-1}}\right]^{\frac{\sin x-1}{\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}} = e^{\frac{0}{-1}} = e^0 = 1$$

2. $$\lim_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}} \overset{1^\infty}{=} \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{e^x+x-1}{1}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{e^x+x-1}}\right)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e^x+x-1}\cdot\frac{e^x+x-1}{1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{e^x+x-1}}\right)^{\frac{1}{e^x+x-1}\cdot}\right]^{\frac{e^x+x-1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+x-1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+1}{1}} = e^2.$$

$$\boxed{\mathbf{0^0}\quad ,\infty^0}$$

При овие неопределености се користи идентитетот

$$f(x)^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\ln f(x)}$$

тогаш

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\varphi(x)\ln f(x)}$$

а поради непрекинатоста на експоненцијалната функција последното равенство може да се запише

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x)}.$$

1. $$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} \overset{\infty^0}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} \quad e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$$

2. $$\lim_{x\to 0}(\sin x)^{tgx} \overset{0^0}{=} \lim_{x\to 0} e^{tgx\cdot\ln\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} tgx\cdot\ln\sin x} \overset{0\cdot\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{tgx}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{ctgx}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{\frac{-1}{\sin^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(-\sin x\cos x)} = e^{-0\cdot 1} = e^0 = 1$$

3. $$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln x} \overset{0\cdot\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(-x)} = e^0 = 1.$$

Задача 2:

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{\sin 2x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ 3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$.

17. ИСПИТУВАЊЕ НА ТЕК НА ФУНКЦИИ И КОНСТРУКЦИЈА НА ГРАФИЦИ

За да се испита текот на една функција треба да се определат:

1) Дефиниционата област D_f
2) Парност
3) Пресеци со координатни оски
4) Асимптоти
5) Локални екстреми
6) Превојни точки

Со помош на овие елементи, на крај, лесно може да се конструира графикот на функцијата.

Пример 1: Испитај го текот и конструирај графикот на функцијата $y=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$.

Решение:

1) Дефинициона област

$D_f=?$

$x^2+1\neq 0$

$x^2\neq -1$

$x\neq \pm\sqrt{-1}$

$x\neq \pm i$

$\Rightarrow D_f=(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$.

2) Парност

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-2(-x)+1}{(-x)^2+1}=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\neq f(x)$$

$$=-\frac{-x^2-2x-1}{x^2+1}\neq -f(x)$$

$\Rightarrow$ функцијата ниту е парна ниту е непарна.

3) Пресек со x оска

$y=0$

$\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}=0$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0\Rightarrow x=1$

A(1,0)

Пресек со y оска

$x=0$

$y=\frac{0^2-2\cdot 0+1}{0^2+1}=1$

B(0,1)

4) Асимптоти

Вертикална асимптота

$$x^2+1=0$$
$$x^2=-1$$
$$x=\pm\sqrt{-1}$$
$$x=\pm i\notin \mathbf{R}$$

$\Rightarrow$ нема вертикална асимптота

Хоризонтална асимптота

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}=$$
$$=\lim\frac{\cancel{x^2}(1-\cancel{\frac{2}{x}}^{0}+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{0})}{x^2(1+\cancel{\frac{1}{x^2}}_{0})}=1$$

$\Rightarrow$ $\boxed{y=1}$ е хоризонтална асимптота

Коса асимптота

$$y=kx+n$$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+1}{x(x^2+1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1-\cancel{\frac{2}{x}}^{0}+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{0}\right)}{x\cdot\cancel{x^2}\left(1+\cancel{\frac{1}{x^2}}_{0}\right)}=\frac{1}{\pm\infty\cdot 1}=\frac{1}{\pm\infty}=0$$

$\Rightarrow$ нема коса асимптота.

5) Локални екстреми

$$y=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$$

$$y'=\frac{(2x-2)(x^2+1)-(x^2-2x+1)2x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{2x^3}+\cancel{2x}-2x^2-2-\cancel{2x^3}+4x^2-\cancel{2x}}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$$

$$y'=0$$
$$\frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}=0$$
$$2x^2-2=0$$
$$2x^2=2$$
$$x^2=1$$
$$x=\pm\sqrt{1}\Rightarrow x=\pm 1$$

$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array}}$ стационарни точки

$$y'' = \frac{4x\left(x^2+1\right)^2 - \left(2x^2-2\right)2\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(x^2+1\right)\left[4x\left(x^2+1\right) - 4x\left(2x^2-2\right)\right]}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{4x^3+4x-8x^3+8x}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$= \frac{12x-4x^3}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{4x\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$y''(1) = \frac{4\cdot 1\cdot\left(3-1^2\right)}{\left(1^2+1\right)^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0$$

$\Rightarrow$ функцијата има **локален минимум** во стационарната точка $x_1 = 1$

$$y_{\min} = y(1) = \frac{1^2 - 2\cdot 1 + 1}{1^2+1} = \frac{0}{2} = 0$$

$\Rightarrow M_1(1,0) \quad \min$

$$y''(-1) = \frac{4(-1)\left(3-(-1)^2\right)}{\left((-1)^2+1\right)^3} = \frac{-8}{8} = -1 < 0$$

$\Rightarrow$ функцијата има **локален максимум** во стационарната точка $x_2 = -1$

$$y_{\max} = y(-1) = \frac{(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 1}{\left((-1)^2+1\right)} = \frac{4}{2} = 2$$

$\Rightarrow M_2(-1,2) \quad \max.$

6) Превојни точки

Овие точки се бараат од условот да

$$y'' = 0$$

$$\frac{4x\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = 0$$

$$4x\left(3-x^2\right) = 0$$

$$4x = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

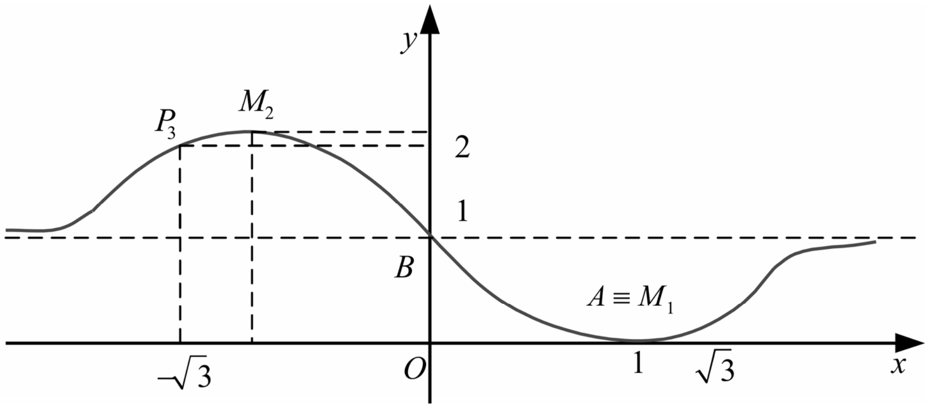
или $\quad x^2 = 3 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{3}}$

значи, има три превојни точки.

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{0^2 - 2\cdot 0 + 1}{0^2 + 1} = 1 \Rightarrow P_1(0,1)$$

$$x_2 = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{(\cancel{\sqrt{3}})^2 - 2\cdot\sqrt{3} + 1}{(\cancel{\sqrt{3}})^2 + 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P_2(\sqrt{3}, \frac{2-\sqrt{3}}{2})$$

$$x_2 = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad y_3 = \frac{(-\sqrt{3})^2 - 2\cdot(-\sqrt{3}) + 1}{(-\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3+1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P_3(-\sqrt{3}, \frac{2+\sqrt{3}}{2})$$



<u>Задача</u>: Испитај тек и конструирај график на функција

а) $y = \dfrac{x^3}{3x^2 - 4}$ б) $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ в) $y = (1-x)e^x$ г) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

18. МАКЛОРЕНОВА И ТАЈЛОРОВА ФОРМУЛА ЗА ПОЛИНОМИ

Да земеме полиномна функција (полином) по x од $n-$та степен

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

при што $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ и $a_n \neq 0$. Се поставува прашање дали на некој начин коефициентите $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ зависат од полиномната функција и нејзините изводи? Имаме

за $x = 0 \Rightarrow P(0) = a_0$, од каде што $\boxed{a_0 = P(0)}$

$$P'(x) = 1\cdot a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}$$

за $x = 0 \Rightarrow P'(0) = 1\cdot a_1$, од каде што $\boxed{a_1 = \dfrac{P'(0)}{1!}}$

$$P''(x) = 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3 x + \ldots + (n-1) n a_n x^{n-2}$$

за $x = 0 \Rightarrow P''(0) = 1\cdot 2a_2$, од каде што $\boxed{a_2 = \dfrac{P''(0)}{2!}}$

$$P'''(x)=1\cdot 2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4x+\ldots+(n-2)(n-1)na_nx^{n-3}$$

за $x=0 \Rightarrow P'''(0)=1\cdot 2\cdot 3a_3$, од каде што $\boxed{a_3=\dfrac{P'''(0)}{3!}}$

Продолжувајќи го овој процес по конечен број постапки добиваме

$$P^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot na_n$$

и за $x=0 \Rightarrow P^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot na_n$, од каде што $\boxed{a_n=\dfrac{P^{(n)}(0)}{n!}}$

Од заокружените формули се гледа дека коефициентите $a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ во полиномната функција

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$$

на единствен начин се изразуваат преку изводите на полиномната функција пресметани за $x=0$.

<u>Теорема 1:</u> Коефициентите на полиномната функција

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$$

на единствен начин се изразуваат преку изводите на полиномната функција $P(x)$ ***пресметани за*** $x=0$ ***по формулите:***

$$a_0=P(0),a_1=\frac{P'(0)}{1!},a_2=\frac{P''(0)}{2!},a_3=\frac{P'''(0)}{3!},\ldots,a_n=\frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

Притоа полиномната функција може да се запише во облик

$$P(x)=P(0)+\frac{P'(0)}{1!}x+\frac{P''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

или скратено

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Оваа формула е позната под име ***Маклоренова формула за полиноми***.

Нека $x_0\neq 0$. Имаме

$$\begin{aligned}P(x)&=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n\\&=a_0+\\&\quad+a_1\left((x-x_0)+x_0\right)+\\&\quad+a_2\left((x-x_0)+x_0\right)^2+\\&\quad+a_3\left((x-x_0)+x_0\right)^3+\\&\quad\vdots\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+a_n\left(\left(x-x_0\right)+x_0\right)^n=\\
&=a_0+\\
&+a_1\left(x-x_0\right)+a_1x_0+\\
&+a_2\left(x-x_0\right)^2+2a_2x_0\left(x-x_0\right)+a_2x_0{}^2+\\
&+a_3\left(x-x_0\right)^3+3a_3x_0\left(x-x_0\right)^2+3a_3x_0{}^2\left(x-x_0\right)+a_3x_0{}^3+\\
&\vdots\\
&+a_n\left[\binom{n}{0}\left(x-x_0\right)^n+\binom{n}{1}\left(x-x_0\right)^{n-1}x_0+\binom{n}{2}\left(x-x_0\right)^{n-2}x_0{}^2+\ldots+\binom{n}{n}x_0{}^n\right]=\\
&=\underbrace{\left(a_0+a_1x_0+a_2x_0{}^2+\ldots+\binom{n}{n}a_nx_0{}^n\right)}_{A_0}+\underbrace{\left(a_1+2a_2x_0+3a_3x_0{}^2+\ldots\right)}_{A_1}\left(x-x_0\right)+\\
&+(\underbrace{\,.\;.\;.\,}_{A_2})\left(x-x_0\right)^2+\ldots+(\underbrace{\,.\;.\;.\,}_{A_n})\left(x-x_0\right)^n=\\
&=A_0+A_1\left(x-x_0\right)+A_2\left(x-x_0\right)^2+\ldots+A_n\left(x-x_0\right)^n.
\end{aligned}
$$

Значи, секоја полиномна функција може да се запише во облик

$$P(x)=A_0+A_1\left(x-x_0\right)+A_2\left(x-x_0\right)^2+A_3\left(x-x_0\right)^3+\ldots+A_n\left(x-x_0\right)^n.$$

Сега се поставува прашање дали коефициентите $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ може да се изразат преку изводите на полиномната функција $P(x)$. Имаме

за $x=x_0 \Rightarrow P(x_0)=A_0$, од каде што $\boxed{A_0=P(x_0)}$

$$P'(x)=1\cdot A_1+2A_2\left(x-x_0\right)+3A_3\left(x-x_0\right)^2+\ldots+nA_n\left(x-x_0\right)^{n-1}$$

за $x=x_0 \Rightarrow P'(x_0)=1\cdot A_1$, од каде што $\boxed{A_1=\dfrac{P'(x_0)}{1!}}$

$$P''(x)=1\cdot 2A_2+2\cdot 3A_3\left(x-x_0\right)+\ldots+(n-1)nA_n\left(x-x_0\right)^{n-2}$$

за $x=x_0 \Rightarrow P''(x_0)=2!A_2$, од каде што $\boxed{A_2=\dfrac{P''(x_0)}{2!}}$

Слично, за A_3 се добива

$$\boxed{A_3=\frac{P'''(x_0)}{3!}}$$

По конечен број постапки индуктивно се добива

$$\boxed{A_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}}$$

<u>Теорема 2:</u> Секоја полиномна функција

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

може да се запише во облик

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{P'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$

Последната формула е позната под име ***Тајлорова формула за полиноми.***

<u>Забелешка:</u> Во случај на Тајлорова формула велиме полиномната функција е развиена по степените на $x-x_0$ (или е развиена во околина на точката x_0).

<u>Пример 1:</u> Полиномната функција $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ да се развие по степените од $x-2$.

<u>Решение:</u>

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 \quad \Rightarrow \quad P(2) = 29$$

$$x_0 = 2$$

$$P'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x + 4 \quad \Rightarrow \quad P'(2) = 48$$

$$P''(x) = 12x^2 + 12x - 6 \quad \Rightarrow \quad P''(2) = 66$$

$$P'''(x) = 24x + 12 \quad \Rightarrow \quad P'''(2) = 60$$

$$P^{IV}(x) = 24 \quad \Rightarrow \quad P^{IV}(2) = 24$$

$$P^{V}(x) = 0$$

Според тоа

$$P(x) = P(2) + \frac{P'(2)}{1!}(x-2) + \frac{P''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{P'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{P^{IV}(2)}{4!}(x-2)^4$$

т.е.

$$P(x) = 29 + \frac{48}{1!}(x-2) + \frac{66}{2!}(x-2)^2 + \frac{60}{3!}(x-2)^3 + \frac{24}{4!}(x-2)^4$$

т.е.

$$P(x) = 29 + 48(x-2) + 33(x-2)^2 + 10(x-2)^3 + (x-2)^4$$

Пример 2: Користејќи ги врските што постојат помеѓу коефициентите на една полиномна функција и нејзините изводи пресметај $P'''(0)$ ако $P(x)=x^5-15x^4+8x^3-13x+2$.

Решение: Од полиномната функција читаме $a_3=8$, а од споменатите врски во текот на предавањето имаме

$$a_3=\frac{P'''(0)}{3!}\Rightarrow P'''(0)=a_3\cdot 3!=8\cdot 3!=48.$$

Задача 1: Полиномната функција од примерот 2 да се развие по Тајлорова формула во околина на точката -1.

Задача 2: За полиномната функција $P(x)=2x^6-10x^5+7x^3-5x^2+4x+3$ пресметај $P^{IV}(0)$ и $P^{V}(0)$.

19. ТАЈЛОРОВА И МАКЛОРЕНОВА ФОРМУЛА ЗА ФУНКЦИИ

Се поставува прашање: Дали и за функции постојат формули слични на Маклореновата и Тајлоровата формула за полиноми? Во важност е следнава теорема.

Теорема: ***Ако функцијата $y=f(x)$ е $n+1$ пати диференцијабилна функција во некоја околина $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ на точката x_0 и притоа $n+1$-иот извод е непрекинат, тогаш важи формулата***

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

позната под име Тајлорова формула за функција $y=f(x)$ во околина на точката x_0.

Членот $R_n(x)$ се нарекува остаток или грешка во Тајлоровата формула за функцијата $y=f(x)$. Истиот е од облик

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$ ***- Лагранжеов облик на остаток,***

или

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$$ ***- Кошиев облик на остаток.***

Притоа $0<\theta<1$.

Специјално, за $x_0=0$, Тајлоровата формула се сведува на

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+R_n$$

позната под име **Маклоренова формула за функции.** Во овој случај, остатокот или грешката го има обликот

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$ - Лагранжов облик на остаток

или

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}x^{n+1}(1-\theta)^n$$ - Кошиев облик на остаток.

<u>Пример 1</u>: Функцијата $f(x)=xarctgx$ да се развие по Тајлорова формула до трети ред во околина на точката $x_0=1$.

<u>Решение:</u> Бидејќи во развојот по Тајлоровата формула треба да се задржиме до трети ред, имаме

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+R_3(x)$$

$$R_3=\frac{f^{IV}(\theta x)}{4!}(x-x_0)^4$$

$$f(x)=xarctgx \qquad \Rightarrow f(1)=1\cdot arctg1=\frac{\pi}{4}$$

$$f'(x)=1\cdot arctgx+x\cdot\frac{1}{1+x^2}=arctgx+\frac{x}{1+x} \qquad \Rightarrow f'(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{(1+x^2)^2} \qquad \Rightarrow f''(1)=\frac{1}{2}$$

$$f'''(x)=\frac{0\cdot(1+x^2)^2-2\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=\frac{-8x}{(1+x^2)^3} \qquad \Rightarrow f'''(1)=-1$$

$$f^{IV}(x)=\frac{-8(1+x^2)^3+8x\cdot 3(1+x^2)^2\cdot 2x}{(1+x^2)^6}=\frac{-8(1-5x^2)}{(1+x^2)^4}$$

Според тоа, го имаме развојот

$$xarctgx=\frac{\pi}{4}+\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}{1!}(x-1)+\frac{\frac{1}{2}}{2!}(x-1)^2+\frac{-1}{3}(x-1)^3+R_3(x)$$

т.е.

$$x\,arctgx=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)(x-1)+\frac{1}{4}(x-1)^2-\frac{1}{6}(x-1)^3+R_3(x),$$

при што

$$R_3(x)=\frac{f^{IV}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{4!}(x-1)^4=\frac{-8\left[1-5\left(1+\theta(x-1)\right)^2\right]}{4!\left[1+\left(1+\theta(x-1)\right)^2\right]^4}(x-1)^4=$$

$$=-\frac{1-5\left(1+\theta(x-1)\right)^2}{3\left[1+\theta\left(1+\theta(x-1)\right)^2\right]^4}(x-1)^4,\qquad 0<\theta<1.$$

Пример 2: Функцијата $f(x)=e^x$ да се развие по Маклоренова формула. Добиениот развој да се искористи за приближно пресметување на $\sqrt{e}$ и да се оцени грешката.

Решение:

$$\begin{array}{lcl}
f(x)=e^x & \Rightarrow & f(0)=e^0=1\\
f'(x)=e^x & \Rightarrow & f'(0)=e^0=1\\
f''(x)=e^x & \Rightarrow & f''(0)=e^0=1\\
f'''(x)=e^x & \Rightarrow & f'''(0)=e^0=1\\
\vdots & & \vdots\\
f^{(n)}(x)=e^x & \Rightarrow & f^{(n)}(0)=e^0=1\\
f^{(n+1)}(x)=e^x & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

т.е.

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

или

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

пришто

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Ако ставиме $x=\frac{1}{2}$, тогаш добиваме

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}+\cdots+\frac{1}{2^n\cdot n!}+R_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$R_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{\theta\cdot\frac{1}{2}}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}<\frac{e}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}<\frac{3}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}$$

За $n=3$, имаме

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}+R_3\left(\frac{1}{2}\right)$$

од каде што

$$\begin{aligned}\sqrt{e}&\approx 1+\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}\\&\approx 1+0,5+0,125+0,0208(3)\\&\approx 1,6458(3)\approx 1,6458.\end{aligned}$$

Да ја оцениме грешката што ја правиме со приближното равенство $\sqrt{e}\approx 1,6458$.
Имаме

$$R_3\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{3}{2^{3+1}(3+1)!}=\frac{3}{2^4\cdot 4!}<0,00782$$

т.е. грешката е помала од $0,00782$.

<u>Пример 3:</u> Користејќи ја Маклореновата формула за функцијата $f(x)=e^x$ да се пресмета вредноста на бројот e со точност на две децимали.

<u>Решение:</u> Согласно претходниот пример имаме

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

при што

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Ставајќи $x=1$ добиваме

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+R_n(1)$$

и

$$R_n(1)=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

$\Rightarrow$ приближното равенство

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

и грешката

$$R_n(1) = \frac{e^\theta}{(n+1)!}.$$

Бидејќи резултатот се бара со точност на две децимали, се прашуваме кое е тоа $n \in \mathbf{N}$ за кое што

$$|R_n(1)| =< \frac{1}{2} \cdot 0,01 = 0,005\,?$$

Како

$$|R_n(1)| = \left|\frac{e^\theta}{(n+1)!}\right| = \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!},$$

тоа

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0,005 \Leftrightarrow (n+1)! > \frac{3}{0,005} \quad \text{т.е. } (n+1)! > 600$$

Најмала вредност на n за која што $(n+1)! > 600$ е $n = 5$. Тоа значи, бараната приближна вредност на e е

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \approx 2,71.$$

Пример 4: Најди ја Маклореновата формула за функцијата $f(x) = \sin x$.

Решение:

$$f(x) = \sin x \qquad \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Rightarrow f'''(0) = -1$$

$$f^{IV}(0) = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Rightarrow f^{IV}(0) = 0$$

$$f^{V}(0)=\cos\left(x+4\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+5\cdot\frac{\pi}{2}\right) \qquad \Rightarrow f^{V}(0)=0$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

Забележуваме дека

$$f^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & \text{за} \quad n=2k, \quad k=0,1,2,\dots \\ (-1)^{k-1} & \text{за} \quad n=2k-1, \quad k=1,2,3,\dots\end{cases}$$

Согласно ова, добиваме

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2k+1}(x)$$

Задача 1: Функцијата $f(x)=\sqrt{1+x}$ да се развие по Маклоренова формула. Потоа:

а) Пресметај приближно $\sqrt{7}$, задржувајќи се до член со четврти степен и оцени ја грешката.

б) Пресметај $\sqrt{7}$ до точност до три децимали.

Задача 2: Покажи ја точноста на формулите

а) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+2}(x)$

б) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+R_n(x)$

в) $(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$

д) $a^x=1+\frac{\ln a}{1!}x+\frac{\ln^2 a}{2!}x^2+\cdots+\frac{\ln^n a}{n!}x^n+R_n(x)$

За секоја од функциите запиши го Лагранжовиот облик на остаток.

НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ IV

1. ПОИМ ЗА НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ И НЕКОИ НЕГОВИ ОСОБИНИ

***Дефиниција 1:* Нека $y = f(x)$ е дадена функција во интервалот (a,b). Секоја диференцијабилна функција $y = F(x)$ во интервалот (a,b) чиј што извод е еднаков на дадената функција во (a,b) т.е. $F'(x) = f(x)$ $(\forall x \in (a,b))$ се нарекува примитивна функција на дадената функција $y = f(x)$ во тој интервал.**

Пример 1:

а) Една примитивна функција на $y = x^2$ во $(-\infty, +\infty)$ е функцијата $y = \frac{x^3}{3}$

б) Примитивна функција на $y = x^2$ во $(-\infty, +\infty)$ е и функцијата $y = \frac{x^3}{3} + 1$

в) Примитивна функција на $y = x^2$ во $(-\infty, +\infty)$ е и функцијата $y = \frac{x^3}{3} - 5$

г) Една примитивна функција на $y = \frac{1}{x}$ во $(0, +\infty)$ е функцијата $y = \ln x$

д) Една примитивна функција на $y = \frac{1}{x}$ во $(-\infty, 0)$ е функцијата $y = \ln(-x)$

ѓ) Една примитивна функција на $y = \sin x$ во $(-\infty, +\infty)$ е функцијата $y = -\cos x$

Од изнесените примери а), б) и в) се приметува дека една иста функција $y = f(x)$ во некој интервал (a,b) може да има повеќе примитивни функции. Во важност е следнава

***Теорема 1:* Ако $y = F_1(x)$ и $y = F_2(x)$ се две примитивни функции на една иста функција $y = f(x)$ во интервалот (a,b), тогаш тие се разликуваат за некоја константа.**

Доказ:

$y=F_1(x)$ е примитивна функција на $y=f(x) \Rightarrow F_1'(x)=f(x) \quad (\forall x\in(a,b))$

$y=F_2(x)$ е примитивна функција на $y=f(x) \Rightarrow F_2'(x)=f(x) \quad (\forall x\in(a,b))$

Имаме

$$\left(F_2(x)-F_1(x)\right)'=F_2'(x)-F_1'(x)=f(x)-f(x)=0 \quad (\forall x\in(a,b))$$

$$\Rightarrow F_2(x)-F_1(x)=C=const,$$

бидејќи само извод од константа е нула.

Од последното равенство добиваме

$$F_2(x)=F_1(x)+C$$

Од ова равенство може да заклучиме дека: ако за функцијата $y=f(x)$ во интервалот (a,b) знаеме една примитивна функција $y=F_1(x)$, тогаш за неа може да конструираме безброј примитивни функции на тој начин што на познатата примитивна функција ќе додаваме реални константи.

Дефиниција 2: ***Множество од сите примитивни функции на функцијата*** $\boldsymbol{y=f(x)}$ ***во интервалот*** $\boldsymbol{(a,b)}$ ***се нарекува неопределен интеграл на функцијата*** $\boldsymbol{y=f(x)}$ ***во интервалот*** $\boldsymbol{(a,b)}$ ***и се означува со***

$\int f(x)dx$ **-** се чита	**„ неопределен интеграл од еф од икс де икс "**	
$\int$	ознака за	**неопределен интеграл**
$f(x)dx$	се нарекува	**подинтегрален израз**
$f(x)$	се нарекува	**подинтегрална функција**.

Согласно предмалку кажаното за примитивни функции, ако $y=F(x)$ е една примитивна функција на $y=f(x)$ во интервалот (a,b), тогаш

$$\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C}$$

C е произволна реална константа позната под име **интеграциона константа**. Според тоа, за да се реши неопределениот интеграл $\int f(x)dx$ треба да се најде една примитивна функција $y=F(x)$ на подинтегралната функција $y=f(x)$ и на неа да се додаде интеграциона константа C.

Пример 2: Покажи дека функцијата $y=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$, $a\in\mathbf{R}$ е една примитивна функција на функцијата $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$, па според тоа

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C\,.$$

Решение: Разликуваме два случаја:

а) $x+\sqrt{x^2+a}>0\Rightarrow\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$

б) $x+\sqrt{x^2+a}<0\Rightarrow\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|=\ln\left(-\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\right)$

Во случај а) имаме

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)'=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)'=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+a}}\cdot 2x\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

Слично во случај б) имаме

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)'=\left(\ln\left(-\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\right)\right)'=\frac{1}{-\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)}\cdot\left(-\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\right)'=$$

$$=\frac{1}{-\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)}\cdot\left(-\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+a}}\cdot 2x\right)\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

Значи, функцијата $y=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$ е една примитивна функција на функцијата $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$, поради што

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

Задача 1: Покажи дека

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

Задача 2: Покажи дека

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$$

Задача 3: Покажи дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Лесно се покажува точноста на следниве особини:

I. $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$

II. $\int F'(x) dx = F(x) + C \quad \Leftrightarrow \quad \int dF(x) dx = F(x) + C$

III. $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$

IV. $\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$

Последица од особините III и IV е особината

V. $\int \left[\alpha f(x) + \beta g(x) \right] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$

2. ТАБЕЛА НА ОСНОВНИ ИНТЕГРАЛИ

Имајќи ја в предвид формулата

$$\int f(x) dx = F(x) + C \qquad \left(F'(x) = f(x) \right),$$

според која неопределениот интеграл е збир од една примитивна функција $y = F(x)$ на подинтегралната функција $y = f(x)$ и интеграционата константа C, како и табелата на изводи од елементарни функции лесно можеме да ја составиме следнава **табела на основни интеграли**:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{R} \wedge n \neq -1)$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$

8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arc}tgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C \ (a \in \mathbb{R})$

12. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

Пример 1:

а) $\int \frac{4x^{15}}{7} dx = \frac{4}{7} \int x^{15} dx = \frac{4}{7} \frac{x^{16}}{16} + C = \frac{x^{16}}{28} + C$

б) $\int 5\sqrt[4]{x^3} dx = 5 \int x^{\frac{3}{4}} dx = 5 \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + C = 5 \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + C = \frac{20\sqrt[4]{x^7}}{7} + C$

в) $\int \frac{2}{x^5} dx = 2 \int x^{-5} dx = 2 \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{2x^4} + C$

г) $\int \sqrt[5]{x\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \sqrt[5]{x \cdot x^{\frac{2}{3}}} dx = \int \sqrt[5]{x^{\frac{5}{3}}} dx = \int \left(x^{\frac{5}{3}} \right)^{\frac{1}{5}} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$

д) $\int \left(2^x + x^2\right) dx = \int 2^x dx + \int x^2 dx = 2^x \ln 2 + \frac{x^3}{3} + C$

ѓ) $\int \left(x^2 + x + 1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right) dx = \int x^2 dx + \int x dx + \int dx - 2\int \frac{dx}{x} - 3\int x^{-2} dx =$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - 2\ln|x| - 3\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C$

е) $\int\left(4x^3-5\right)^2dx=\int\left(16x^6-40x^3+25\right)dx=16\int x^6dx-40\int x^3dx+25\int dx=$

$=16\frac{x^7}{7}-40\frac{x^4}{4}+25x+C$

ж) $\int\left(4x^2-3x+2\right)\left(7x-x^2\right)dx=\int\left(28x^3-21x^2+14x-4x^4+3x^3-2x^2\right)dx=$

$=\int\left(-4x^4+31x^3-23x^2+14x\right)dx=-4\int x^4dx+31\int x^3dx-23\int x^2dx+14\int xdx=$

$=-4\frac{x^5}{5}+31\frac{x^4}{4}-23\frac{x^3}{3}+14\frac{x^2}{2}+C$

з) $\int\frac{7x^3-5x^2+3x-1}{x}dx=\int\left(7x^2-5x+3-\frac{1}{x}\right)dx=7\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+3x-\ln|x|+C.$

Задача 1: Пресметај:

а) $\int\frac{x}{\sqrt[5]{x^2\sqrt{x}}}dx$

б) $\int\left(4x^2-5\right)^3dx$

в) $\int 3x^2\left(1-x+4x^2\right)dx$

г) $\int\frac{10x^2-5x+2}{x^2}dx.$

Пример 2: $\int e^x\left(3+\frac{4e^{-x}}{x}\right)dx=\int\left(3e^x+\frac{4}{x}\right)dx=3\int e^xdx+4\int\frac{dx}{x}=3e^x+4\ln|x|+C$

Задача 2: Пресметај:

$$\int 5^x\left(10-\frac{5^{-x}}{x^3}\right)dx.$$

Пример 3: $\int\frac{x^4-1}{x^2+1}dx=\int\frac{\left(x^2-1\right)\cancel{\left(x^2+1\right)}}{\cancel{x^2+1}}dx=\int\left(x^2-1\right)dx=\int x^2dx-\int dx=\frac{x^3}{3}-x+C.$

Задача 3: Пресметај:

а) $\int\frac{x^3-1}{x^2+x+1}dx$

б) $\int\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}dx.$

Пример 4: $\int\frac{dx}{\sin^2x\cdot\cos^2x}=\int\frac{1}{\sin^2x\cdot\cos^2x}dx=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cdot\cos^2x}dx=$

$=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\right)dx=\int\frac{1}{\cos^2x}dx+\int\frac{1}{\sin^2x}dx=tgx-ctgx+C.$

Забелешка: При решавање на оваа задача се искористи следнава тригонометриска формула

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$

Задача 4: Пресметај:

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx.$$

Напатствие: Искористи ја тригонометриската формула

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

Пример 5:

$$\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C.$$

Задача 5: Пресметај:

$$\int ctg^2 x dx$$

Пример 6:

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1-\cos x}{2} dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int \ dx - \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x + C.$$

Забелешка: Искористена е тригонометриската формула

$$\boxed{\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Задача 6: Пресметај:

а) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$ б) $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \right) dx.$

Напатствие: За задачата под а) да се искористи формулата

$$\boxed{\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

а за задачата под б) формулата

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

3. СМЕНА НА ПРОМЕНЛИВА ВО НЕОПРЕДЕЛЕНИОТ ИНТЕГРАЛ

Мал е бројот на неопределените интеграли што можат да се решат непосредно, само со помош на табелата на основните интеграли и особините на неопределениот интеграл. Меѓутоа, постојат некои класи на неопределени интеграли во кои што ако се изврши замена на променливата величина x во подинтегралниот израз со нова променлива t, кои што меѓу себе се поврзани со равенството $x = \varphi(t)$, се добиваат интеграли што можат да се решат или се добиваат интеграли попрости од почетните интеграли. При ова имаме

$$\int f(x)\,dx = \int \underbrace{f(\varphi(t))\varphi'(t)}_{F'(t)}dt = \int F'(t)dt = F(t) + C = F\left(\varphi^{-1}(x)\right) + C.$$

$$x = \varphi(t) \Rightarrow t = \varphi^{-1}(x)$$

$$dx = \varphi'(t)\,dt$$

Оваа постапка е позната под име **смена на променлива во неопределен интеграл**.

Сега ќе разгледаме некои класи неопределени интеграли кои што се решаваат,односно упростуваат со соодветни смени:

I. $\boldsymbol{\int f(ax+b)dx = \int f(t)\frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt}$ - интегралот е упростен.

$$\boldsymbol{t = ax + b}$$

$$\boldsymbol{dt = adx}$$

$$\boldsymbol{\frac{dt}{a} = dx}$$

Забелешка: На оваа класа неопределени интеграли припаѓаат интеграли кои што од табличните интеграли се разликуваат по тоа што на местото на променливата x во подинтегрална функција стои изразот $ax+b$.

Пример 1:

а) $\int (5x+2)^3\,dx = \int t^3\,\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int t^3dt = \frac{1}{5}\frac{t^4}{4} + C = \frac{(5x+2)^4}{20} + C$

$$t = 5x + 2$$

$$dt = 5dx \Rightarrow \quad \frac{dt}{5} = dx$$

б) $\int \frac{dx}{3x-1} = \int \frac{\frac{dt}{3}}{t} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln(t) + C = \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C$

$$t = 3x - 1$$

$$dt = 3dx$$

$$\frac{dt}{3} = dx$$

в) $\int \sqrt[3]{(2x+1)^2}\,dx = \int \sqrt[3]{t^2}\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{2/3}dt =$

$$t = 2x + 1$$

$$dt = 2dx$$

$$\frac{dt}{2} = dx$$

$$=\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+C=\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C=\frac{3\sqrt[3]{t^5}}{10}+C=\frac{3\sqrt[3]{(2x+1)^5}}{10}+C$$

г) $$\int e^{3-4x}dx=\int e^t\,\frac{dt}{-4}=-\frac{1}{4}\int e^t dt=-\frac{1}{4}e^t+C=-\frac{1}{4}e^{3-4x}+C$$

$t=3-4x$

$dt=-4dx$

$\frac{dt}{-4}=dx$

д) $$\int\frac{dx}{(2x+3)^5}=\int\frac{\frac{dt}{2}}{t^5}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^5}=\frac{1}{2}\int t^{-5}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{-4}}{-4}+C=\frac{1}{-8t^4}+C=-\frac{1}{8(2x+3)^4}+C$$

$t=2x+3$

$dt=2dx$

$\frac{dt}{2}=dx$

ѓ) $$\int\sin\frac{x}{2}dx=\int\sin t\cdot 2dt=2\int\sin t dt=2\cdot(-\cos t)+C=-2\cos\frac{x}{2}+C$$

$t=\frac{x}{2}$

$dt=\frac{1}{2}dx$

$2dt=dx$

е) $$\int\frac{dx}{4+9x^2}=\int\frac{dx}{4+(3x)^2}=\int\frac{\frac{dt}{3}}{2^2+t^2}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{2^2+t^2}=\frac{1}{3}\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C=\frac{1}{6}arctg\frac{3x}{2}+C$$

$t=3x$ $\qquad a=2$

$dt=3dx$

$\frac{dt}{3}=dx$

ж) $$\int\frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3-(2x)^2}}=\int\frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{3-t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-t^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}}+C=$$

$t=2x$ $\qquad\qquad a=\sqrt{3}$

$dt=2dx\Rightarrow\ \frac{dt}{2}=dx$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}+C$$

з) $$\int\frac{x^2-4x+2}{x+3}dx=\int\frac{(t-3)^2-4(t-3)+2}{t}dt=\int\frac{t^2-10t+23}{t}dt=\int\left(t-10+\frac{23}{t}\right)dt=$$

$t=x+3\Rightarrow t-3=x$

$dt=dx$

$$=\int tdt-10\int dt+23\int\frac{dt}{t}=\frac{t^2}{2}-10t+23\ln|t|+C=\frac{(x+3)^2}{2}-10(x+3)+23\ln|x+3|+C.$$

Задача 1:

а) $\int e^{-x}dx$ б) $\int\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx$ в) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-3x}}$ г) $\int\frac{x^3}{x-1}dx.$

II. $\int f\left(ax^2+b\right)xdx=\int f(t)\frac{dt}{2a}=\frac{1}{2a}\int f(t)dt$ - интегралот е упростен.

$t=ax^2+b$

$dt=2axdx$

$\frac{dt}{2a}=xdx$

Пример2:

а) $$\int\left(7x^2+3\right)^5xdx=\int t^5\frac{dt}{14}=\frac{1}{14}\int t^5dt=\frac{1}{14}\frac{t^6}{6}+C=\frac{\left(7x^2+3\right)^6}{84}+C$$

$t=7x^2+3$

$dt=14xdx$

$\frac{dt}{14}=xdx$

б) $$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-x^2}\,xdx=\int\sqrt{t}\,\frac{dt}{-2}=-\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt=$$

$$t=1-x^2$$
$$dt=-2xdx$$
$$\frac{dt}{-2}=xdx$$

$$=-\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=-\frac{\sqrt{t^3}}{3}+C=-\frac{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}{3}+C.$$

Задача 2:

а) $\int\frac{xdx}{\left(3x^2-5\right)^2}$ б) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ в) $\int\frac{xdx}{3-2x^2}$

г) $\int xe^{-x^2}dx$ д) $\int x\sin x^2dx$ ѓ) $\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{\left(3+x^2\right)^3}}$.

III . $\int f\left(ax^3+b\right)x^2dx=\int f(t)\frac{dt}{3a}=\frac{1}{3a}\int f(t)dt$ - интегралот е упростен.

$$t=ax^3+b$$
$$dt=3ax^2dx$$
$$\frac{dt}{3a}=x^2dx$$

Пример 3:

а) $$\int x^2e^{x^3}dx=\int e^{x^3}x^2dx=\int e^t\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int e^tdt=\frac{1}{3}e^t+C=\frac{1}{3}e^{x^3}+C$$

$$t=x^3$$
$$dt=3x^2dx\Rightarrow\quad\frac{dt}{3}=x^2dx$$

б) $$\int\frac{x^2dx}{\left(5+2x^3\right)^2}=\int\frac{\frac{dt}{6}}{t^2}=\frac{1}{6}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{6}\int t^{-2}dt=\frac{1}{6}\frac{t^{-1}}{-1}+C=\frac{1}{-6t}+C=-\frac{1}{6\left(5+2x^3\right)}+C.$$

$$t=5+2x^3$$
$$dt=6x^2dx\Rightarrow\quad\frac{dt}{6}=x^2dx$$

Задача 3:

а) $\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$ б) $\int \frac{x^2dx}{2-5x^3}$.

IV:

$$\int f(cosx)\,sinxdx = \int f(t)(-dt) = -\int f(t)dt$$

$t = cosx$

$dt = -sinxdx$

$-dt = sinxdx$

$$\int f(sinx)\,cosxdx = \int f(t)\,dt$$

$t = sinx$

$dt = cosxdx$

Интегралите се упростени.

Пример 4:

а) $$\int e^{\cos x}\sin xdx = \int e^t(-dt) = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C$$

$t = \cos x$

$dt = -\sin xdx$

$-dt = \sin xdx$

б) $$\int \sin^{10} x\cos dx = \int t^{10}dt = \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{\sin^{11} x}{11} + C$$

$t = \sin x$

$dt = \cos xdx$

в) $$\int \frac{\cos xdx}{\sin^3 x} = \int \frac{dt}{t^3} = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2\sin^2 x} + C$$

$t = \sin x$

$dt = \cos xdx$

г) $$\int \frac{5\cos^2 x + 3\cos x + 1}{\cos^2 x}\sin xdx = \int \frac{5t^2+3t+1}{t^2}\cdot(-dt) =$$

$t = \cos x$

$dt = -\sin xdx$

$-dt = \sin xdx$

$$= -\int \frac{5t^2+3t+1}{t^2}\cdot dt = -\int\left(5 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt = -\left(5t + 3\ln|t| + \frac{t^{-1}}{-1}\right) + C =$$

$$= -5t - 3\ln|t| + \frac{1}{t} + C = -5\cos x - 3\ln|\cos x| + \frac{1}{\cos x} + C$$

д) $$\int \sin x\sqrt{\cos x}dx = \int \sqrt{\cos x}\sin xdx =$$

$$t = \cos x$$
$$dt = -\sin xdx$$
$$-dt = \sin xdx$$

$$= \int \sqrt{t}\left(-dt\right) = -\int t^{\frac{1}{2}}dt = -\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2\sqrt{t^3}}{3} + C = -\frac{2\sqrt{\cos^3 x}}{3} + C.$$

Задача 4:

а) $\int \frac{7\sin^3 x - 5\sin^2 x + \sin x + 3}{\sin x}\cos xdx$ б) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}dx$ в) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx.$

V. $\boldsymbol{\int f\left(\sqrt{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int f\left(t\right)\cdot 2dt = 2\int f\left(t\right)dt}$ - интегралот е упростен.

$$\boldsymbol{t = \sqrt{x}}$$
$$\boldsymbol{dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx}$$
$$\boldsymbol{2dt = \frac{dx}{\sqrt{x}}}$$

Пример 5:

а) $$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int e^t 2dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$$t = \sqrt{x}$$
$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$
$$2dt = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

б) $$\int \frac{x - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \left(x - 3\sqrt{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - 3\sqrt{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \left(t^2 - 3t\right)2dt =$$

$$t = \sqrt{x}$$
$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow 2dt = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \int \left(2t^2 - 6t\right)dt = 2\int t^2dt - 6\int tdt = 2\frac{t^3}{3} - 6\frac{t^2}{2} + C = 2\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{3} - 3\left(\sqrt{x}\right)^2 + C.$$

Задача5: $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x}dx$.

VI. $\int f(lnx)\frac{dx}{x} = \int f(t)dt$ - интегралот е упростен.

$t = lnx$

$dt = \frac{1}{x}dx$

Пример 6:

а) $\int \frac{\ln^3 x+1}{x\ln x}dx = \int \frac{\ln^3 x+1}{\ln x}\frac{dx}{x} = \int \frac{t^3+1}{t}dt = \int\left(t^2+\frac{1}{t}\right)dt = \frac{t^3}{3}+\ln|t|+C = \frac{\ln^3 x}{3}+\ln|\ln x|+C$

$t = \ln x$

$dt = \frac{1}{x}dx$

б) $\int \frac{\sqrt{\ln x}+1}{x\ln^2 x}dx = \int \frac{\sqrt{\ln x}+1}{\ln^2 x}\frac{dx}{x} = \int \frac{\sqrt{t}+1}{t^2}dt =$

$t = \ln x$

$dt = \frac{1}{x}dx$

$$= \int\left(\frac{\sqrt{t}}{t^2}+\frac{1}{t^2}\right)dt = \int\left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{t^2}+\frac{1}{t^2}\right)dt = \int\left(t^{\frac{1}{2}-2}+t^{-2}\right)dt =$$

$$= \int t^{-\frac{3}{2}}dt + \int t^{-2}dt = \frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+\frac{t^{-2+1}}{-2+1}+C =$$

$$= \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+\frac{t^{-1}}{-1}+C = -\frac{2}{\sqrt{t}}-\frac{1}{t}+C = \frac{2}{\sqrt{\ln x}}-\frac{1}{\ln x}+C$$

в) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int \frac{1}{1+\ln x}\frac{dx}{x} = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t|+C = \ln|1+\ln x|+C.$

$t = 1+\ln x$

$dt = \frac{1}{x}dx$

г) $$\int \frac{\ln^2 x}{x(2+3\ln x)} = \int \frac{\ln^2 x}{2+3\ln x}\frac{dx}{x} = \int \frac{\left(\frac{t-2}{3}\right)^2}{t}\frac{dt}{3} = \int \frac{\frac{t^2-4t+4}{9}}{t}\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}\int \frac{t^2-4t+4}{t}dt =$$

$$t = 2+3\ln x \quad \Rightarrow \frac{t-2}{3} = \ln x$$

$$dt = 3\frac{1}{x}dx \Rightarrow \frac{dt}{3} = \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{27}\int\left(t-4+\frac{4}{t}\right)dt = \frac{1}{27}\left(\frac{t^2}{2}-4t+4\ln|t|\right)+C =$$

$$= \frac{1}{27}\left[\frac{(2+3\ln x)^2}{2}-4(2+3\ln x)+4\ln|2+3\ln x|\right]+C.$$

Задача 6:

а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$ б) $\int \frac{(2-3\ln x)^2}{x\ln x}dx.$

VII .

$$\int f(tgx)\frac{dx}{cos^2 x} = \int f(t)\,dt$$

$$t = tgx$$

$$dt = \frac{1}{cos^2 x}dx$$

$$\int f(ctgx)\frac{dx}{sin^2 x} = -\int f(t)dt$$

$$t = ctgx$$

$$dt = -\frac{1}{sin^2 x}dx$$

$$-dt = \frac{dx}{sin^2 x}$$

Интегралите се упростени.

Пример 7:

а) $$\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx = \int e^{tgx}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int e^t dt = e^t + C = e^{tgx} + C$$

$$t = tgx$$

$$dt = \frac{1}{cos^2 x}dx$$

б) $\int \frac{\sqrt{ctgx}}{\sin^2 x}dx = \int \sqrt{ctgx}\,\frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \sqrt{t}\,dt = -\int t^{\frac{1}{2}}dt == -\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2\sqrt{t^3}}{3} + C = -\frac{2\sqrt{ctg^3 x}}{3} + C.$

$t = ctgx$

$dt = -\frac{1}{\sin^2 x}dx$

$-dt = \frac{dx}{\sin^2 x}$

Задача 7:

а) $\int \frac{ctg^3 x + 1}{\sin^2 x}dx$ б) $\int \frac{5 + tg^2 x}{\cos^2 x}dx.$

VIII.

$\int f(arcsinx)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int f(t)\,dt$

$t = arcsinx$

$dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$\int f(arccosx)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int f(t)\,dt$

$t = arccosx$

$dt = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$-dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

I X.

$\int f(arctgx)\frac{dx}{1+x^2} = \int f(t)\,dt$

$t = arctgx$

$dt = \frac{1}{1+x^2}dx$

$\int f(arcctgx)\frac{dx}{1+x^2} = -\int f(t)\,dt$

$t = arcctgx$

$dt = -\frac{1}{1+x^2}dx$

$-dt = \frac{dx}{1+x^2}$

Пример 8:

$$\int \frac{\left(2+3arctg^3x\right)^2}{1+x^2}dx = \int \left(2+3arctg^3x\right)^2 \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$t = arctgx$$

$$dt = \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \int \left(2+3t^3\right)^2 dt = \int \left(4+12t^3+t^6\right)dt = 4t + 12\frac{t^4}{4} + \frac{t^7}{7} + C =$$

$$= 4arctgx + 3arctg^4x + \frac{1}{7}arctg^7x + C$$

Задача 8:

а) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int \frac{5-\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}dx$ в) $\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx$.

4. ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА

Нека $u = u(x)$ и $v = v(x)$ се две диференцијабилни функции во интервалот (a,b). Согласно правилото за извод од производ на две функции имаме

$$(uv)' = u'v + uv',$$

од каде што

$$\int (uv)' dx = \int \left(u'v + uv'\right)dx$$

$$uv = \int u'vdx + \int uv'dx$$

$$uv = \int vdu + \int udv$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$ ***- формула за парцијална (делумна) интеграција.***

Пример 1:

$$\int x\sin xdx = -x\cos x - \int -\cos xdx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C$$

$$u = x \qquad dv = \sin xdx$$

$$du = dx \quad v = \int x\sin xdx = -\cos x.$$

Задача 1: $\int x\cos xdx.$

Пример 2:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

$$u = x \qquad dv = e^x dx$$

$$du = dx \quad v = \int e^x dx = e^x.$$

Пример 3:

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

$$u = x \qquad dv = e^{-x} dx$$

$$du = dx \quad v = \int e^{-x} dx = -\int e^t dt = -e^t = -e^{-x}$$

$$t = -x$$

$$dt = -1dx$$

$$-dt = dx$$

Задача 2:

а) $\int xe^{2x} dx$ б) $\int x \sin 3x dx$ в) $\int x \cos \frac{x}{2} dx.$

Пример 4:

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x - \int -\cos x \cdot 2x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx =$$

$$u = x^2 \qquad dv = \sin x dx \qquad\qquad u = x \qquad dv = \cos x dx$$

$$du = 2x dx \quad v = \int \sin x dx = -\cos x \qquad\qquad du = dx \quad v = \int \cos x dx = \sin x$$

$$= -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

Пример 5:

$$\int \left(5x^2 + 3x + 1\right) e^x dx = \left(5x^2 + 3x + 1\right) e^x - \int e^x \left(10x + 3\right) dx =$$

$$u = 5x^2 + 3x + 1 \qquad dv = e^x dx$$

$$du = \left(10x + 3\right) dx \qquad v = \int e^x dx = e^x$$

$$= \left(5x^2 + 3x + 1\right) e^x - \int \left(10x + 3\right) e^x dx =$$

$$u = 10x + 3 \qquad dv = e^x dx$$

$$du = 10 dx \qquad v = \int e^x dx = e^x$$

$$= \left(5x^2 + 3x + 1\right) e^x - \left[\left(10x + 3\right) e^x - \int e^x 10 dx\right] =$$

$$= \left(5x^2 + 3x + 1\right) e^x - \left(10x + 3\right) e^x + 10e^x + C.$$

Пример 6:

$$\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = xtgx - \int tgxdx = xtgx - \int \frac{\sin x}{\cos x}dx =$$

$$u = x \qquad dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \qquad\qquad t = \cos x$$

$$du = dx \quad v = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx \qquad dt = -\sin xdx$$

$$-dt = \sin xdx$$

$$= xtgx - \int \frac{-dt}{t} = xtgx + \ln|t| + C = xtgx + \ln|\cos x| + C.$$

Задача 3:

а) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$ б) $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$ в) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx.$

Пример 7:

$$\int x^3 \ln xdx = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} + C.$$

$$u = \ln x \qquad dv = x^3 dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \quad v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$$

Задача 4:

а) $\int \ln xdx$ б) $\int arc\sin xdx$ в) $\int arc\cos xdx$

г) $\int arctgxdx$ д) $\int arcctgxdx$ ѓ) $\int xarctgxdx$

е) $\int xarcctgxdx.$

5. НЕКОИ РЕКУРЕНТНИ ФОРМУЛИ

I) Дадена е полиномна функција т.е. полином по променлива x од n-та степен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

при што $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$ и $a_n \neq 0$.

Имаме

$$\int P_n(x)e^x dx = P_n(x)e^x - \int e^x P_n'(x)dx =$$

$$u = P_n(x) \qquad dv = e^x dx$$

$$du = P_n'(x)dx \qquad v = \int e^x dx = e^x$$

$$\left(\text{како} \quad P_n'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = P_{n-1}(x)\right)$$

$$= P_n(x)e^x - \int P_{n-1}(x)e^x dx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int P_n(x)e^x dx = P_n(x)e^x - \int P_{n-1}(x)e^x dx}$$

Велиме, имаме рекурентна постапка при која што добиениот интеграл по природа е ист со почетниот, а при оваа постапка степенот на полиномот во подинтегралната функција е намален за единица.

Пример 1:

$$\int \underbrace{\left(x^2+3x+1\right)}_{P_2(x)} e^x dx = \left(x^2+3x-1\right)e^x - \int e^x (2x+3)dx$$

$$u = x^2+3x+1 \qquad dv = e^x dx$$

$$du = (2x+3)dx \qquad v = \int e^x dx = e^x$$

$$= \left(x^2+3x+1\right)e^x - \int \underbrace{(2x+3)}_{P_1(x)} e^x dx =$$

$$u = 2x+3 \qquad dv = e^x dx$$

$$du = 2dx \qquad v = e^x$$

$$= \left(x^2+3x+1\right)e^x - \left[(2x+3)e^x - \int e^x 2dx\right] =$$

$$= \left(x^2+3x+1\right)e^x - (2x+3)e^x + 2e^x + C =$$

$$= e^x\left(x^2+3x+1-2x-3+2\right) + C = e^x\left(x^2+x\right) + C.$$

II)

$$I_n = \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx =$$

$$u = \sin^{n-1} x \qquad dv = \sin x dx$$

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx \qquad v = -\cos x$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x - \int -\cos x \cdot (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\left(1-\sin^2 x\right)dx=$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\left(\sin^{n-2}x-\sin^n x\right)dx=$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\underbrace{\sin^{n-2}xdx}_{I_{n-2}}-(n-1)\int\underbrace{\sin^n xdx}_{I_n}$$

$$\Rightarrow I_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$I_n+(n-1)I_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}$$

$$nI_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_n=\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}}$$

Пример 2: $\int\sin^7 xdx=I_7=-\frac{1}{7}\sin^6 x\cos x+\frac{6}{7}I_5=$

$$=-\frac{1}{7}\sin^6 x\cos x+\frac{6}{7}\left(-\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x+\frac{4}{5}I_3\right)=$$

$$=-\frac{1}{7}\sin^6 x\cos x-\frac{6}{35}\sin^4 x\cos x+\frac{24}{35}\left(-\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x+\frac{2}{3}I_1\right)=$$

$$=-\frac{1}{7}\sin^6 x\cos x-\frac{6}{35}\sin^4 x\cos x-\frac{8}{35}\sin^2 x\cos x+\frac{16}{35}\int\sin xdx=$$

$$=-\frac{1}{7}\sin^6 x\cos x-\frac{6}{35}\sin^4 x\cos x-\frac{8}{35}\sin^2 x\cos x-\frac{16}{35}\cos x+C.$$

III) Изведи, на сличен начин, рекурентна формула за неопределениот интеграл $I_n=\int\cos^n xdx$

и истата примени ја над интегралот $\int\cos^8 xdx.$

IV) $K_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}=\int\frac{x^2+1-x^2}{\left(x^2+1\right)^n}dx=$

$$=\int\left[\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}-\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^n}\right]dx=\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}-\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^n}=$$

$$=K_{n-1}-\int x\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^n}=K_{n-1}-\left[-\frac{x}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}}-\int\frac{-1}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}}dx\right]=$$

Со парцијална интеграција (види следна страна).

$$u = x \qquad dv = \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^n}$$

$$du = dx \qquad v = \int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^n} = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t^n} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^n} =$$

$$t = x^2+1$$
$$dt = 2xdx$$
$$\frac{dt}{2} = xdx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{t^{-n+1}}{2(n-1)} = -\frac{1}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}}$$

$$= K_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} =$$

$$= K_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}K_{n-1} =$$

$$= \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \left[1 - \frac{1}{2(n-1)}\right]K_{n-1} =$$

$$= \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}K_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K_n = \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}K_{n-1}}$$

Пример 3:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3} = K_3 = \frac{x}{2\cdot 2\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{4}K_2 = \frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{x}{2\cdot 1\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}K_1\right] =$$

$$= \frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3x}{8\left(x^2+1\right)} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3x}{8\left(x^2+1\right)} + \frac{3}{8}arctgx + C$$

6. НЕКОИ НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ ШТО СОДРЖАТ КВАДРАТЕН ТРИНОМ

I) $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ **II)** $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

$(a,b,c,A,B \in \mathbf{R} \wedge a \neq 0)$

Неопределените интеграли од обликот I) и II) се решаваат на тој начин што квадратниот трином се дополнува до полн квадрат

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

за да со смена $t = x+\frac{b}{2a}$ се сведат на таблични интеграли.

Оваа постапка ќе ја илустрираме на неколку примери:

Пример 1:

$$\int \frac{dx}{3x^2+18x+42} = \int \frac{dx}{3\left[x^2+6x+14\right]} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+6x+3^2-3^2+14} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+3)^2+5} =$$

$$t = x+3 \Rightarrow dt = dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+5} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(\sqrt{5}\right)^2+t^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{t}{\sqrt{5}}+C = \frac{1}{3\sqrt{5}}arctg\frac{x+3}{\sqrt{5}}+C.$$

Пример 2:

$$\int \frac{3x+2}{-x^2+2x+3}dx = \int \frac{3x+2}{-\left[x^2-2x-3\right]}dx = -\int \frac{3x+2}{x^2-2x+1^2-1^2-3}dx = -\int \frac{3x+2}{(x-1)^2-4}dx =$$

$$t = x-1 \Rightarrow t+1 = x$$

$$dt = dx$$

$$= -\int \frac{3(t+1)+2}{t^2-4}dt = -\int \frac{3t+5}{t^2-4}dt = -\int\left(\frac{3t}{t^2-4}+\frac{5}{t^2-4}\right)dt = -3\int \frac{tdt}{t^2-4}-5\int \frac{dt}{t^2-4} =$$

$$p = t^2-4$$

$$dp = 2tdt$$

$$\frac{dp}{2} = tdt$$

$$=-3\int\frac{\frac{dp}{2}}{p}+5\int\frac{dt}{2^2-t^2}=-\frac{3}{2}\ln|p|+5\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|+C=-\frac{3}{2}\ln\left|t^2-4\right|+\frac{5}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|+C=$$

$$=-\frac{3}{2}\ln\left|(x-1)^2-4\right|+\frac{5}{4}\ln\left|\frac{2+x-1}{2-(x-1)}\right|+C=-\frac{3}{2}\ln\left|x^2-2x-3\right|+\frac{5}{4}\ln\left|\frac{1+x}{3-x}\right|+C.$$

Пример 3:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+7}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+2^2-2^2+7}}=$$

$$=\int\frac{xdx}{\sqrt{(x-2)^2+3}}=\int\frac{(t+2)\,dt}{\sqrt{t^2+3}}=\int\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}+\frac{2}{\sqrt{t^2+3}}\right)dt=\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+3}}+2\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+3}}=$$

$t=x-2\Rightarrow t+2=x$ $\qquad$ $p=t^2+3$

$dt=dx$ $\qquad$ $dp=2tdt\Rightarrow\ \frac{dp}{2}=tdt$

$$=\int\frac{\frac{dp}{2}}{\sqrt{p}}+2\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+3}}=\frac{1}{2}\frac{p^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\ln\left|t+\sqrt{t^2+3}\right|+C=\sqrt{p}+\ln\left|t+\sqrt{t^2+3}\right|+C=$$

$$=\sqrt{t^2+3}+\ln\left|t+\sqrt{t^2+3}\right|+C=\sqrt{(x-2)^2+3}+\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2+3}\right|+C$$

Пример 4:

$$\int\frac{x+2}{\sqrt{-x^2+2x+2}}dx=\int\frac{x+2}{\sqrt{-\left[x^2-2x-2\right]}}dx=\int\frac{x+2}{\sqrt{-\left[x^2-2x+1^2-1^2-2\right]}}dx=$$

$$=\int\frac{x+2}{\sqrt{-\left[(x-1)^2-3\right]}}dx=\int\frac{x+2}{\sqrt{\left[3-(x-1)^2\right]}}dx=\int\frac{t+3}{\sqrt{3-t^2}}dt=\int\left(\frac{t}{\sqrt{3-t^2}}+\frac{3}{\sqrt{3-t^2}}\right)dt$$

$t=x-1\Rightarrow t+1=x$

$dt=dx$

$$=\int\frac{tdt}{\sqrt{3-t^2}}+3\int\frac{dt}{\sqrt{3-t^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dp}{\sqrt{p}}+3\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-t^2}}=-\frac{1}{2}\frac{p^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+3\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}}+C=$$

$p=3-t^2$

$dp=-2tdt\Rightarrow\ \frac{dp}{-2}=tdt$

$$= \sqrt{3-t^2} + 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} + C = \sqrt{3-(x-1)^2} + 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Забелешка: Интеграли од обликот I), пришто квадратниот трином има реални нули, може да се реши и со т.н. **метода на еднакви коефициенти.** Оваа метода ќе ја илустрираме преку следниот

Пример 5:

$$\int\frac{-2x+13}{x^2-x-2}dx = \int\frac{-2x+13}{(x-2)(x+1)}dx =$$

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x_1=2,\ x_2=-1 \Rightarrow x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

$$\frac{-2x+13}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1} \Big/ \cdot (x-2)(x+1)$$

$$-2x+13 = A(x+1)+B(x-2)$$

$$-2x+13 = (A+B)x + A - 2B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=-2 \\ A-2B=13 \end{cases} \Rightarrow A=3,\ B=-5$$

$$= \int\left(\frac{3}{x-2}+\frac{-5}{x+1}\right)dx = 3\int\frac{dx}{x-2} - 5\int\frac{dx}{x+1} = \ln|x-2| - 5\ln|x+1| + C.$$

Задача 1:

а) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+x-2}$

б) $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^2+6x+13}$

в) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}}$

г) $\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt{-x^2+6x+10}}dx$

7. ИНТЕГРИРАЊЕ НА РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

Нека

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

и

$$P_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

се полиномни функции со степен m и n соодветно и реални коефициенти.

Дефиниција 1**:* ***Секоја функција од облик

$$y = \frac{P_m(x)}{P_n(x)}$$

се нарекува рационална функција од x.

Пример 1:

а) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ б) у=$\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$

в) у=$\dfrac{x^3+2}{x^2+x-2}$ г) у=$\dfrac{3x+1}{x^2+x-6}$

д) $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1}$ ѓ) у=$\dfrac{4}{x^2+1}$

е) у=$\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+x+3}$ ж) у=$\dfrac{e^x}{x^2+1}$.

Функциите а)-ѓ) се рационални функции, додека е) и ж) не се рационални функции.

Дефиниција 2: Дропката $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$ во рационалната функција се нарекува права дропка ако m<n, додека во случај m≥n дропката се нарекува неправа дропка.

Во примерот 1) дропките во функциите г), д) и ѓ) се прави дропки, додека во а), б) и в) се неправи дропки.

Во оваа точка ќе разгледаме неопределени интеграли од облик

$$\int \frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$$

т.е. интеграли од рационални функции на коишто припаѓаат голем број на интеграли што се сретнуваат во хемијата и техниката. Треба да забележиме дека голем број на типови интеграли, со соодветни смени, се сведуваат на интеграли од рационални функции. Затоа е неопходно подетално изучување на интегралите од рационалните функции. Нивното решавање се базира на неколку теореми од теоријата на алгебрата, коишто ќе ги наведеме без доказ и ќе ги илустрираме со соодветни примери.

Теорема 1: Секоја неправа дропка

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} \qquad (m\geq n)$$

може да се претстави како збир од полиномна функција и права дропка т.е.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = P_{m-n}(x)+\frac{P_s(x)}{P_n(x)} \qquad (s<n).$$

Пример 2: За неправата дропка $\dfrac{x^3+2}{x^2+x-2}$ имаме:

$$\left(\cancel{x^3}+2\right):\left(x^2+x-2\right)=x-1$$
$$\underline{\cancel{\pm x^3}\ \pm x^2 \mp 2x}$$
$$\cancel{-x^2}+2x\cancel{+2}$$
$$\underline{\cancel{\mp x^2}\mp\ x\cancel{\pm 2}}$$
$$3x$$
$$\Rightarrow\ \frac{x^3+2}{x^2+x-2}=x-1+\frac{3x}{x^2+x-2}$$

Последица: Неопределен интеграл од неправа дропка се сведува на неопределен интеграл од полиномна функција и неопределен интеграл од права дропка т.е.

$$\int\frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx=\int P_{m-n}(x)dx+\int\frac{P_s(x)}{P_n(x)}dx,\qquad (m\geq n,\ s<n).$$

Теорема 2 (основна теорема на алгебрата): ***Секоја полиномна функција***

$$P_n(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_2x^2+b_1x+b_0$$

има барем една нула (реална или комплексна).

Теорема 3 (на Безу): ***Ако*** $x=\alpha$ ***е нула на полиномната функција*** $P_n(x)$ ***(т.е.*** $P_n(\alpha)=0$***), тогаш изразот*** $x-\alpha$ ***е делител на*** $P_n(x)$ ***и притоа***

$$P_n(x)=(x-\alpha)P_{n-1}(x).$$

Пример 3: Полиномната функција $P_3(x)=x^3-2x^2-5x+6$ има една нула $x=1$, бидејќи $P_3(1)=1^3-2\cdot1^2-5\cdot1+6=0$. Согласно теоремата на Безу

$$P_3(x)=(x-1)P_2(x).$$

Навистина,

$$(x^3-2x^2-5x+6):(x-1)=x^2-x-6$$
$$\underline{-x^3\mp x^2}$$
$$-x^2-5x+6$$
$$\underline{\mp x^2\pm x}$$
$$-6x+6$$
$$\underline{\mp 6x\pm 6}$$
$$0$$
$$\Rightarrow\ \underbrace{x^3-2x^2-5x+6}_{P_3(x)}=(x-1)\underbrace{(x^2-x-6)}_{P_2(x)}\ .$$

Последица: Да ја земеме полиномната функција $P_n(x)$. Согласно основната теорема на алгебрата таа има барем една нула α_1- реална или комплексна. Според теоремата на Безу полиномната функција $P_n(x)$ може да се запише во облик

$$P_n(x)=(x-\alpha_1)P_{n-1}(x).$$

Меѓутоа, $P_{n-1}(x)$ е исто така полиномна функција, па според основната теорема на алгебрата има барем една нула α_2 и според теоремата на Безу може да се запише во облик

$$P_{n-1}(x)=(x-\alpha_2)P_{n-2}(x).$$

Слично, за полиномната функција $P_{n-2}(x)$ добиваме

$$P_{n-2}(x)=(x-\alpha_3)P_{n-3}(x).$$

После n-вакви постапки добиваме

$$P_1(x)=(x-\alpha_n)P_0(x).$$

Имајќи ги в предвид последните формули, со последователна замена, добиваме

$$\begin{aligned} P_n(x)&=(x-\alpha_1)P_{n-1}(x)\\ &=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)P_{n-2}(x)\\ &=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)P_{n-3}(x)\\ &\vdots\\ &=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)P_0(x), \end{aligned}$$

при што $P_0(x)=b_n$. Според тоа можеме да ја формулираме следнава теорема:

Теорема 4 (Прва теорема за факторизација): ***Секоја полиномна функција од n-та степен $P_n(x)$ може да се запише во облик***

$$\boldsymbol{P_n(x)=b_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n),}$$

при што $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ldots,\alpha_n$ се сите нули на $P_n(x)$.

Велиме полиномната функција $P_n(x)$ е претставена во вид на прости множители.

Пример 4: Полиномната функција

$$P_3(x)=x^3-2x^2-5x+6$$

има три нули

$$x=1,\ x=-2 \text{ и } x=3,$$

па според првата теорема за факторизација

$$P_3(x)=1\cdot(x-1)(x+2)(x-3).$$

Забелешка 1: Може да се случи некои од нулите $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ldots,\alpha_n$ на полиномната функција $P_n(x)$ да се еднакви меѓу себе. Во случај кога к од овие нули се еднакви (не губиме од општоста ако претпоставиме дека тоа се првите к нули) т.е. $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k$ *(к≤n),* имаме

$$P_n(x)=b_n\underbrace{(x-\alpha_1)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_1)}_{к-загради}\underbrace{(x-\alpha_{k+1})\ldots(x-\alpha_n)}_{P_{n-k}(x)}$$

т.е.

$$P_n(x)=(x-\alpha_1)^k P_{n-k}(x).$$

Во овој случај велиме α_1 **е повеќекратна нула со кратност к** т.е. е **к-кратна нула**.

Забелешка 2: Согласно основната теорема на алгебрата, некои од нулите α_1, α_2, $\alpha_3,\ldots,\alpha_n$ на $P_n(x)$ можат да бидат комплексни броеви. Ако комплексниот број $a+ib$ е нула на полиномната функција $P_n(x)$ со реални коефициенти, тогаш и конјугирано комплексниот број $a-ib$ е нула на $P_n(x)$. Па, ако ставиме $\alpha_1=a+ib$ и $\alpha_2=a-ib$ за полиномната функција имаме

$$P_n(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)b_n=$$
$$=(x-a-ib)(x-a+ib)P_{n-2}(x)=$$
$$=[(x-a)^2-i^2b^2]P_{n-2}(x)=$$
$$=[x^2-2ax+a^2+b^2]P_{n-2}(x)=$$
$$=(x^2+px+q)P_{n-2}(x)$$

Забелешка 3: Ако комплексната нула $\alpha_1=a+ib$ на полиномната функција $P_n(x)$ е l-кратна нула, тогаш и конјугирано комплексната нула $\alpha_2=a-ib$ е исто така l-кратна нула. Во овој случај за $P_n(x)$ имаме

$$P_n(x)=(x-\alpha_1)^l(x-\alpha_2)^l P_{n-2l}(x)$$
$$P_n(x)=[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)]^l P_{n-2l}(x)$$
$$P_n(x)=[(x-a-ib)(x-a+ib)]^l P_{n-2l}(x)$$
$$P_n(x)=[x^2-2ax+a^2+b^2]^l P_{n-2l}(x)$$
$$P_n(x)=(x^2+px+q)^l P_{n-2l}(x).$$

Имајќи ја в предвид првата теорема за факторизација како и направените забелешки 1. 2. и 3. можеме да ја искажеме следнава теорема:

Теорема 5 (Општа теорема за факторизација): ***Секоја полиномна функција***

$$\boldsymbol{P_n(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_2x^2+b_1x+b_0}$$

со реални коефициенти може да се претстави во вид на производ од прости множители т.е. во вид

$$\boldsymbol{P_n(x)=b_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_j)^{k_j}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}},$$

при што α_1, α_2,...,α_j се сите реални нули на полиномната функција $P_n(x)$ со кратност $к_1$, $к_2$,...,$к_j$ соодветно и притоа

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_j + 2l_1 + 2l_2 + \ldots + 2l_r = n.$$

Пример 5: $P_4(x) = x^4 - 1$

$$= (x^2 - 1)(x^2 + 1)$$
$$= (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

$\Rightarrow$ $x=1$ и $x=-1$ се реални нули, а квадратниот трином x^2+1 нема реални нули.

Теорема 6 (на Даламбер за распаѓање на прави дропки на прости собироци): ***Секоја права дропка $\dfrac{P_s(x)}{P_n(x)}$ (s<n) може да се распадне на збир од прости дропки т.е.***

$$\frac{P_s(x)}{P_n(x)} = \frac{P_s(x)}{b_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_j)^{k_j}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}} =$$

$$= \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \frac{A_3}{(x-\alpha_1)^3} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} +$$

$$+ \frac{B_1}{x-\alpha_2} + \frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2} + \frac{B_3}{(x-\alpha_2)^3} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}} +$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{C_1}{x-\alpha_j} + \frac{C_2}{(x-\alpha_j)^2} + \frac{C_3}{(x-\alpha_j)^3} + \ldots + \frac{C_{k_j}}{(x-\alpha_j)^{k_j}} +$$

$$+ \frac{D_1x+E_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{D_2x+E_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{D_{l_1}x+E_{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} +$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{F_1x+G_1}{x^2+p_rx+q_r} + \frac{F_2x+G_2}{(x^2+p_rx+q_r)^2} + \ldots + \frac{F_{l_r}x+G_{l_r}}{(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}}.$$

Пример 6: $$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+3)^3(x^2-x+1)(x^2+3)^2} =$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} + \frac{D}{(x+3)^3} + \frac{Ex+F}{x^2-x+1} + \frac{Gx+H}{x^2+3} + \frac{Jx+I}{(x^2+3)^2}.$$

Согласно изнесените теореми можеме да го формулираме следново правило:

ПРАВИЛО за решавање на неопределени интеграли

$$\int \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx$$

од рационални функции:
1) Гледаме дали дропката во подинтегралната функција е права дропка или неправа. Во случај на неправа дропка, согласно теоремата 1, неправата дропка ја запишуваме како збир од полиномна функција и права дропка.
2) Во случај на права дропка, прво се врши факторизација на прости множители на полиномната функција $P_n(x)$ во именителот на правата дропка (теорема 5), за потоа, со теоремата на Даламбер, правата дропка да се распадне на збир од попрости дропки и
3) На крај, согласно особините на неопределениот интеграл, да се земе интеграл од секој член пооделно.
Со оваа постапка интеграл од било која рационална функција се сведува на решавање на следниве типови интеграли:

а) $\int x^n dx$ б) $\int \frac{dx}{x-\alpha}$ в) $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n}$

г) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ д) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$.

Првиот од овие интеграли е табличен, вториот и третиот се решаваат со смена t = x–α, а четвртиот и петтиот со дополнување до полн квадрат.

Пример 7: $\int \frac{x^4-3x^3+2x^2+2x+1}{x^2-4x+5}dx = ?$

Решение: Дропката во подинтегралната функција е неправа дропка. Имаме:

$$\left(x^4-3x^3+2x^2+2x+1\right):\left(x^2-4x+5\right)=x^2+x+1$$

$$\underline{\pm x^4 \mp 4x^3 \pm 5x^2}$$

$$x^3-3x^2+2x+1$$

$$\underline{\pm x^3 \mp 4x^2 \pm 5x}$$

$$x^2-3x+1$$

$$\underline{\pm x^2 \mp 4x \pm 5}$$

$$x-4$$

$$\Rightarrow x^4-3x^3+2x^2+2x+1 = x^2+x+1+\frac{x-4}{x^2-4x+5}$$

Поради ова, за неопределениот интеграл имаме:

$$\int \frac{x^4-3x^3+2x^2+2x+1}{x^2-4x+5}dx = \int\left(x^2+x+1+\frac{x-4}{x^2-4x+5}\right)dx =$$

$$= \int x^2 dx + \int x dx + \int dx + \int \frac{x-4}{x^2-4x+5}dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\int \frac{x-4}{x^2-4x+2^2-2^2+5}dx =$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{x-4}{\left(x-2\right)^2+1}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{t-2}{t^2+1}dt=$$

$$t=x-2\Rightarrow t+2=x$$
$$dt=dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{t}{t^2+1}dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{\frac{dp}{2}}{p}-2arctgt=$$

$$p=t^2+1$$
$$dp=2tdt \quad \text{т.е.} \quad \frac{dp}{2}=tdt$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|p|-2arctgt+C=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right|-2arctgt+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln\left|\left(x-2\right)^2+1\right|-2arctg\left(x-2\right)+C.$$

Пример 8: $\int\frac{8x^2+x+3}{x^3-x^2+x-1}dx=\int\frac{8x^2+x+3}{x^2\left(x-1\right)+\left(x-1\right)}dx=$

$$=\int\frac{8x^2+x+3}{\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)}dx=\int\left(\frac{6}{x-1}+\frac{2x+3}{x^2+1}\right)dx=$$

$$\frac{8x^2+x+3}{\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \quad /\cdot\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)$$

$$8x^2+x+3=\underline{\underline{Ax^2}}+A+\underline{\underline{Bx^2}}-\underline{Bx}+\underline{Cx}-C$$

$$8x^2+x+3=\left(A+B\right)x^2+\left(-B+C\right)x+A-C$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=8\\-B+C=1\\A-C=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+C=9\\A-C=3\end{cases}$$

$$2A=12,\quad A=6,\quad C=3,\quad B=2$$

$$\Rightarrow\frac{8x^2+x+3}{\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{6}{x-1}+\frac{2x+3}{x^2+1}$$

$$= 6\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2x+3}{x^2+1}dx = 6\int \frac{dt}{t} + \int\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{3}{x^2+1}\right)dx = 6\ln|t| + \int \frac{2xdx}{x^2+1} + 3\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$t = x-1$ $\quad\quad\quad\quad$ $p = x^2+1$

$dt = dx$ $\quad\quad\quad\quad$ $dp = 2xdx$

$$= 6\ln|x-1| + \int \frac{dp}{p} + 3arctgx = 6\ln|x-1| + \ln|p| + 3arctgx + C =$$

$$= 6\ln|x-1| + \ln\left|x^2+1\right| + 3arctgx + C.$$

Задачи:

а) $\int \frac{5x^2-22x-9}{x^3-2x^2-3x}dx$ $\quad$ б) $\int \frac{4}{x^3+4x}dx$ $\quad$ в) $\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx.$

8. ИНТЕГРАЛИ НА ХЕМИСКИ РЕАКЦИИ

8.1 ИНТЕГРАЛ НА МОНОМОЛЕКУЛАРНА РЕАКЦИЈА

Имаме хемиска реакција

$$A \rightarrow \text{продукт}$$

во која што учествува само еден хемиски реагенс A со почетно количество супстанција од a mola (на пример радиоактивно распаѓање). Нека со x mola означиме количество супстанција од реагенсот A што изреагирало за време t мерено од почетокот на реакцијата. Јасно е дека изреагираното количество супстанција x за време t ќе зависи од времето t т.е. е функција од време, $x = x(t)$. Согласно хемиското значење на изводот, брзината на хемиската реакција во моментот t е $x' = x'(t)$. Од друга страна, согласно хемиските законитости, брзината на хемиската реакција во моментот t е пропорционална на активното количество супстанција $a-x$ mola на реагенсот A. Поради ова го имаме равенството

$$x' = k(a-x),$$

каде што k е **коефициент на пропорционалност**. Равенката

$$x' = k(a-x),$$

т.е.

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x),$$

се нарекува **диференцијална равенка на мономолекуларна реакција**. Истата се решава на следниов начин:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x),$$

$$dx = k(a-x)dt$$

$$\frac{dx}{a-x}=kdt$$

Велиме дека променливите во диференцијалната равенка на мономолекуларна реакција се раздвоени (на една страна од знакот = се наоѓа променливата x, а на другата се наоѓа променливата t). Земаме неопределен интеграл над двете страни во последното равенство:

$$\int\frac{dx}{a-x}=\int kdt$$

На страна ќе ги решиме интегралите

$$\int\frac{dx}{a-x}=\int-\frac{dp}{p}=-\ln|p|+C_1=-\ln|a-x|+C_1 \quad \text{и} \quad \int kdt=kt+C_2$$

$$p=a-x$$

$$dp=-dx$$

$$-dp=dx$$

па имаме $-\ln(a-x)+C_1=kt+C_2$

$$-\ln(a-x)=kt+C_2-C_1$$

$$-\ln(a-x)=kt+C, \qquad C=C_2-C_1$$

Сега треба да ја одредиме вредноста на константата C=? Неа ќе ја определиме од условот што на самиот почеток на реацијата (тогаш t=0) изреагираното количество супстанција x=0 т.е. од условот за t=0, x(0)=0.

Имаме

$$-\ln(a-0)=k\cdot 0+C$$

$$-\ln a=C$$

Значи

$$-\ln(a-x)=kt-\ln a$$

$$-kt=\ln(a-x)-\ln a$$

$$-kt=\ln\frac{a-x}{a}$$

$$\Rightarrow\frac{a-x}{a}=e^{-kt}$$

$$a-x=ae^{-kt}$$

$$a-ae^{-kt}=x \quad \text{т.е.} \quad \boxed{x=a\left(1-e^{-kt}\right)}$$

Ова се вика **решение** или **„интеграл”** на диференцијалната равенка на мономолекуларната реакција. Ова решение ни го дава изреагираното количество супстанција x како функција од време t во експлицитен облик.

8.2 ИНТЕГРАЛ НА БИМОЛЕКУЛАРНА РЕАКЦИЈА

Разгледуваме хемиска реакција

A+B → продукт

во која што учествуваат два хемиски реагенси A и B со почетни количества супстанции од a mola и b mola соодветно. При оваа реакција претпоставуваме дека 1 mol од реагенсот A ќе изреагира со 1 mol од реагенсот B. Нека со $x = x(t)$ mola означиме количество супстанција од реагенсот A што ќе изреагира за време t мерено од почетокот на реакцијата. Знаеме дека во моментот t од реакцијата, брзината на хемиската реакција е $x' = x'(t)$ (или $\frac{dx}{dt}$, што е друга ознака за извод), а во тој момент активно количество супстанција од реагенсот A е $a-x$ mola и од реагенсот B е $b-x$ mola. Позната е законитоста според која брзината на хемиската реакција во моментот t е пропорционална на активните количества супстанции (од реагенсите A и B што учествуваат во реакцијата), па според тоа и на производот од активните количества супстанции. Поради ова го имаме равенството

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

- **диференцијална равенка на бимолекуларна реакција**.

k - коефициент на пропорционалност.

И оваа равенка се решава со разделување на променливи:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

$$dx = k(a-x)(b-x)dt$$

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = kdt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \int kdt$$

Сега одвоено ќе ги решиме двата интеграла

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = ?$$

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{M}{a-x} + \frac{N}{b-x} \quad / \cdot (a-x)(b-x)$$

$$1 = Mb - Mx + Na - Nx$$

$$1 = -(M+N)x + Mb + Na$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(M+N) = 0 \\ Mb + Na = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M+N=0 \Rightarrow M=-N \\ Mb+Na=1 \end{cases}$$

$-Nb+Na=1$

$N(a-b)=1$

$N=\dfrac{1}{a-b}$, $M=-\dfrac{1}{a-b}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a-x)(b-x)}=\frac{-\frac{1}{a-b}}{a-x}+\frac{\frac{1}{a-b}}{b-x}$$

Па според тоа за неопределениот интеграл имаме

$$\int\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=\int\Big(\frac{-\frac{1}{a-b}}{a-x}+\frac{\frac{1}{a-b}}{b-x}\Big)dx=$$

$$=-\frac{1}{a-b}\int\frac{dx}{a-x}+\frac{1}{a-b}\int\frac{dx}{b-x}=$$

$p=a-x$ $\quad$ $s=b-x$

$dp=-dx$ $\quad$ $ds=-dx$

$-dp=dx$ $\quad$ $-ds=dx$

$$=-\frac{1}{a-b}\int-\frac{dp}{p}+\frac{1}{a-b}\int-\frac{ds}{s}=\frac{1}{a-b}ln|p|-\frac{1}{a-b}ln|s|+C_1=$$

$$=\frac{1}{a-b}ln\frac{|p|}{|s|}+C_1=\frac{1}{a-b}ln\frac{|a-x|}{|b-x|}+C_1=\frac{1}{a-b}ln\frac{a-x}{b-x}+C_1.$$

За другиот интеграл имаме

$$\int kdt=k\int dt=kt+C_2,$$

Ако се вратиме на равенството каде што фигурираат овие два интеграли, имаме

$$\frac{1}{a-b}ln\frac{a-x}{b-x}+C_1=kt+C_2$$

$$\frac{1}{a-b}ln\frac{a-x}{b-x}=kt+C_2-C_1$$

$$\frac{1}{a-b}ln\frac{a-x}{b-x}=kt+C,\quad \text{каде што } C=C_2-C_1$$

Сега ќе ја одредиме константата C од условот да на почетокот од реакцијата t=0 и изреагираното количество супстанција е x=0. Имаме

$$\frac{1}{a-b}ln\frac{a-0}{b-0}=k0+C$$

$$\frac{1}{a-b}ln\frac{a}{b}=C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a-b}\, ln\frac{a-x}{b-x} = kt+\frac{1}{a-b}\, ln\frac{a}{b}$$

$$\frac{1}{a-b}\, ln\frac{a-x}{b-x}-\frac{1}{a-b}\, ln\frac{a}{b} = kt$$

$$\frac{1}{a-b}\, [ln\frac{a-x}{b-x}-ln\frac{a}{b}]= kt$$

$$\frac{1}{a-b}\, ln\frac{\frac{a-x}{b-x}}{\frac{a}{b}} =kt$$

$$ln\frac{b(a-x)}{a(b-x)} =(a-b)kt$$

$$\frac{b(a-x)}{a(b-x)} =e^{(a-b)kt}$$

$$\frac{ab-bx}{ab-ax} =e^{(a-b)kt}$$

$$ab-bx= ab\, e^{(a-b)kt}-ax\, e^{(a-b)kt}$$

$$ab - ab\, e^{(a-b)kt} =bx-ax\, e^{(a-b)kt}$$

$$ab\, (1-e^{(a-b)kt})=x(b-a\, e^{(a-b)kt})$$

$$\frac{ab(1-e^{(a-b)kt})}{b-ae^{(a-b)kt}} =x \quad \text{т.е.} \qquad \boxed{x=\frac{ab(1-e^{(a-b)kt})}{b-ae^{(a-b)kt}}}$$

Ова е **решение** или “**интеграл**” на диференцијалната равенка на бимолекуларна реакција и тоа го дава изреагираното количество супстанција x како функција од време t во експлицитен облик.

8.3 ИНТЕГРАЛ НА ПОЛИМОЛЕКУЛАРНА РЕАКЦИЈА

Разгледуваме хемиска реакција

$$A_1+A_2+A_3+...+A_n \rightarrow \text{продукт}$$

во која што учествуваат n хемиски реагенси $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ со почетни количества супстанции од a_1 mola, a_2 mola, $\dots, a_n$ mola соодветно. Засега реакцијата е т.ш. 1 mol од реагенсот A_1 реагира со 1 mol од реагенс A_2,...,со 1 mol од реагенс A_n. Аналогно на моно и бимолекуларна реакција, ја имаме следнава **диференцијална равенка на полимолекуларна реакција**

$$\frac{dx}{dt} =k(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)$$

Забелешка 1: Може да се случи некои од реагенсите $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ кои што учествуваат во оваа полимолекуларна реакција да се еднакви. Не губиме од општоста на задачата ако претпоставиме дека во оваа реакција учествуваат $l \in N$ различни реагенси $A_1, A_2, A_3, ..., A_l$ (l<n) и притоа

реагенсот A_1 се јавува m_1 пати

реагенсот A_2 се јавува m_2 пати

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

реагенсот A_l се јавува m_l пати

$m_1 + m_2 + ... + m_l = n$

Хемиска равенка на оваа реакција е

$$\underbrace{A_1 + A_1 + ... + A_1}_{m_1-пати} + \underbrace{A_2 + A_2 + ... + A_2}_{m_2-пати} + \ldots + \underbrace{A_l + A_l + ... + A_l}_{m_l-пати} \rightarrow \text{продукт}$$

т.е. $m_1 A_1 + m_2 A_2 + ... + m_l A_l \rightarrow$ продукт

Во овој случај почетните количества супстанции $a_1, a_2, \ldots, a_l$ на секој од реагенсите $A_1, A_2, ..., A_l$ треба да се подели со $m_1, m_2, \ldots, m_l$ соодветно. На овој начин секоја компонента A_1 ќе има почетно количество од $\dfrac{a_1}{m_1}$ mola; секоја компонента A_2 ќе има почетно количество од $\dfrac{a_2}{m_2}$ mola,... и на крај, секоја од компонентите A_l ќе има почетно количество од $\dfrac{a_l}{m_l}$ mola.

Диференцијалната равенка на оваа полимолекуларна реакција има облик

$$\frac{dx}{dt} = k_1 \underbrace{(\frac{a_1}{m_1} - x)(\frac{a_1}{m_1} - x)...(\frac{a_1}{m_1} - x)}_{m_1-загради} \underbrace{(\frac{a_2}{m_2} - x)(\frac{a_2}{m_2} - x)...(\frac{a_2}{m_2} - x)}_{m_2-загради} \cdots$$

$$\cdots \underbrace{(\frac{a_l}{m_l} - x)(\frac{a_l}{m_l} - x)...(\frac{a_l}{m_l} - x)}_{m_l-загради}$$

т.е.

$$\frac{dx}{dt} = k_1 (\frac{a_1}{m_1} - x)^{m_1} (\frac{a_2}{m_2} - x)^{m_2} \cdots (\frac{a_l}{m_l} - x)^{m_l}$$

од каде што добиваме

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k_1}{{m_1}^{m_1} {m_2}^{m_2} \cdots {m_l}^{m_l}} (a_1 - m_1 x)^{m_1} (a_2 - m_2 x)^{m_2} \cdots (a_l - m_l x)^{m_l}$$

Ставајќи

$$k=\frac{k_1}{m_1^{m_1} m_2^{m_2} \cdots m_l^{m_l}}$$

добиваме дека **диференцијалната равенка на полимолекуларната реакција** чија што хемиска равенка е $m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots + m_l\ A_l \rightarrow$ продукт, гласи

$$\frac{dx}{dt}=k(a_1 - m_1 x)^{m_1}(a_2 - m_2 x)^{m_2}\cdots(a_l - m_l x)^{m_l},$$

Притоа k е коефициент на пропорционалност познат и под име **коефициент на брзина на хемиска реакција**.

9. НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ ОД ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

Во оваа точка ќе разгледаме некои типови на неопределени интеграли од тригонометриски функции:

I. $\boxed{\int f(\sin x)\cos x dx}$ и $\boxed{\int f(\cos x)\sin x dx}$

Имаме

$$\int f(\sin x)\cos x dx = \int f(t)\,dt$$
$$t=\sin x$$
$$dt=\cos x dx$$

и

$$\int f(\cos x)\sin x dx = -\int f(t)\,dt$$
$$t=\cos x$$
$$dt=-\sin x dx \quad /(-1)$$
$$-dt=\sin x dx$$

Забелешка: Со овој тип на неопределени интеграли се имаш сретнато во точка 4 тип IV.

Пример 1: $\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C.$

$$t=\sin x$$
$$dt=\cos x dx$$

Пример 2: $\int \ln(\cos x)\cdot \sin x dx = -\int \ln t \cdot dt = -\left[\ln t\cdot t - \int \cancel{t}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}dt\right]=$

$$t=\cos x \qquad u=\ln t \qquad dv=dt$$
$$dt=-\sin x dx\,/(-1) \qquad du=\frac{1}{t}dt \qquad v=\int dt = t$$
$$-dt=\sin x dx$$

$$=-t\ln t + t + C = -\cos x \ln\cos x + \cos x + C.$$

Пример 3: $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = \int t^{-\frac{2}{3}} t = \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{t} + C = 3\sqrt[3]{\sin x} + C.$

$t = \sin x$

$dt = \cos xdx$

II. $\boxed{\int \sin^{2n+1} xdx}$ и $\boxed{\int \cos^{2n+1} xdx}$

$$\int \sin^{2n+1} xdx = \int \sin^{2n} x \sin xdx = \int \left(\sin^2 x\right)^n \sin xdx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^n \sin xdx =$$

$t = \cos x$

$dt = -\sin xdx \quad /(-1)$

$-dt = \sin xdx$

$= -\int \left(1 - t^2\right)^n dt$ - интеграл од рационална функција.

Слично,

$$\int \cos^{2n+1} xdx = \int \cos^{2n} x \cos xdx = \int \left(\cos^2 x\right)^n \cos xdx =$$

$= \int \left(1 - \sin^2 x\right)^n \cos xdx = \int \left(1 - t^2\right)^n dt$- интеграл од рационална функција.

$t = \sin x$

$dt = \cos xdx$

Пример 4: $\int \sin^5 xdx = \int \sin^4 x \sin xdx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 \sin xdx =$

$$= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin xdx = -\int \left(1 - t^2\right)^2 dt = -\int \left(1 - 2t^2 + t^4\right) dt =$$

$t = \cos x$

$dt = -\sin xdx \quad /(-1)$

$-dt = \sin xdx$

$$= -\left(t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right) + C = -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

Пример 5: $\int \cos^7 xdx = \int \cos^6 x \cos xdx = \int \left(\cos^2 x\right)^3 \cos xdx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^3 \cos xdx =$

$t = \sin x$

$dt = \cos xdx$

$$=\int\left(1-t^2\right)^3 dt=\int\left(1-3t^2+3t^4-t^6\right)dt=t-3\frac{t^3}{3}+3\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+C=$$

$$=\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C.$$

Пример 6: $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\cos x dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x}\cos x dx=\int\frac{1-t^2}{t^4}dt=$

$$t=\sin x$$

$$dt=\cos x dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int\frac{dt}{t^4}-\int\frac{dt}{t^2}=\frac{t^{-3}}{-3}-\frac{t^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+C.$$

Задача 1:

а) $\displaystyle\int\frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$ б) $\displaystyle\int\frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}dx.$

III. $\boxed{\int \sin^{2n} x dx}$ и $\boxed{\int \cos^{2n} x dx}$

Во случај на неопределен интеграл од синус или косинус на парна степен се користат тригонометриските формули

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

***Пример 7*:** $\displaystyle\int\sin^2 x dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx=$

$$=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\int\cos t\frac{dt}{2}=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

$$t=2x$$

$$dt=2dx$$

$$\frac{dt}{2}=dx$$

Пример 8: $\displaystyle\int\cos^2 5x dx=\int\frac{1+\cos 10x}{2}dx=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 10x}{2}\right)dx=$

$$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 10xdx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\int\cos t\frac{dt}{10}=\frac{x}{2}+\frac{1}{20}\sin t+C=\frac{x}{2}+\frac{\sin 10x}{20}+C.$$

$t=10x$

$dt=10dx$

$\frac{dt}{10}=dx$

Пример 9: $\int\sin^4 xdx=\int\left(\sin^2 x\right)^2 dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\int\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}dx=$

$$=\int\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos^2+\frac{1}{4}\cos^2 2x\right)dx=\int\frac{1}{4}dx-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+\frac{1}{4}\int\cos^2 2xdx=$$

$t=2x$

$dt=2dx$

$\frac{dt}{2}=dx$

$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\int\cos t\frac{dt}{2}+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\left(\int 1\cdot dx+\int\cos 4xdx\right)=$$

$$=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\int\cos 4xdx=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{x}{8}+\frac{1}{8}\int\cos p\frac{dp}{4}=$$

$p=4x$

$dp=4dx$

$\frac{dp}{4}=dx$

$$=\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin p}{32}+C=\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C.$$

Задача 2:

а) $\int\cos^4 xdx$ б) $\int\sin^6 xdx$ в) $\int\cos^6 xdx.$

IV. Неопределен интеграл од синус по синус, или синус по косинус или косинус по косинус

Се користат тригонометриските формули

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$

Пример 10: $\int \sin 3x\cdot\sin 5x dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(3x-5x)-\cos(3x+5x)\right]dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\cos(-2x)-\cos 8x\right]dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \cos 8x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\cos 2x dx - \int\cos 8x dx\right) = \frac{1}{2}\left(\int\cos t\frac{dt}{2} - \int\cos p\frac{dp}{8}\right) =$$

$$\begin{array}{ll} t = 2x & p = 8x \\ dt = 2dx & dp = 8dx \\ \frac{dt}{2} = dx & \frac{dp}{8} = dx \end{array}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{8}\sin p\right) + C = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

Пример 11: $\int \sin 2x\cdot\cos 8x dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(2x-8x)+\sin(2x+8x)\right]dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\sin(-6x)+\sin 10x\right]dx = \frac{1}{2}\int\left[-\sin 6x + \sin 10x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\int\sin 6x dx + \int\sin 10x dx\right) = -\frac{1}{2}\int\sin t\frac{dt}{6} + \frac{1}{2}\int\sin p\frac{dp}{10} =$$

$$\begin{array}{ll} t = 6x & p = 10x \\ dt = 6dx & dp = 10dx \\ \frac{dt}{6} = dx & \frac{dp}{10} = dx \end{array}$$

$$= -\frac{1}{12}(-\cos t) + \frac{1}{20}(-\cos p) + C = \frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{20}\cos 10x + C.$$

Задача 3:

$$\int\cos 6x\cdot\cos 3x dx.$$

V. $\boxed{\int f(sinx, cosx)\,dx}$

За интеграли од ваков тип се воведува смена

$$tg\frac{x}{2}=t$$

При оваа смена имаме:

$$\sin x=\frac{\sin 2\cdot\frac{x}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=$$

$$=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\sin x=\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$\cos x=\frac{\cos 2\cdot\frac{x}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=$$

$$=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

Од

$$t=tg\frac{x}{2}\Rightarrow\frac{x}{2}=arctgt\Rightarrow x=2arctgt\Rightarrow dx=2\cdot\frac{1}{1+t^2}dt\Rightarrow\boxed{\frac{2dt}{1+t^2}=dx}$$

Значи, при решавање на горниот тип на интеграли постапката е следнава:

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

смена: $tg\frac{x}{2} = t$

$$\Rightarrow \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

***Пример 12*:** $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{\cancel{2}dt}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{\cancel{2}t}{\cancel{1+t^2}}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$

$$t = tg\frac{x}{2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Пример 13: $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\frac{\cancel{2}dt}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{1-t^2}{\cancel{1+t^2}}} = 2\int \frac{dt}{1-t^2} = 2\cdot\frac{1}{2\cdot 1}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right| + C$.

$$t = tg\frac{x}{2} \qquad\qquad a = 1$$

$$\sin x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Пример 14: $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = \int \frac{\frac{\cancel{2}dt}{\cancel{1+t^2}}}{\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{\cancel{2}t}{\cancel{1+t^2}}} =$

$$t = tg\frac{x}{2}$$

$$=\int \frac{\frac{dt}{1}}{\frac{2+2t^2+1-t^2}{1+t^2}\cdot t}=\int \frac{\frac{dt}{1}}{\frac{\left(3+t^2\right)t}{1+t^2}}=\int \frac{t^2+1}{\left(3+t^2\right)t}dt=$$

$$\frac{t^2+1}{\left(3+t^2\right)t}=\frac{At+B}{3+t^2}+\frac{C}{t}\quad /\cdot\left(3+t^2\right)t$$

$$t^2+1=\underline{\underline{At^2}}+Bt+3C+\underline{\underline{Ct^2}}$$

$$t^2+1=\left(A+C\right)t^2+Bt+3C$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+C=1\\ B=0\\ 3C=1\end{cases}\Rightarrow C=\frac{1}{3},\quad A=1-C=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$=\int\left(\frac{\frac{2}{3}t+0}{3+t^2}+\frac{\frac{1}{3}}{t}\right)dt=\frac{2}{3}\int\frac{tdt}{3+t^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{2}{3}\int\frac{\frac{dp}{2}}{p}+\frac{1}{3}\ln|t|+C=\frac{1}{3}\ln|p|+\frac{1}{3}\ln|t|+C=$$

$$p=3+t^2$$
$$dp=2tdt$$
$$\frac{dp}{2}=tdt$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|3+t^2\right|+\frac{1}{3}\ln|t|+C=\frac{1}{3}\ln\left|3+tg^2\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{3}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

Задача 4:

а) $\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$ б) $\int\frac{dx}{5-3\cos x}.$

VI . $\boxed{\int f\left(tgx\right)dx}$

Имаме $\int f\left(tgx\right)dx=\int f\left(t\right)\frac{dt}{1+t^2}$

$$tgx=t\Rightarrow x=arctgt$$

$$dx=\frac{1}{1+t^2}dt$$

Пример 15: $\displaystyle\int \frac{dx}{1+tgx} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+t} = \int \frac{dt}{(1+t)\left(t^2+t\right)} =$

$$\begin{aligned} &tgx = t\\ &x = arctgt\\ &dx = \frac{1}{1+t^2}dt \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(1+t)\left(t^2+1\right)} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \quad /(1+t)\left(t^2+1\right)$$

$$1 = At^2 + A + Bt + C + Bt^2 + Ct$$

$$1 = (A+B)t^2 + (B+C)t + A + C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0\\ B+C=0 \Rightarrow A=\frac{1}{2}, \quad B=-\frac{1}{2}, \quad C=\frac{1}{2}\\ A+C=1 \end{cases}$$

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1+t} + \frac{-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}{t^2+1} \right) dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2}\int \frac{-t+1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2}\int \left(\frac{-t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt =$$

$$\begin{aligned} &p = 1+t\\ &dp = dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dp}{p} - \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln|p| - \frac{1}{2}\int \frac{\frac{ds}{2}}{s} + \frac{1}{2}arctgt =$$

$$\begin{aligned} &s = t^2+1\\ &ds = 2tdt\\ &\frac{ds}{2} = tdt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|p| - \frac{1}{4}\ln|s| + \frac{1}{2}arctgt + C = \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{4}\ln\left|t^2+1\right| + \frac{1}{2}arctgt + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+tgx| - \frac{1}{4}\ln\left|tg^2x+1\right| + \frac{1}{2}arctg(tgx) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+tgx| - \frac{1}{4}\ln\left|tg^2x+1\right| + \frac{1}{2}x + C.$$

Задача5: $\int \frac{1+tg^2 x}{\left(4+tg^2 x\right) tgx} dx.$

10. НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ ОД НЕКОИ ИРАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

I. $\boxed{\int f\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx}$

$$\int f\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx = \int f\left(\frac{1}{a}t^n - b, t\right)\frac{n}{a}t^{n-1}dt$$

$$\sqrt[n]{ax+b} = t \quad /^n$$
$$ax+b = t^n$$
$$ax = t^n - b$$
$$x = \frac{1}{a}t^n - \frac{b}{a}$$
$$dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt$$

$$= \frac{n}{a}\int t^{n-1} \cdot f\left(\frac{1}{a}t^n - b, t\right)dt$$ - коренот е изгубен.

Пример1: $\int \frac{1+\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{1+x}}dx = \int \frac{1+t}{1-t}\cdot 2tdt = 2\int \frac{t^2+t}{1-t}dt =$

$$\sqrt{1+x} = t \quad /^2 \qquad\qquad p = 1-t \Rightarrow t = 1-p$$
$$1+x = t^2 \qquad\qquad dp = -dt$$
$$x = t^2 - 1 \qquad\qquad -dp = dt$$
$$dx = 2tdt$$

$$= -2\int \frac{(1-p)^2 + 1 - p}{p}dp = -2\int \frac{1-2p+p^2+1-p}{p}dp = -2\int \frac{p^2-3p+2}{p}dp =$$

$$= -2\int\left(p - 3 + \frac{2}{p}\right)dp = -2\left(\frac{p^2}{2} - 3p + 2\ln|p|\right) + C =$$

$$= -p^2 + 6p - 4\ln|p| + C = -(1-t)^2 + 6(1-t) - 4\ln|p| + C =$$

$$= -\left(1-\sqrt{1+x}\right)^2 + 6\left(1-\sqrt{1+x}\right) - 4\ln\left|1-\sqrt{1+x}\right| + C.$$

Задача1:

а) $\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx$ б) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx$ в) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x+2}}dx.$

г) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ д) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x+1}}$ д) $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}dx$

II. $\boxed{\int f\left(x,\sqrt[n]{ax+b},\sqrt[m]{ax+b}\right)dx}$

Во случај кога во подинтегралната функција имаме два или повеќе корени со различни коренови показатели и иста подкоренова величина, $ax+b$, треба корените да се доведат на исти коренови показатели $s=\text{Н.З.С.}(m,n)$ и постапи како во случајот I.

Пример 2: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^3}+\sqrt[6]{x^2}}=\int \frac{dx}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3+\left(\sqrt[6]{x}\right)^2}=$

$$\sqrt[6]{x}=t \quad \Big|^6$$
$$x=t^6$$
$$dx=6t^5dt$$

$$=\int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int \frac{t^{\cancel{5}}}{\cancel{t^2}(t+1)}dt=6\int \frac{t^3}{t+1}dt=$$

$$t^3:(t+1)=t^2-t+1 \Rightarrow \frac{t^3}{t+1}=t^2-t+1+\frac{-1}{t+1}$$

$$\begin{array}{l} \underline{\pm t^3 \pm t^2} \\ \quad -t^2 \\ \quad \underline{\mp t^2 \mp t} \\ \qquad t \\ \qquad \underline{t \pm 1} \\ \qquad -1 \end{array}$$

$$=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=6\left(\int t^2dt-\int tdt+\int 1dt-\int\frac{1}{t+1}\right)=$$

$$p=t+1$$
$$dp=dt$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\int\frac{dp}{p}\right)=2t^3-3t^2+6t-6\ln|p|+C=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C=$$

$$= 2\left(\sqrt[6]{x}\right)^3 - 3\left(\sqrt[6]{x}\right)^2 + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C.$$

Задача 2:

а) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$ **б)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ **в)** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$ **г)** $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx.$

III. $\boxed{\int \frac{\mathbf{Mx+N}}{\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}\mathbf{dx}}$

Ова е интеграл што содржи квадратен трином. Види предавање „Некои неопределени интеграли што содржат квадратен трином“.

IV. $\boxed{\int \frac{\mathbf{Mx+N}}{(\mathbf{x}+\boldsymbol{\alpha})\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}\mathbf{dx}}$

Доволно е да забележиме дека неопределените интеграли од ваков тип со смена

$x+\alpha=\frac{1}{t}$ т.е. $x=\frac{1}{t}-\alpha$

се сведуваат на неопределени интеграли од претходниот тип III.

<u>Пример 3:</u>

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}} - \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}-1}} = -\int \frac{|t|\,dt}{t\sqrt{-t^2+2t+1}} =$$

$x=\frac{1}{t}$ $(t>0)$

$dx=-\frac{dt}{t^2}$

$$= -\int \frac{dt}{t\sqrt{-t^2+2t+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{-\left[t^2-2t-1\right]}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{-\left[t^2-2t+1^2-1^2-1\right]}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{-\left[(t-1)^2-2\right]}} = -\int \frac{dp}{\sqrt{-\left[p^2-2\right]}} = -\int \frac{dp}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-p^2}} =$$

$p=t-1$ $a=\sqrt{2}$

$dp=dt$

$$=-\arcsin\frac{p}{\sqrt{2}}+C=-\arcsin\frac{t-1}{\sqrt{2}}+C=-\arcsin\frac{\frac{1}{x}-1}{\sqrt{2}}+C.$$

Задача 3:

а) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$, б) $\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-6x+1}}$ в) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 2x+2}}$.

V. Неопределени интеграли од обликот

$$\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \qquad (a,b,c\in\mathbf{R})$$

се упростуваат, односно решаваат со една од следниве т.н. Ојлерови смени:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$ ако $a>0$

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$ ако $c>0$

3) $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$ ако квадратниот трином ax^2+bx+c има реални нули (x_1 е една негова нула).

Пример 4:

$$\int\frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\int\frac{\frac{t^2-1}{2t^2}dt}{\left(\frac{t^2+1}{2t}+\frac{t^2-1}{2t}\right)^2}=\int\frac{t^2-1}{2t^4}dt=$$

$\sqrt{x^2-1}=-\sqrt{1}\,x+t$, бидејќи $a=1>0$

$$\sqrt{x^2-1}=-x+t\ /^2$$

$$\cancel{x^2}-1=\cancel{x^2}-2xt+t^2$$

$$x=\frac{t^2+1}{2t}\Rightarrow\sqrt{x^2-1}=-\frac{t^2+1}{2t}+t=\frac{t^2-1}{2t}$$

$$\Downarrow$$

$$dx=\frac{2t\cdot 2t-\left(t^2+1\right)\cdot 2}{4t^2}dt$$

$$dx=\frac{t^2-1}{2t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\int t^{-2}dt-\int t^{-4}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t^{-1}}{-1}-\frac{t^{-3}}{-3}\right)+C=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{3t^3}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3}\right]+C.$$

Пример 5: Со Ојлерова смена да се реши неопределениот интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{-2x^2+5x-2}}$.

Решение:

Лесно се проверува дека квадратниот трином $-2x^2+5x-2$ има реални нули $x_1=2$ и $x_2=\frac{1}{2}$, поради што

$$-2x^2+5x-2=-2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Согласно третата Ојлерова смена имаме:

$$\sqrt{-2x^2+5x-2}=t(x-2)$$

$$\sqrt{-2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=t(x-2)\ /^2$$

$$-2\cancel{(x-2)}\left(x-\frac{1}{2}\right)=t^2(x-2)^{\cancel{2}}\ ,$$

од каде што

$$x=\frac{1+2t^2}{2+t^2}\Rightarrow\sqrt{-2x^2+5x-2}=t\left(\frac{1+2t^2}{2+t^2}-2\right)=\frac{-3t}{2+t^2}$$

$$dx=\left(\frac{1+2t^2}{2+t^2}\right)'dt$$

$$dx=\frac{6tdt}{\left(2+t^2\right)^2}$$

Според тоа

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-2x^2+5x-2}}=\int\frac{\frac{6tdt}{\left(2+t^2\right)^2}}{\frac{-3t}{2+t^2}}=-2\int\frac{dt}{2+t^2}=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C=$$

$$= -\sqrt{2} arctg \frac{\sqrt{-2x^2 + 5x - 2}}{\sqrt{2}(x-2)} + C.$$

Задача 4: со соодветна Ојлерова смена реши ги интегралите:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + x + 1}}$ (воведи смена $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$)

б) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2 + x + 1}}$ (воведи смена $\sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{a}x + t$).

VI. ИНТЕГРАЛ ОД БИНОМНИОТ ДИФЕРЕНЦИЈАЛ

$$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx, \quad (m, n \text{ и } p - \text{рационални броеви}),$$

може да се изрази во конечен вид во следниве три случаи:

1. Ако е p цел број. Ставаме $x = t^r$, каде што r е заеднички именител на дропките m и n.

2. Ако е $\frac{m+1}{n}$ цел број. Ставаме $a + bx^n = t^r$, каде што r е именител на дропката p.

3. Ако е $\frac{m+1}{n} + p$ цел број. Ја воведуваме смената $ax^{-n} + b = t^r$, каде што е r именител на дропката p.

Задача:

а) $\int x^{-\frac{3}{4}} \left(1 + x^{\frac{1}{6}}\right)^{-1} dx$ б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ в) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} dx.$

ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ V

1. ДЕФИНИЦИЈА НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ И НЕКОИ НЕГОВИ ОСОБИНИ

Нека $y=f(x)$ е дадена функција дефинирана на сегментот $[a,b]$. Со точките:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{k-1}, x_k, \cdots, x_n$$

такви што $a=x_0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{k-1}<x_k<\cdots<x_n=b$ сегментот $[a,b]$ го делиме на n-подсегменти $[x_0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,x_3],\cdots,[x_{k-1},x_k],\cdots,[x_{n-1},x_n]$ и на секој од овие подсегменти произволно земаме по една точка $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_k,\cdots,\xi_n$ соодветно. Во овие точки ги пресметуваме вредностите на функцијата $y=f(x)$:

$$f(\xi_1), f(\xi_2), f(\xi_3), \cdots, f(\xi_k), \cdots, f(\xi_n)$$

и овие вредности ги множиме со должините на соодветните подсегменти, со што ги добиваме производите:

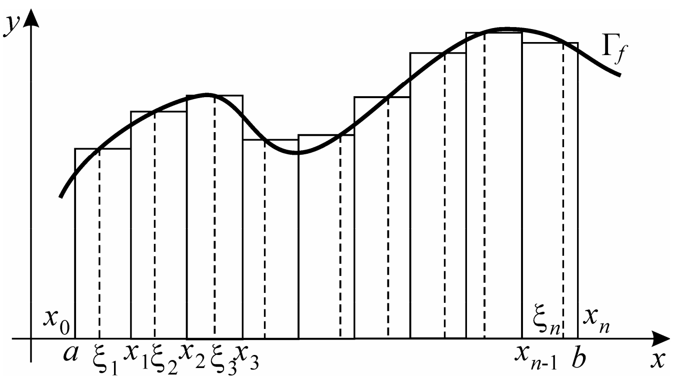
$$f(\xi_1)(x_1-x_0), f(\xi_2)(x_2-x_1), f(\xi_3)(x_3-x_2), \cdots, f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}), \cdots, f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$$

или, ставајќи

$$x_1-x_0=\Delta x_1,\ x_2-x_1=\Delta x_2,\ x_3-x_2=\Delta x_3,\ \cdots, x_k-x_{k-1}=\Delta x_k,\ \cdots, x_n-x_{n-1}=\Delta x_n$$

производите

$$f(\xi_1)\Delta x_1, f(\xi_2)\Delta x_2, f(\xi_3)\Delta x_3, \cdots, f(\xi_k)\Delta x_k, \cdots, f(\xi_n)\Delta x_n.$$



Што геометриски претставува секој од овие производи?

$f(\xi_1)\Delta x_1$ - плоштина на правоаголник со должина $f(\xi_1)$ и ширина Δx_1 т.е. плоштина на правоаголник конструиран над првиот подсегмент $[x_0, x_1]$

$f(\xi_2)\Delta x_2$ - плоштина на правоаголник со должина $f(\xi_2)$ и ширина Δx_2 т.е. плоштина на правоаголник конструиран над вториот подсегмент $[x_1, x_2]$

$\vdots$

$f(\xi_n)\Delta x_n$ - плоштина на правоаголник со должина $f(\xi_n)$ и ширина Δx_n т.е. плоштина на правоаголник конструиран над n-тиот подсегмент $[x_{n-1}, x_n]$.

Значи, секој од производите: $f(\xi_1)\Delta x_1,\ f(\xi_2)\Delta x_2,\ \cdots, f(\xi_n)\Delta x_n$ е плоштина на соодветен правоаголник (види слика од претодната страна).

Забелешка 1: Треба да забележиме дека некои од овие производи можат да бидат позитивни, а некои негативни, што зависи од знакот на вредностите $f(\xi_1), f(\xi_2), \cdots, f(\xi_n)$ на функцијата $y = f(x)$ во точките $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n$. Така на пример ако вредноста $f(\xi_k) > 0$ т.е. правоаголникот конструиран над k-тиот подсегмент $[x_{k-1}, x_k]$ е над x - оската, тогаш производот $f(\xi_k)\Delta x_k > 0$, а ако пак $f(\xi_k) < 0$ т.е. правоаголникот конструиран над k-тиот подсегмент $[x_{k-1}, x_k]$ е под x - оската, тогаш производот $f(\xi_k)\Delta x_k < 0$.

Сега споменатите производи ги собираме со што се добива збирот

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = S_n$$

познат под име **интегрална сума** или **Риманова сума** за функцијата $y = f(x)$ на сегментот $[a,b]$.

Забелешка 2: Може да се формираат безброј Риманови суми. Имено за различни поделби на сегментот $[a,b]$ на подсегменти $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$ се добиваат различни интегрални суми. Освен тоа и при една иста поделба на сегментот $[a,b]$ на подсегменти $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$ за различни избори на точките $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ на овие подсегменти се добиваат различни интегрални суми. Со други зборови интегралната сума $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ на функцијата $y = f(x)$ на сегментот $[a,b]$ зависи од начинот на кој сегментот $[a,b]$ е поделен на n- подсегменти како и од начинот на изборот на точките $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ на секој од овие подсегменти соодветно.

Дефиниција 1: ***Ако при било каква поделба на сегментот $[a,b]$ на n- подсегменти $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ и при било каков избор на точките $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ на секој од овие подсегменти соодветните интегрални суми $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ на функцијата $y = f(x)$ на сегментот $[a,b]$ имаат една иста граница при $n \to +\infty$ и $\forall \Delta x_k \to 0,$ тогаш велиме дека функцијата $y = f(x)$ е интеграбилна функција на сегментот $[a,b]$, а заедничката гранична вредност се нарекува определен интеграл од функцијата $y = f(x)$ на сегментот $[a,b]$ и се означува со $\int_a^b f(x)dx$.***

Значи,

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \forall \Delta x_k \to 0}} (\text{интегрални суми}) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \forall \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Функцијата $y = f(x)$ се нарекува **подинтегрална функција на сегментот** $[a,b]$, бројот a се нарекува **долна граница**, бројот b се вика **горна граница** и сегментот $[a,b]$ се нарекува **сегмент на интеграција во определениот интеграл**.

Теорема 1: ***Секоја непрекината функција $y = f(x)$ на сегментот $[a,b]$ е интеграбилна функција на тој сегмент.***

Теорема 2: ***Ако $y = f(x)$ и $y = g(x)$ се две интеграбилни функции на сегментот $[a,b]$ и $c, c_1, c_2 \in R$, тогаш важат формулите:***

1) $$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

Доказ: За било каква поделба на сегментот $[a,b]$ на подсегменти $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$ и било каков избор на точките $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n$ на секој од овие подсегменти соодветно, ја наоѓаме интегралната сума за функцијата $f(x) = c$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_n)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \cdots f(\xi_n)\Delta x_k =$$

$$= c\Delta x_1 + c\Delta x_2 + c\Delta x_3 + \cdots + c\Delta x_n = c\left[\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \cdots + \Delta x_n\right] =$$

$$\begin{aligned} = c\Big[\, & \cancel{x_1 - x_0} + \\ & + \cancel{x_2 - x_1} + \\ & + \cancel{x_3 - x_2} + \\ & \vdots \\ & + \cancel{x_n - x_{n-1}} \Big] = c\left[x_n - x_0\right] = c(b-a) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b c\,dx = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \forall \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \forall \Delta x_k \to 0}} c(b-a) = c(b-a)$$

2) $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

3) $\displaystyle\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

Обопштување на 2) и 3) е равенството

4) $\displaystyle\int_a^b \left[c_1 f(x) + c_2 g(x)\right]dx = c_1\int_a^b f(x)\,dx + c_2\int_a^b g(x)\,dx$

5) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

6) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

7) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (a<c<b)$

8) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ за $y = f(x)$ парна функција на $[-a,a]$

9) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ за $y = f(x)$ непарна функција на $[-a,a]$

Равенствата 4) и 7) можат да се обопштат при што се добиваат равенствата

4')
$$\int_a^b \left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_m f_m(x)\right] dx =$$
$$= c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\,dx + \cdots + c_m \int_a^b f_m(x)\,dx$$

7')
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_{m-1}}^{c_m} f(x)\,dx + \int_{c_m}^{b} f(x)\,dx$$

Равенството - особината 4') се нарекува **прва адитивна особина**, а 7') - **втора адитивна особина** на определениот интеграл.

2. ВРСКА МЕЃУ НЕОПРЕДЕЛЕНИОТ И ОПРЕДЕЛЕНИОТ ИНТЕГРАЛ

Поаѓајќи од самите дефиниции на неопределениот и определениот интеграл јасно се уочува дека помеѓу нив постои суштинска разлика. Имено, по дефиниција неопределениот интеграл

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

е множество од функции, додека определениот интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \forall \Delta x_k \to 0}} (\text{интегрална сума}) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \forall \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

е број.

Меѓутоа, и покрај оваа суштинска разлика сепак постои тесна врска меѓу овие два поима што се гледа од следнава

Теорема 1: (за врска меѓу неопределениот и определениот интеграл)

Ако $y = f(x)$ е интеграбилна функција на сегментот $[a,b]$ и ако $y = F(x)$ е една примитивна функција на функцијата $y = f(x)$ (т.е. $F'(x) = f(x)$), тогаш важи формулата

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b}$$

Доказ: Со точките $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{k-1}, x_k, \cdots, x_n$ такви што $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b$ сегментот $[a,b]$ го делиме на n-подсегменти

$$[x_0,x_1], [x_1,x_2], [x_2,x_3], \cdots, [x_{k-1},x_k], \cdots, [x_{n-1},x_n].$$

Функцијата $y=F(x)$ е една примитивна функција на подинтегралната функција т.е. $F'(x)=f(x) \quad \forall x\in[a,b]$ што значи дека $y=F(x)$ е диференцијабилна на $[a,b]$ а знаеме дека секоја диференцијабилна функција е во исто време и непрекината. Значи, $y=F(x)$ ги исполнува условите од теоремата на Lagrange на сегментот $[a,b]$, па според тоа и на секој подсегмент од сегментот $[a,b]$. Со примена на спомenатата теорема на Lagrange над секој од n-те подсегменти имаме:

- во внатрешноста на $[x_0,x_1]$ постои точка c_1 т.ш.

$$F(x_1)-F(x_0)=F'(c_1)(x_1-x_0)$$

- во внатрешноста на $[x_1,x_2]$ постои точка c_2 т.ш.

$$F(x_2)-F(x_1)=F'(c_2)(x_2-x_1)$$

- во внатрешноста на $[x_2,x_3]$ постои точка c_3 т.ш.

$$F(x_3)-F(x_2)=F'(c_3)(x_3-x_2)$$

$$\vdots$$

- во внатрешноста на $[x_{n-1},x_n]$ постои точка c_n т.ш.

$$F(x_n)-F(x_{n-1})=F'(c_n)(x_n-x_{n-1}).$$

Имајќи в предвид фактот дека $F'(x)=f(x) \quad \forall x\in[a,b]$ погорните равенства се запишуваат:

$$\cancel{F(x_1)}-F(x_0)=f(c_1)(x_1-x_0)$$

$$\cancel{F(x_2)}-\cancel{F(x_1)}=f(c_2)(x_2-x_1)$$

$$\cancel{F(x_3)}-\cancel{F(x_2)}=f(c_3)(x_3-x_2)$$

$$\vdots$$

$$\underline{F(x_n)-\cancel{F(x_{n-1})}=f(c_n)(x_n-x_{n-1})}$$

$$\Rightarrow F(x_n)-F(x_0)=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k-x_{k-1})$$

т.е.

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$ – интегрална сума за функцијата $y=f(x)$ на сегментот $[a,b]$.

Ако во последното равенство поминеме на граничен процес пуштајќи $n\to\infty$ и $\forall\Delta x_k\to 0$, добиваме

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \forall\Delta x_k\to 0}} \left(F(b)-F(a)\right)=\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \forall\Delta x_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

односно, согласно условот од теоремата дека $y=f(x)$ е интеграбилна на сегментот $[a,b]$,

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$$

Со ова теоремата во целост е докажана. Докажаната формула, позната под име **основна формула на интегралното сметање**, го дава правилото за решавање на определениот интеграл. Имено, за да се реши определениот интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

треба:

1) Да се реши неопределениот интеграл

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

со што се добива една примитивна функција $y=F(x)$ на подинтегралната функција $y=f(x)$ и

2) Се применува основната формула на интегралното сметање

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Пример 1: Пресметај $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{x^2-x-2}$.

Решение: Прво го решаваме неопределениот интеграл

$$\int \frac{xdx}{x^2-x-2}=\int \frac{xdx}{x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2}=$$

$$=\int \frac{xdx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}=\int \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2-\frac{9}{4}}dt=\int\left(\frac{t}{t^2-\frac{9}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{t^2-\frac{9}{4}}\right)dt=\int \frac{tdt}{t^2-\frac{9}{4}}+\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-\frac{9}{4}}=$$

$$t=x-\frac{1}{2}\Rightarrow t+\frac{1}{2}=x \qquad\qquad p=t^2-\frac{9}{4}$$

$$dt=dx \qquad\qquad dp=2tdt$$

$$\frac{dp}{2}=tdt$$

$$=\int\frac{\frac{dp}{2}}{p}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\frac{9}{4}-t^2}=\frac{1}{2}\ln|p|-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-t^2}=\frac{1}{2}\ln\left|t^2-\frac{9}{4}\right|-\frac{1}{2}\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{\frac{3}{2}+t}{\frac{3}{2}-t}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right|-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\frac{3}{2}+x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)}\right|+C=\underbrace{\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-2\right|-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+x}{2-x}\right|}_{F(x)}+C.$$

Според тоа,

$$\int_0^1\frac{xdx}{x^2-x-2}=\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-2\right|-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+x}{2-x}\right|\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|1^2-1-2\right|-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+1}{2-1}\right|-\left(\frac{1}{2}\ln\left|0^2-0-2\right|-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+0}{2-0}\right|\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{6}\ln 2-\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{6}\ln\frac{1}{2}\right)=\cancel{\frac{1}{2}\ln 2}-\frac{1}{6}\ln 2-\cancel{\frac{1}{2}\ln 2}+\frac{1}{6}\ln\frac{1}{2}=$$

$$=-\frac{1}{6}\ln 2+\frac{1}{6}\left(\underbrace{\ln 1}_{0}-\ln 2\right)=-\frac{1}{6}\ln 2-\frac{1}{6}\ln 2=-\frac{1}{3}\ln 2$$

Пример 2: $\int_1^e x\ln x dx=?$

Решение: Имаме

$$\int x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\underbrace{\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}}_{F(x)}+C$$

$$u=\ln x \qquad dv=xdx$$

$$du=\frac{1}{x}dx \qquad v=\int xdx=\frac{x^2}{2}$$

и

$$\int_1^e x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}\left(\underbrace{\ln e}_{1}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1^2}{2}\left(\underbrace{\ln 1}_{0}-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}.$$

<u>Пример 3:</u> Реши го определениот интеграл

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

Решение: Прво го решаваме неопределениот интеграл $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2-\sin^2 t}\,a\cos t dt =$$

$$x = a\sin t \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{a} = \sin t \quad \Rightarrow \quad t = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$dx = a\cos t dt$$

$$= \int \sqrt{a^2(\underbrace{1-\sin^2 t}_{\cos^2 t})}\,a\cos t dt = \int |a|\cdot|\cos t|\cdot a\cos t dt =$$

$$\cos t > 0$$

$$= a^2\int \cos^2 t dt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t dt\right) = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{2\sin t\cos t}{2}\right)+C = \frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)+C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)+C.$$

За определениот интеграл, имаме

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$\frac{a^2}{2}(\underbrace{\arcsin 1}_{\frac{\pi}{2}}+0)-\frac{a^2}{2}(\underbrace{\arcsin 0}_{0}+0) = \frac{a^2\pi}{4}.$$

Задача 1: Пресметај ги определените интеграли:

а) $\int_1^2 \frac{x^2-3x+1}{x}dx$ б) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$ в) $\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x}-2}}{2x^2}dx$

г) $\int_2^5 \frac{dx}{x\left(1+x^2\right)}$ д) $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ ѓ) $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx.$

3. СМЕНА НА ПРОМЕНЛИВА И ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА ВО ОПРЕДЕЛЕНИОТ ИНТЕГРАЛ

***Теорема 1:** (за смена на променлива во определениот интеграл)*

Нека** $x=\varphi(t)$ **:

***1) е монотона функција во интервалот** (α,β)*

***2) има непрекинат извод на сегментот** $[\alpha,\beta]$*

***3)** $\varphi(\alpha)=a$ **,** $\varphi(\beta)=b$.*

Тогаш е точно равенството

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.}$$

Доказ: Ако со $F(x)$ означиме една примитивна функција на функцијата $f(x)$ на сегментот $[a,b]$, тогаш согласно основната формула на интегралното сметање имаме

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Применувајḱи го правилото за извод од сложена функција над сложената функција

$$y=F(x),\quad x=\varphi(t)\quad t\in(\alpha,\beta) \text{ т.е. над функцијата } y=F(\varphi(t))$$

имаме

$$\frac{d}{dt}\big(F(\varphi(t))\big)=\big(F(\varphi(t))\big)'_t=F'(x)\cdot x'(t)=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

што значи дека $F(\varphi(t))$ е една примитивна функција на функцијата $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, па според основната формула на интегралното сметање добиваме

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=F(\varphi(t))\Big|_a^b=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=$$

$$=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b=\int_a^a f(x)\,dx.$$

Пример 1: $\displaystyle\int_0^a\frac{dx}{a^2+x^2}=\int_0^a\frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}=$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^a \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{\cancel{a}^2}\int_0^1 \frac{\cancel{a}dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}arctgt\Big|_0^1=\frac{1}{a}\underbrace{arctg1}_{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{a}\underbrace{arctg0}_{0}=\frac{1}{a}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4a}.$$

$$t=\frac{x}{a} \qquad \text{за} \quad x=0\Rightarrow t=\frac{0}{a}=0$$

$$dt=\frac{1}{a}dx \qquad \text{за} \quad x=a\Rightarrow t=\frac{a}{a}=1$$

$$adt=dx$$

Пример 2: За $a>0$

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos tdt=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2 t}\cdot a\cos tdt=$$

$$x=a\sin t \qquad \text{за} \quad x=0\Rightarrow 0=a\sin t\Rightarrow t=0$$

$$dx=a\cos tdt \qquad \text{за} \quad x=a\Rightarrow a=a\sin t\Rightarrow \sin t=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$$

$$=a^2\int_0^{\pi/2}|\cos t|\cdot costdt=a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 tdt=a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)-\frac{a^2}{2}\left(0+\frac{\sin 0}{2}\right)=\frac{a^2\pi}{4}.$$

Теорема 2 (за парцијална интеграција во определениот интеграл)

Ако $u=u(x)$ и $v=v(x)$ се непрекинато диференцијабилни на сегментот $[a,b]$, тогаш важи формулата

$$\boxed{\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu}$$

Доказ: Поаѓајќи од правилото за извод од производ на две функции

$$(uv)'=u'v+uv'$$

и земајќи определен интеграл над двете страни во последното равенство, имаме

$$\int_a^b (uv)'\,dx=\int_a^b\left(u'v+uv'\right)dx$$

т.е.

$$\int_a^b (uv)' \, dx = \int_a^b u' v dx + \int_a^b u v' dx$$

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b v du + \int_a^b u dv,$$

од каде што добиваме

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 3:

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos x dx = -\frac{\pi}{2}\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + 0\underbrace{\cos 0}_{1} + \sin x\Big|_0^{\pi/2} = -0 + 0 + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - \underbrace{\sin 0}_{0} = 1.$$

$u = x \qquad dv = \sin x dx$

$du = dx \qquad v = \int \sin x dx = -\cos x$

Задача 1:

а) $\int_0^3 x\sqrt[3]{x^2-1}dx$

б) $\int_{\frac{4}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{2x^2} dx$

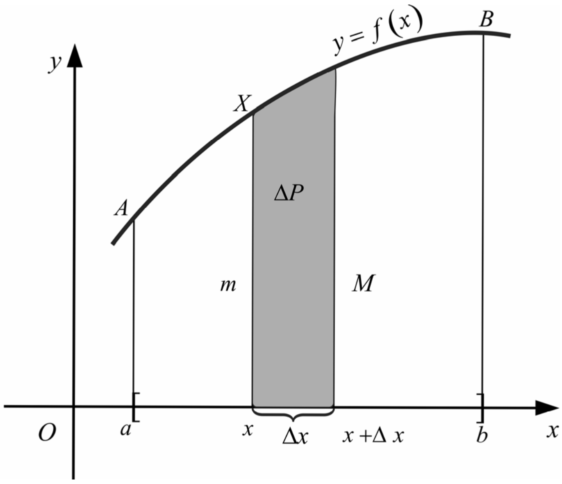
в) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$

г) $\int_1^e \ln^2 x dx.$

4. ЊУТН - ЛАЈБНИЦОВА ФОРМУЛА И ЗАДАЧА ЗА ПЛОШТИНА НА КРИВОЛИНИСКИ ТРАПЕЗ

Нека $y=f(x)$ е дадена непрекината и ненегативна функција на сегментот $[a,b]$. Слика ограничена со делот од x- оската помеѓу a и b, од спротивната страна со графикот Γ_f на функцијата $y=f(x)$ и од страни со вертикали повлечени во точките a и b се нарекува **криволиниски трапез**. Се означува со $abBA$. Плошти-ната на овој криволиниски трапез ќе ја означиме со P т.е.

$$P_{abBA}=P.$$



Нека на сегментот $[a,b]$ земеме произволна точка x. Со повлекување на вертикалата во x го добиваме криволинискиот трапез $axXA$, кој што ќе го наречеме **променлив криволиниски трапез**. Променлив бидејќи неговата плоштина зависи од положбата на точката $x\in[a,b]$. Со $P(x)$ ќе ја означиме плоштината на променливиот криволиниски трапез $axXA$.

Јасно е дека за $x=a \Rightarrow P(a)=P_{aaAA}=0$

за $x=b \Rightarrow P(b)=P_{abBA}=P.$

Нека во $x\in[a,b]$ дадеме промена Δx. Тогаш ќе дојде до промена на плоштината на променливиот криволиниски трапез за ΔP

$\Delta P=P(x+\Delta x)-P(x)$ -плоштина на шрафиран дел од сликата.

Нека со m ја означиме најмалата, а со М најголемата вредност на функцијата $y=f(x)$ на сегментот $[x,x+\Delta x]$. Од слика јасно се гледа дека

$$m\Delta x<\Delta P<M\Delta x$$

$$m<\frac{\Delta P}{\Delta x}<M.$$

Во граничен процес при

$$\Delta x\to 0 \Rightarrow m\to f(x) \text{ и } M\to f(x),$$

поради што

$$\lim_{\Delta x\to 0} m \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} M$$

$$f(x) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta x} \le f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x} = f(x)$$

$$\Rightarrow P'(x) = f(x) \quad \forall x\in(a,b)$$

$\Rightarrow$ плоштината $P(x)$ на променливиот криволиниски трапез $axXA$ е една примитивна функција на функцијата $y=f(x)$ во интервалот (a,b).

Нека со $y=F(x)$ означиме друга примитивна функција на функцијата $y=f(x)$ во (a,b), добиена со решавање на неопределениот интеграл

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Познато е дека две примитивни функции на една иста функција се разликуваат за некоја константа, поради што

$$P(x)-F(x)=C \Rightarrow P(x)=F(x)+C$$

за $\quad x=a \Rightarrow P(a)=F(a)+C$

$$0=F(a)+C$$

$$C=-F(a).$$

Поради ова

$$P(x)=F(x)-F(a)$$

за $\quad x=b \Rightarrow P(b)=F(b)-F(a)$

$$P=F(b)-F(a).$$

Со ова ја докажавме следнава

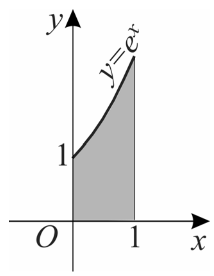
Теорема (на Њутн-Лајбниц): Плоштината P на криволинискиот трапез $abBA$ е еднаква на разликата $F(b)$ - $F(a)$, при што $F(x)$ е една примитивна функција на $f(x)$ на сегемнтот $[a,b]$.

Согласно врската помеѓу неопределениот и определениот интеграл (точка 2. од оваа глава), за плоштината P на криволинискиот трапез имаме:

$$P=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b=\int_a^b f(x)dx.$$

Пример 1: Пресметај плоштина на криволиниски трапез, ограничен со: $y=e^x, x=1, x=0$ и $y=0$.

Решение: $P=\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1-e^0=e-1$



Задача 1: Пресметај плоштина на слика ограничена со $y=\dfrac{1}{x^2+1}, x=0, y=0$ и $x=\sqrt{3}.$

5. ТЕОРЕМА ЗА СРЕДНА ВРЕДНОСТ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИОТ ИНТЕГРАЛ

Теорема 1. Ако $y=f(x)$ е непрекината функција на сегментот $[a,b]$, тогаш постои точка c помеѓу a и b т.ш.

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)}$$

Доказ: Нека со точките $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ такви што

$$a=x_0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

сегментот $[a,b]$ го поделиме на n-подсегменти $[x_0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,x_3],\cdots,[x_{n-1},x_n]$ и нека со m ја означиме најмалата, а со M најголемата вредност на функцијата $y=f(x)$ на $[a,b]$ т.е. $m\le f(x)\le M \quad \forall x\in[a,b]$.

Земајќи на секој од подсегментите произволно по една точка соодветно т.е. $\xi_1\in[x_0,x_1], \xi_2\in[x_1,x_2], \xi_3\in[x_2,x_3], \cdots, \xi_n\in[x_{n-1},x_n]$ и имајќи в предвид фактот дека $m\le f(x)\le M \quad \forall x\in[a,b]$, имаме

$$m\le f(\xi_1)\le M \quad /\cdot(x_1-x_0)$$
$$m\le f(\xi_2)\le M \quad /\cdot(x_2-x_1)$$
$$m\le f(\xi_3)\le M \quad /\cdot(x_3-x_2)$$
$$\vdots$$
$$m\le f(\xi_n)\le M \quad /\cdot(x_n-x_{n-1}),$$

односно

$$\underline{\begin{aligned}
&m(x_1 - x_0) \le f(\xi_1)(x_1 - x_0) \le M(x_1 - x_0)\\
&m(x_2 - x_1) \le f(\xi_2)(x_2 - x_1) \le M(x_2 - x_1)\\
&m(x_3 - x_2) \le f(\xi_3)(x_3 - x_2) \le M(x_3 - x_2)\\
&\vdots\\
&m(x_n - x_{n-1}) \le f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \le M(x_n - x_{n-1}).
\end{aligned}}$$

Собирајќи ги овие неравенства

$$m(x_n - x_0) \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \le M(x_n - x_0)$$

и имајќи в предвид дека $x_0 = a, x_n = b$ добиваме

$$m(b-a) \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le M(b-a),$$

од каде што

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \forall \Delta x_k \to 0}} m(b-a) \le \lim_{\substack{n\to\infty \\ \forall \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \lim_{\substack{n\to\infty \\ \forall \Delta x_k \to 0}} M(b-a)$$

т.е.

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Од последното двојно неравенство добиваме

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Ставајќи $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \lambda$, имаме $m \le \lambda \le M$, а поради непрекинатоста на $y = f(x)$ на $[a,b]$ добиваме дека λ е вредност на функцијата $y = f(x)$ за некое c меѓу a и b, т.е. $\lambda = f(c)$, од каде што

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) \qquad (a < c < b).$$

Величината $f(c)$ се нарекува **средна вредност на функцијата $y = f(x)$ на сегментот $[a,b]$.**

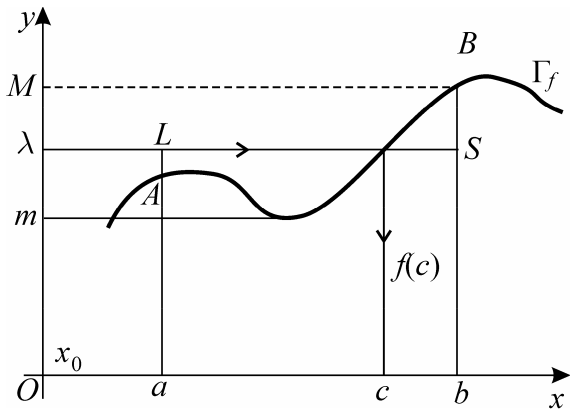
Геометриски:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Ако $y=f(x)$ е непрекината и ненегативна функција на $[a,b]$, тогаш

$$\int_a^b f(x)dx = P_{abBA},$$

а $f(c)(b-a)=P_{\square abSL}$. Со зборови, плоштината на криволинискиот трапез $abBA$ е еднаква со плоштината на правоаголникот $abSL$ со страни $f(c)$ и $b-a$.



6. ИНТЕГРАЛ СО ПРОМЕНЛИВА ГОРНА ГРАНИЦА И ИНТЕГРАЛ СО БЕСКОНЕЧНА ГОРНА ГРАНИЦА

Нека $y=f(x)$ е интеграбилна функција на сегментот $[a,b]$, при што a и b се реални константи. Тоа значи дека определениот интеграл $\int_a^b f(x)dx$ постои и е реална константа.

Нека $x\in[a,b]$ е произволна точка на сегментот $[a,b]$. Како $y=f(x)$ е интеграбилна функција на сегментот $[a,b]$, тоа таа е интеграбилна функција и на секој нејзин подсегмент $[a,x]$, т.е. постои определениот интеграл $\int_a^x f(t)dt$. Точката $x\in[a,b]$е произволна, што значи дека може да се менува нејзината положба на сегментот $[a,b]$. Токму затоа интегралот

$$\int_a^x f(t)dt \qquad x\in[a,b]$$

се нарекува **определен интеграл со променлива горна граница**.

Јасно е дека вредноста на определениот интеграл со променлива горна граница зависи од положбата на точката $x\in[a,b]$ или со други зборови определениот интеграл со променлива горна граница x е функција од x, дефинирана на сегментот $[a,b]$, и пишуваме $\phi(x)=\int_a^x f(t)dt, \qquad x\in[a,b].$

Теорема 1: ***Ако*** $y = f(x)$ ***е непрекината функција на сегментот*** $[a,b]$***, тогаш*** $y=\phi(x)$ ***е една примитивна функција на функцијата*** $y = f(x)$ ***т.е.*** $\phi'(x) = f(x)$***.***

Доказ:
Имаме

$$\begin{aligned}\phi(x+\Delta x)-\phi(x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = (x+\Delta x - x)\cdot\frac{1}{(x+\Delta x-x)}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \\ &= \Delta x\cdot f(c), \qquad (x<c<x+\Delta x)\end{aligned}$$

од каде што

$$\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x} = f(c) \qquad c\in(x,x+\Delta x).$$

Последното равенство е точно за секој подсегмент $[x,x+\Delta x]$ на сегментот $[a,b]$, поради што во граничен процес при $\Delta x\to 0 \Rightarrow c\to x$. Па имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x} = \lim_{c\to x} f(c)$$

т.е.

$$\phi'(x) = f(x) \qquad x\in[a,b].$$

Како функцијата $\phi(x)$ е определен интеграл со променлива горна граница, тоа штотуку докажаната формула може да се запише

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x),$$

што значи дека теоремата 1 може да се преформулира и искаже на следниот начин
Теорема 1': Ако $f(x)$ ***е непрекината функција на сегментот*** $[a,b]$***, тогаш изводот по променливата горна граница*** x ***од определениот интеграл со променлива горна граница***

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

е еднаков на вредноста на подинтегралната функција во точката $x\in[a,b]$***.***

Нека $y = f(x)$ е функција дефинирана на интервалот $[a, +\infty)$ $(a \in \boldsymbol{R})$ и интеграбилна на било кој сегмент $[a, A]$ т.е. постои интегралот

$$\int_a^A f(x)\,dx \qquad (\forall A \in \boldsymbol{R} \wedge A > a).$$

Дефиниција 1: Интеграл со бесконечна горна граница се нарекува граничната вредност $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ и пишуваме

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx$$

Дефиниција 2: Ако постои определениот интеграл со бесконечна горна граница $\int_a^{+\infty} f(x)dx \in \boldsymbol{R}$, тогаш велиме дека функцијата $y = f(x)$ е интеграбилна на $[a, +\infty)$ и дека интегралот со бесконечна горна граница конвергира; додека во случај кога $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ не постои или има вредност еднаква на $\pm\infty$, тогаш велиме дека $y = f(x)$ не е интеграбилна на $[a, +\infty)$, а интегралот со бесконечна горна граница дивергира.

Пример 1:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} arctgx\Big|_0^A = \lim_{A\to+\infty}\left(arctgA - \underbrace{arctg0}_{0}\right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} arctgA = arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ интегралот со бесконечна горна граница конвергира.

Пример 2:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty}\ln x\Big|_1^A = \lim_{A\to+\infty}\left(\ln A - \underbrace{\ln 1}_{0}\right) = \lim_{A\to+\infty}\ln A = \ln(+\infty) = +\infty$$

$\Rightarrow$ интегралот со бесконечна горна граница дивергира.

7. ПРИБЛИЖНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ОПРЕДЕЛЕНИОТ ИНТЕГРАЛ

По дефиниција, во случај на интеграбилна функција $y=f(x)$ на сегментот $[a,b]$, определениот интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{n\to+\infty\\ \forall\Delta x_k\to 0}}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

е гранична вредност од интегрална сума при n (број на подсегменти) $\to+\infty$ и должина на секој подсегмент $\Delta x_k\to 0$. Тоа значи дека за доволно големо n важи приближната формула

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Оваа приближна формула е во толку поточна во колку бројот n на подсегментите е се поголем.

Треба да забележиме дека при приближно пресметување на определениот интеграл се зема дека n-те подсегменти $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$, на кои што е поделен сегментот на интеграцијата $[a,b]$, имаат иста должина т.е.

$$\Delta x_1=\Delta x_2=\cdots=\Delta x_n=\frac{b-a}{n}$$

поради што последната приближна формула добива облик

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k).$$

Оваа формула е позната под име **општа формула за приближно пресметување на определен интеграл**.

Зависно од изборот на точките $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ на секој од подсегментите $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$ соодветно, имаме различни формули за приближно пресметување на определениот интеграл.

Формула на правоаголници: Точките $\xi_1\in[x_0,x_1],\xi_2\in[x_1,x_2],\cdots,\xi_n\in[x_{n-1},x_n]$ ги избираме т.ш. да се поклопуваат со левите страни на секој од подсегментите соодветно т.е. земаме $\xi_1=x_0,\xi_2=x_1,\cdots,\xi_n=x_{n-1}$.

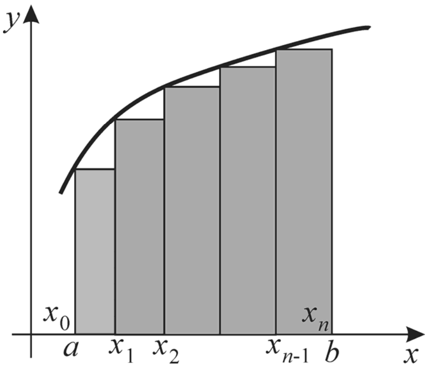
Во овој случај општата формула за приближно пресметување се сведува на

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})$$

или во развиената форма

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\right]}$$

и е позната под име **формула на правоаголници за приближно пресметување на определениот интеграл**.



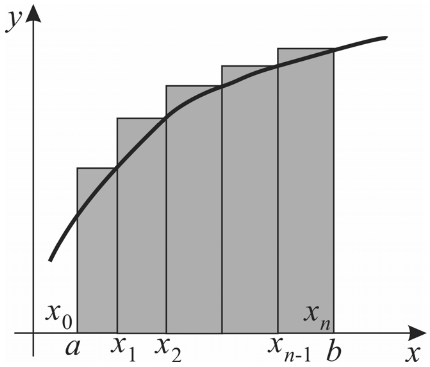
Во случај $f(x)\geq 0$ за $x\in[a,b]$, геометриски, формулата на правоаголници за приближно пресметување на определениот интеграл кажува дека плоштината на криволинискиот трапез $abBA$ $\left(P_{abBA}=\int_a^b f(x)\,dx\right)$ е приближно еднаква на збирот од плоштините на исенчените правоаголници од слика десно.

Ако точките $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ на секој од подсегментите $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$ ги избериме т.ш. тие да се поклопуваат со десните крајни точки на соодветните подсегменти т.е. $\xi_1=x_1,\xi_2=x_2,\cdots,\xi_k=x_k,\cdots,\xi_n=x_n$, тогаш општата формула за приближно пресметување на определениот интеграл се сведува на

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k$$

или во развиена форма

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)\right].}$$



И оваа приближна формула е позната под име **формула на правоаголници за приближно пресметување на определениот интеграл**. Според оваа формула, во случај $f(x)\geq 0$ за $x\in[a,b]$, определениот интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = P_{abBA}$$

е приближно еднаков со збирот од плоштините на исенчените правоаголници (слика десно).

Трапезна формула: Точките $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ на секој од подсегментите $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{k-1}, x_k], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$ ги избираме т.ш. вредностите $f(\xi_1), f(\xi_2), \cdots, f(\xi_k), \cdots, f(\xi_n)$ на функцијата $y = f(x)$ во точките $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots, \xi_n$ се аритметичка средина од вредностите на функцијата во крајните точки од соодветните подсегменти т.е.

$$f(\xi_1) = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}, f(\xi_2) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \cdots$$

$$\cdots, f(\xi_k) \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}, \cdots, f(\xi_n) = \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}.$$

Во овој случај општата формула за приближно пресметување на определениот интеграл се сведува на

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$$

т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n} \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_{k-1}) + f(x_k) \right]$$

или во развиена форма

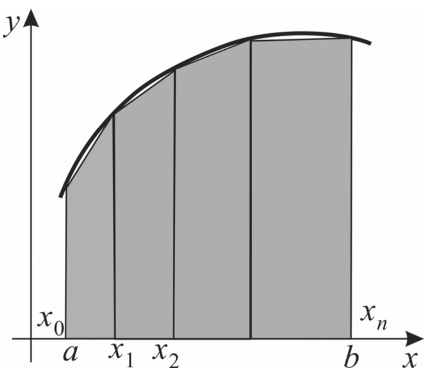
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n} \Big[\big(f(x_0) + f(x_1) \big) + \big(f(x_1) + f(x_2) \big) + \big(f(x_2) + f(x_3) \big) + \cdots$$

$$\cdots + \big(f(x_{n-1}) + f(x_n) \big) \Big]$$

т.е.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n} \Big[f(x_0) + f(x_n) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) \big) \Big]}$$

Во случај $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$, геометриски, плоштината $P_{abBA} = \int_a^b f(x)\,dx$ на криволинискиот трапез $abBA$ е приближно еднаква на збирот од плоштините на исенчените трапези (слика десно).



Пример 1: Пресметај го приближно определениот интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$, со метода на:

а) правоаголници
б) трапези

земајќи за $n = 6$.

Решение:

$$a = 0, \quad b = \frac{\pi}{2}, \quad n = 6 \Rightarrow \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{6} = \frac{\pi}{12} - \text{должина на секој подсегмент.}$$

$$\Rightarrow x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{12}, \quad x_2 = 2\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}, \quad x_3 = 3\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4},$$

$$x_4 = 4\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}, \quad x_5 = 5\frac{\pi}{12}, \quad x_6 = 6\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x_0) = f(0) = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0} \text{ - неопределен израз.}$$

Како $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \Rightarrow f(0) = 1$

$$f(x_1) = f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\frac{\pi}{12}} = \frac{0,258819}{\frac{3,14}{12}} = \frac{12 \cdot 0,258819}{3,14} = 0,9891$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{6 \cdot \sin\frac{\pi}{6}}{\pi} = \frac{6 \cdot \frac{1}{2}}{3,14} = \frac{3}{3,14} = 0,9554$$

$$f(x_3) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\frac{\sqrt{2}}{2}}{3,14} = \frac{2\sqrt{2}}{3,14} = \frac{2,828427}{3,14} = 0,9008$$

$$f(x_4) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sin\frac{\pi}{3}}{4} = \frac{3 \cdot 0,866025}{4} = \frac{2,59807}{4} = 0,6495$$

$$f(x_5) = f\left(5\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin 5\frac{\pi}{12}}{5\frac{\pi}{12}} = \frac{12\sin\frac{5\pi}{12}}{5\pi} = \frac{11,5911}{15,70796} = \frac{2,59807}{4} = 0,7379$$

$$f(x_6)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{3,14}=\frac{2}{3,14}=0,6369.$$

а) $$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx\approx\frac{\frac{\pi}{2}-0}{6}\left[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)\right]$$

$$\approx\frac{\pi}{12}[1+0,9891+0,9554+0,9008+0,6495+0,7379]$$

$$\approx\frac{\pi}{12}\cdot 5,2327=\frac{16,43068}{12}=1,3692$$

б) $$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx\approx\frac{\frac{\pi}{2}-0}{2\cdot 6}\left[f(x_0)+f(x_6)+2\left(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)\right)\right]$$

$$\approx\frac{\pi}{24}\left[1+0,6369+2\left(0,9891+0,9554+0,9008+0,6495+0,7379\right)\right]$$

$$\approx\frac{3,14}{24}[1+0,6369+2\cdot 4,2327]=\frac{3,14}{24}\cdot 10,1023=1,3217.$$

Задача1: Пресметај приближно

$$\int_0^1\frac{e^x-1}{x}dx,\qquad n=4$$

со трапезна формула и со формула на правоаголници. Спореди ги добиените резултати.

Задача2: Користејќи го равенството $\pi=4\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ пресметај ја приближно вредноста на бројот π.

8. ПРИМЕНА НА ОПРЕДЕЛЕНИОТ ИНТЕГРАЛ

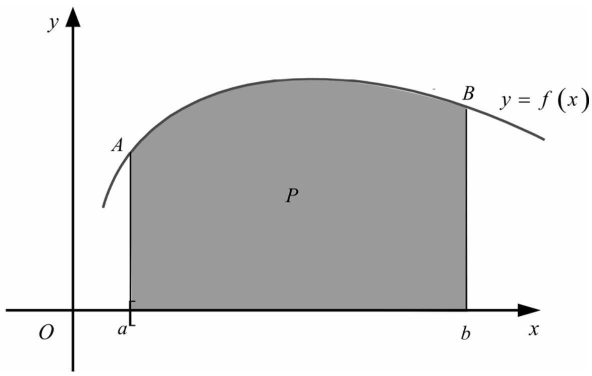
Определениот интеграл наоѓа широка примена не само во математиката туку и во природните науки, во техниката и друго. Во оваа точка ќе се задржиме на негова примена при пресметување на плоштина на рамнински слики, должина на лак на рамнинска крива, плоштина на ротациона површина и волумен на ротационо тело.

8.1. ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКИ СЛИКИ

Плоштина на криволиниски трапез

Во точка 4. од ова поглавје видовме една примена на определениот интеграл, а тоа е плоштина на криволиниски трапез

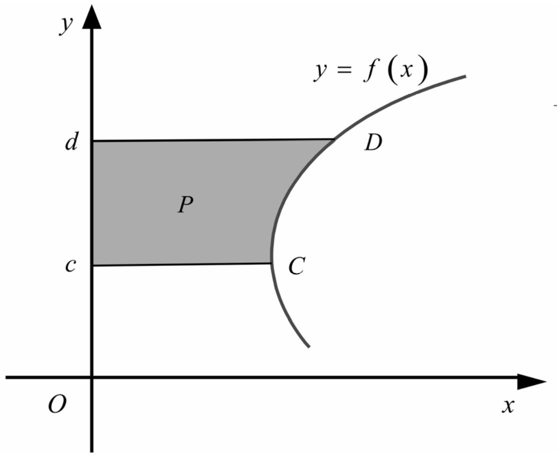
$$\boxed{P = P_{abBA} = \int_a^b f(x)dx,}$$



во случај на ненегативна и ненепрекината функција $y = f(x)$ на сегментот $[a,b]$.

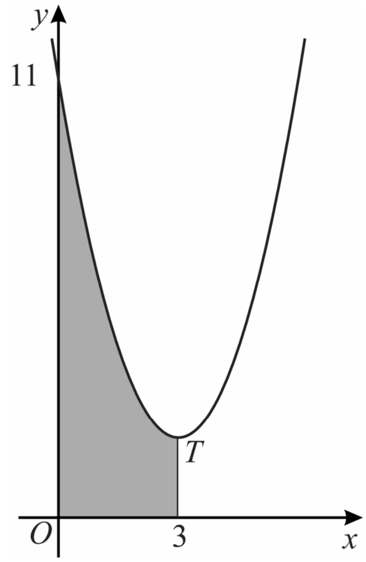
Плоштината на криволинискиот трапез $cdDC$, ограничен со делот од ординатната оска помеѓу c и d од спротивната страна со графикот на функцијата $y = f(x)$ (од каде што наоѓаме $x = f^{-1}(y)$) и со хоризонтали во c и d се пресметува по формулата

$$\boxed{P = \int_c^d x(y)dy}$$



Пример 1: Пресметај плоштина на слика ограничена со параболата $y = x^2 - 6x + 11$, ординатата во темето на параболата и двете координатни оски.

Решение:



Од $y = x^2 - 6x + 11$

$\Rightarrow y = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 11$

$y = (x-3)^2 + 2$

$y - 2 = (x-3)^2$

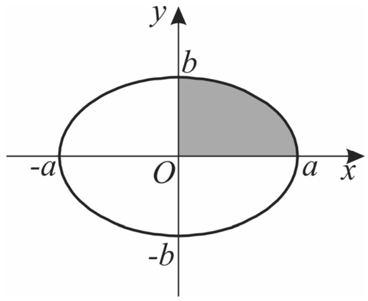
$\Rightarrow T(3,2)$ е теме на параболата. Параболата со отвор е свртена нагоре.

Имаме

$$P = \int_0^3 \left(x^2 - 6x + 11\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 11x\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{3^3}{3} - 3\cdot 3^2 + 11\cdot 3 - \left(\frac{0^3}{3} - 3\cdot 0^2 + 11\cdot 0\right) = 15.$$

Пример 2: Пресметај плоштина на слика ограничена со елипсата $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.



Решение: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)$$

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Знакот + се однесува на горната половина на елипсата, а – на долната половина.

Поради симетричност на елипсата во однос на x и $y-$оската, имаме

$$P = 4P_1 = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\cdot\frac{a^2\pi}{4} = ab\pi,$$

бидејќи $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \dfrac{a^2\pi}{4}$ (види пример 2, точка 3° од оваа глава).

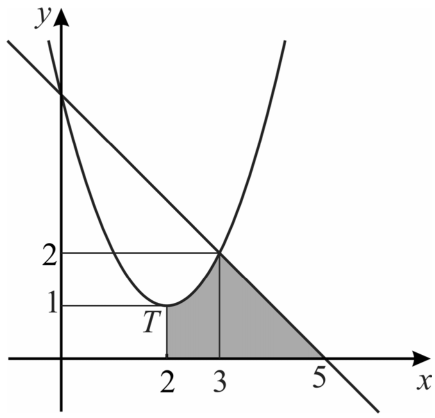
Специјално, за $a = b = r$ елипсата поминува во кружница $x^2 + y^2 = r^2$ со радиус r, а сликата ограничена со оваа кружница во круг со радиус r. За плоштината на овај круг имаме

$$P = r\cdot r\cdot \pi = r^2\pi$$

т.е. ја добивме добро познатата формула за плоштина на круг со радиус *r*.

Пример 3: Пресметај плоштина на слика ограничена со параболата $y = x^2 - 4x + 5$, ординатата во темето на параболата, правата $y = -x + 5$ и апсцисната оска.

Решение:



Параболата $y = x^2 - 4x + 5$, има теме $T(2,1)$, со отвор е свртена нагоре и нејзини пресечни точки со правата се $A(0,5)$ и $B(3,2)$

Имаме

$$P = P_1 + P_2 = \int_2^3 \left(x^2 - 4x + 5\right)dx + \int_3^5 \left(-x + 5\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 5x\right)\Bigg|_2^3 + \left(-\frac{x^2}{2} + 5x\right)\Bigg|_3^5 =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} - 4\frac{3^2}{2} + \cdot 5 \cdot 3\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 4 \cdot \frac{2^2}{2} + 5 \cdot 2\right) + \left(-\frac{5^2}{2} + 5 \cdot 5\right) - \left(-\frac{3^2}{2} + 5 \cdot 3\right) = \frac{14}{3}$$

Задача 1: Пресметај плоштина на слика ограничена со:

а) $y = \ln x$, $y = 0$ и $x = e$

б) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x = -1$, $x = 1$ и $y = 0$.

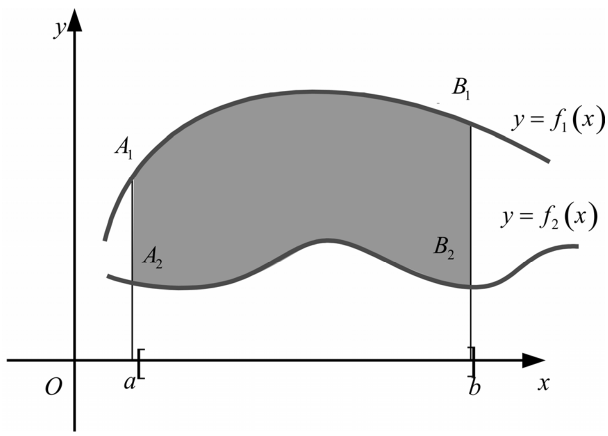
<u>Плоштина на слика ограничена со две криви</u>

$$P = P_{abB_1A_1} - P_{abB_2A_2} =$$

$$= \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \left[f_1(x) - f_2(x)\right]dx$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \int_a^b \left[f_1(x) - f_2(x)\right]dx}$$



Плоштина на слика помеѓу две криви што се сечат

Со решавање на системот

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x), \end{cases}$$

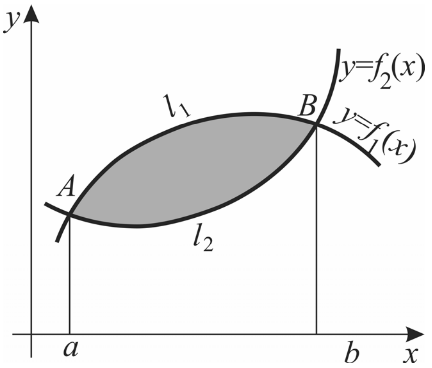
составен од равенките на кривите што се сечат, се добиваат координатите на пресечните точки $A(a, f_1(a))$ и $B(b, f_1(b))$.

Имаме

$$P = P_{abBA(l_1)} - P_{abBA(l_2)} =$$

$$= \int_a^b f_1 x dx - \int_a^b f_2 x dx =$$

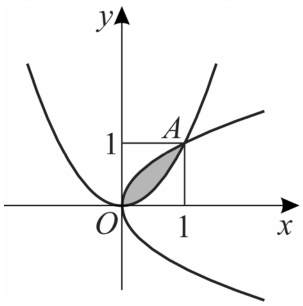
$$= \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$$



т.е.

$$\boxed{P = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx}$$

Пример 4: Пресметај плоштина на слика ограничена со параболите $y = x^2$ и $x = y^2$



$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$x = (x^2)^2$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x^3 - 1 = 0$$

$$x = 1$$

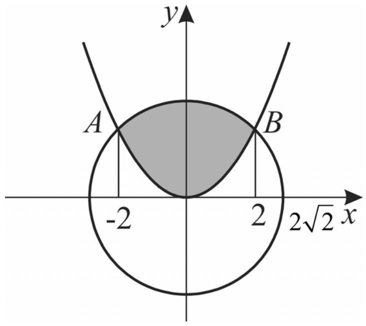
$\Rightarrow O(0,0)$ и $A(1,1)$ се пресечните точки.

$$P = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right] dx = \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_2^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Пример 5: Пресметај плоштина на слика ограничена со параболата $y = \frac{x^2}{2}$ и кружницата $x^2 + y^2 = 8$.

Решение:

Пресечни точки на овие две криви се $A(-2,2)$ и $B(2,2)$.



Од сликата се гледа дека y -оската ја дели сликата на два еднакви дела, поради што доволно е да пресметаме плоштина на само еден дел (оној што е во првиот квадрант).

Имаме

$$P = 2P_1 = 2\int_0^2 \left(\sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2\int_0^2 \sqrt{8-x^2}\,dx - \int_0^2 x^2 dx =$$

$$= 2I_1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 2I_1 - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = 2I_1 - \frac{8}{3}.$$

За I_1 имаме:

$$I_1 = \int_0^2 \left(\sqrt{8-x^2} \right) dx = \int_0^2 \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - x^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$$

$$a = 2\sqrt{2}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \right)\Big|_0^2 = 4\left(\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{x}{2\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{8}} \right)\Big|_0^2 =$$

$$= 4\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} \right) = 4\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \pi + 2$$

Конечно, добиваме

$$P = 2\cdot(\pi+2) - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

Задача 2: Пресметај плоштина на слика ограничена со:

а) параболата $y = (x+1)^2$ и правата $y = -\frac{x}{2}$

б) параболите $y = x^2 - 2x + 3$ и $y = -x^2 + 2x + 9$

в) $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$

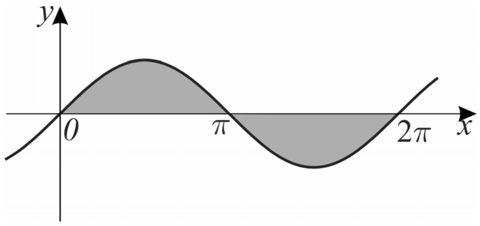
г) $y = \frac{1}{1+x^2}$ и $y = \frac{x^2}{2}$.

Плоштина на слика со делови што се и над и под апцисната оска

Случајот ќе го илустрираме на конкретен

Пример 6: Пресметај плоштина на слика ограничена со $y=\sin x$ и $y=0$ за $0\le x\le 2\pi$.
Решение: Сликата, чија што плоштина треба да ја пресметаме, има дел што е над x- оската и дел што е под x-оската. Ако појдеме директно, добиваме

$$P=\int_0^{2\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{2\pi}=-\cos 2\pi-\left(-\cos 0\right)=-1+1=0$$



и очигледно правиме некоја грешка. Каде е грешката? Согласно второто адитивно својство на определениот интеграл, имаме

$$\int_0^{2\pi}\sin x dx=\int_0^{\pi}\sin x dx+\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx$$

и

$$\int_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2>0,\quad \text{бидејќи}\quad \sin x\ge 0\quad \text{за}\quad x\in\left[0,\pi\right]$$

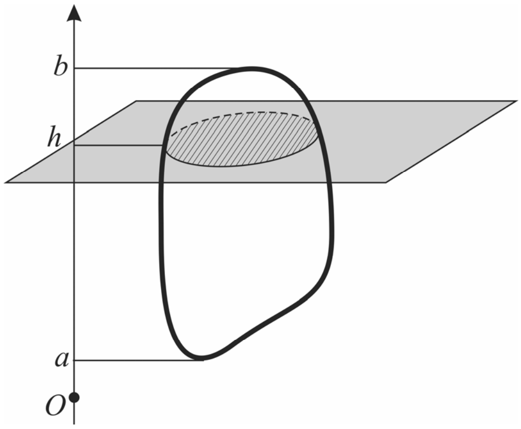
$$\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=-2<0,\quad \text{бидејќи}\quad \sin x\le 0\quad \text{за}\quad x\in\left[\pi,2\pi\right].$$

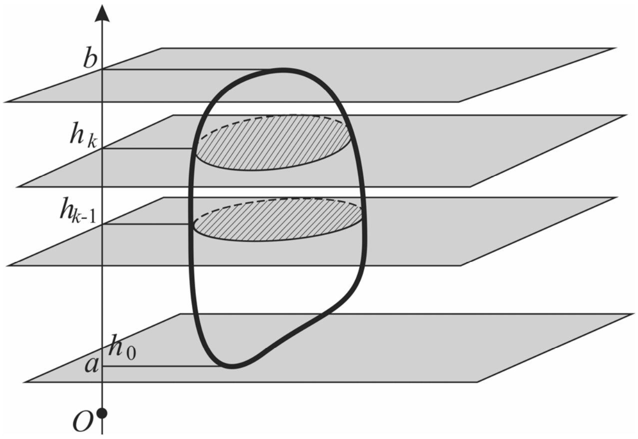
Забележуваме дека за оние делови од сликата што се над x- оската се добива позитивен број, а за делови од сликата што се наоѓаат под x- оската се добива негативен број. Во ваков случај треба да се интегрира одделно при $f\left(x\right)\ge 0$ и при $f\left(x\right)\le 0$ и при тоа да се земе апсолутна вредност од негативниот број. Во нашиот случај, имаме

$$P=P_1+P_2=\int_0^{\pi}\sin x dx+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx\right|=2+\left|-2\right|=4.$$

8.2 ВОЛУМЕН НА РОТАЦИОНО ТЕЛО

Тело со најниска точка a и највисока точка b, во однос на една вертикална бројна оска, го сечеме со хоризонтална рамнина на висина h. Пресекот на телото со хоризонталната рамнина ќе го наречеме **напречен пресек** на телото (шрафираниот лик на сликата). Јасно е дека плоштината B на напречниот пресек на телото зависи од висината h на хоризонталната рамнина со која што го сечеме телото. Со други зборови плоштината на напречниот пресек е функција од висината h на хоризонталната пресечна рамнина. Пишуваме $B = B(h)$.





Сега телото го сечеме со хоризонтални рамнини што се на висина $h_0 = a, \quad h_1, \quad h_2, \cdots h_{k-1}, \quad h_k, \cdots h_n = b$. Со овие рамнини телото е разбиено на n-делови наречени **елементарни делови**. Елементарен се вика секој дел од телото што се наоѓа помеѓу две соседни хоризонтални пресечни рамнини. Јасно е дека волуменот на телото е збир од волумените на n-те елементарни делови т.е. $V = \sum_{k=1}^{n} V_k$,при што со V_k сме означиле волумен на k-тиот елементарен дел, што се наоѓа помеѓу хоризонталните рамнини што се на висина h_{k-1} и h_k. Овој елементарен дел има висина

$$\Delta h_k = h_k - h_{k-1} \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Јасно е дека во колку висината Δh_k на k-тиот елементарен дел е се помала, во толку плоштината на $k-1$-иот и k-тиот напречен пресек ќе се поблиски една до друга т.е. во толку ќе биде поточно приближното равенство

$$B(h_{k-1}) \approx B(h_k) \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Поради ова имаме приближни равенства

$V_k \approx B(h_k)\Delta h_k$ -волумен на т.н. **елементарен цилиндер** со база $B(h_k)$ и висина $\Delta h_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$.

Според тоа, имаме

$$V=\sum_{k=1}^{n}V_k\approx\sum_{k=1}^{n}B\left(h_k\right)\Delta h_k.$$

Со оваа приближна формула волуменот на секој од n-те елементарни делови, на кои сме го распаднале телото, е заменет со волумен на соодветен елементарен цилиндер. Притоа јасно е дека последната приближна формула ќе биде во толку поточна во колку бројот n на елементарните делови тежи кон $+\infty$ и висината на секој од елементарните делови тежи кон нула. Природно ја имаме следнава

Дефиниција: Волумен на тело се дефинира како гранична вредност од збирот на волумените на елементарните цилиндри кога нивниот број тежи кон $+\infty$ и при тоа висината на секој од нив тежи кон нула т.е.

$$V=\sum_{k=1}^{n}V_k\overset{def}{=}\lim_{\substack{n\to\infty\\ \forall\Delta h_k\to 0}}\sum_{k=1}^{n}B\left(h_k\right)\Delta h_k.$$

Како $\sum_{k=1}^{n}B\left(h_k\right)\Delta h_k$ е интегрална сума за функција $B=B\left(h\right)$ (напречен пресек како функција од висината на која што се наоѓа) на сегментот $\left[a,b\right]$, а имајќи ја в предвид дефиницијата на определениот интеграл (точка 1 од ова поглавје), за волуменот V на телото добиваме

$$V=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \forall\Delta h_k\to 0}}\sum_{k=1}^{n}B\left(h_k\right)\Delta h_k=\int_a^b B\left(h\right)dh$$

т.е.

$$V=\int_a^b B\left(h\right)dh.$$

Теорема: Волумен на тело е определен интеграл од напречниот пресек, како функција од неговата висина, во граници од најниската до највисоката негова точка.

Специјално ако имаме ротационо тело, добиено со ротација на криволинискиот трапез $abBA$ околу апсцисната оска, тогаш за волумен на ова тело ја имаме формулата

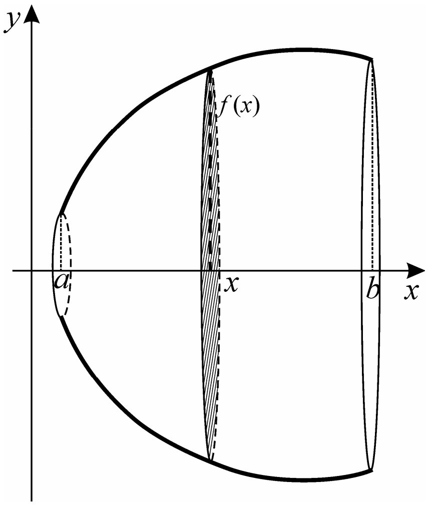
$$V=\pi\int_a^b f^2\left(x\right)dx$$

т.е.

$$\boxed{V=\pi\int_a^b y^2\left(x\right)dx}$$

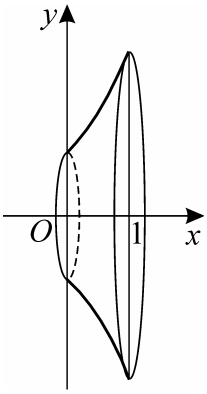
бидејќи сега во улога на вертикална h-оска ќе ја земеме апсцисната оска т.е. x-оската и во улога на напредниот пресек $B = B(h)$ што е на висина h ќе се јави напречниот пресек $B(x)$- плоштина на круг со радиус $f(x)$, на растојание x од координатниот почеток, т.е.

$$B(x) = f^2(x)\pi.$$



Пример 1: Пресметај волумен на тело што се добива со ротација околу x-оската на сликата ограничена со кривите $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$ и $y = 0$.

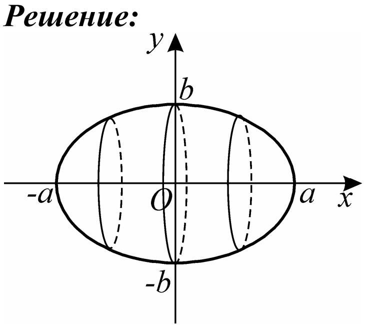
Решение:



$$V = \pi\int_0^1 y(x)^2\,dx = \pi\int_0^1 \left(e^x\right)^2 dx =$$
$$= \pi\int_0^1 e^{2x}dx = \pi\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 =$$
$$= \pi\frac{1}{2}e^{2\cdot1} - \pi\frac{1}{2}e^{2\cdot0} = \frac{\pi}{2}\left(e^2 - 1\right)$$

Пример 2: Пресметај волумен на тело што се добива со ротација на елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ околу апсцисната оска.

Решение:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$
$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)$$

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y(x)^2\,dx=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx=\pi\frac{b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx=\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=$$

$$=\pi\frac{b^2}{a^2}\left[\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)-\left(-a^3-\frac{(-a)^3}{3}\right)\right]=\pi\frac{b^2}{a^2}\left[2a^3-\frac{2a^3}{3}\right]=\pi\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{4a^3}{3}=\frac{4ab^2\pi}{3}$$

Специјално, ако $a=b=r$, тогаш ротационото тело поминува во топка со радиус r и за нејзин волумен добиваме

$$V=\frac{4r\cdot r^2\pi}{3}=\frac{4}{3}r^3\pi.$$

Задача 1: Пресметај волумен на телошто се добива со ротација околу $x-$оската на сликата ограничена со:

а) $y=\ln x$, $\quad x=e$ и апсцисната оска

б) $y=-x^2-3x+4$ и $y=x+1$

в) $y=5-2x$, $y=4x-3$ и $y=-x^2+6$

г) $y=x^2+2$, $y=-x+8$, $x=5$, $x=0$, $y=0$

г) $y=\frac{3}{x}$, $y=\frac{x}{3}$ и $y=3x$

ѓ) $y=x^3$ и $y^2=x.$

8.3. ДОЛЖИНА НА ЛАК НА РАМНИНСКА КРИВА

Нека $y=f(x)$ е дадена функција која што има непрекинат извод на сегментот $[a,b]$. Се поставува задача за пресметување на должина на лакот $\overset{\frown}{AB}=S$ т.е. на должината на делот од графикот Γ_f на функцијата меѓу точките $A\big(a,f(a)\big)$ и $B\big(b,f(b)\big)$.

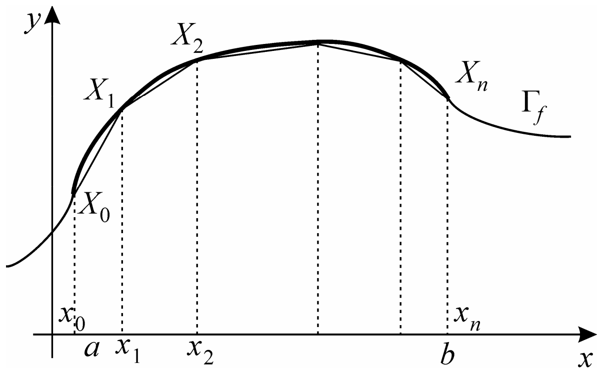
Со точките $x_0,\quad x_1,\quad x_2,\cdots x_{k-1},\quad x_k,\cdots x_n$

т.ш. $\qquad a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{k-1}<x_k<\cdots<x_{n-1},<x_n=b$

сегментот $[a,b]$ го делиме на n подсегменти и во секоја од делбените точки повлекуваме вертикали. Во пресекот на овие вертикали со графикот Γ_f на функцијата се добиваат точките: $A=X_0,X_1,X_2,\cdots,X_{k-1},X_k,\cdots,X_{n-1},X_n=B$ со кои што лакот AB е поделен на n т.н. **елементарни лаци**. Јасно е дека должината на лакот AB е еднаква на збирот од должините на споменатите елементарни лаци т.е.

$$S=\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{X_0X_1}+\cdots+\overset{\frown}{X_{k-1}X_k}+\cdots+\overset{\frown}{X_{n-1}X_n}=\sum_{k=1}^{n}\overset{\frown}{X_{k-1}X_k}$$

Со поврзување на соседните точки $X_0, X_1, X_2, \cdots, X_{k-1}, X_k, \cdots, X_{n-1}, X_n$ со отсечки се добива полигонална линија $X_0X_1X_2\cdots X_{n-1}X_n$ за која што велиме е „впишана“ во лакот AB од кривата Γ_f. Јасно е дека во колку должините на подсегментите, на кои што е распаднат сегментот $[a,b]$, се сé помали во толку поточни се приближните равенства



$$\overset{\frown}{X_0X_1}\approx\overline{X_0X_1}$$
$$\overset{\frown}{X_1X_2}\approx\overline{X_1X_2}$$
$$\vdots$$
$$\overset{\frown}{X_{k-1}X_k}\approx\overline{X_{k-1}X_k}$$
$$\overset{\frown}{X_{n-1}X_n}\approx\overline{X_{n-1}X_n},$$

поради што за должината на лакот $\overset{\frown}{AB}$ имаме приближна формула

$$S=\overset{\frown}{AB}=\sum_{k=1}^{n}\overset{\frown}{X_{k-1}X_k}\approx\sum_{k=1}^{n}\overline{X_{k-1}X_k}=S_n$$

т.е. должината на лакот $\overset{\frown}{AB}$ е приближно еднаква со должината на полигоналната линија $X_0X_1X_2\ldots X_{n-1}X_n$ „впишана“ во лакот AB од графикот Γ_f. Природно ја имаме следнава

Дефиниција: Должината на лакот $S=\overset{\frown}{AB}$ од графикот Γ_f на функцијата $y=f(x)$ се дефинира како гранична вредност од должината S_n на полигоналната линија $X_0X_1X_2\ldots X_{n-1}X_n$, впишана во лакот AB од кривата Γ_f, при $n\to+\infty$ т.е.

$$S=\overset{\frown}{AB}\overset{def}{=}\lim_{\forall n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\overline{X_{k-1}X_k}.$$

По формула за растојание меѓу две точки $X_k\left(x_k, f\left(x_k\right)\right)$ и $X_{k-1}\left(x_{k-1}, f\left(x_{k-1}\right)\right)$, имаме

$$\overline{X_{k-1}X_k}=\sqrt{\left(x_k-x_{k-1}\right)^2+\left(f\left(x_k\right)-f\left(x_{k-1}\right)\right)^2}=\left(x_k-x_{k-1}\right)\sqrt{1+\left(\frac{f\left(x_k\right)-f\left(x_{k-1}\right)}{x_k-x_{k-1}}\right)^2}$$

и согласно теоремата на Лагранж за функцијата $y = f(x)$ применета над сегментот $[x_{k-1}, x_k] \subseteq [a,b]$

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(c_k), \quad x_{k-1} < c_k < x_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

добиваме

$$\overline{X_{k-1}X_k} = \sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\,\Delta x_k .$$

Според тоа, за должината S на лакот AB имаме

$$S = \lim S_n = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \forall \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx,$$

бидејќи $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\,\Delta x_k$ е интегрална сума за функцијата

$g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ на сегментот $[a,b]$.

Со тоа ја докажавме следнава

Теорема: Ако $y = f(x)$ е функција со непрекинат извод на сегментот $[a,b]$, тогаш должината на лакот $S = \overset{\frown}{AB} \,/\, A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ од графикот Γ_f на функцијата $y = f(x)$ е еднаков на

$$\boxed{S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx}$$

Забелешка: Ако кривата Γ_f е дадена во параметарски облик

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta \quad \text{т.е.} \quad \varphi(\alpha) = a, \ \ \varphi(\beta) = b,$$

тогаш, согласно правилото за извод од параметарски зададени функции

$$f'(x) = y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

имаме

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)^2} \cdot \dot{x}(t)\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{\dot{x}(t)}\dot{x}(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt$$

т.е. $$\boxed{S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt}$$

Пример 1: Да се пресмета должината на лакот од кривата $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$ од $x_1=1$ до $x_2=2$.

Решение:

$$S=\int_1^2\sqrt{1+y'(x)^2}dx=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}dx=\int_1^2\sqrt{1+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}dx=$$

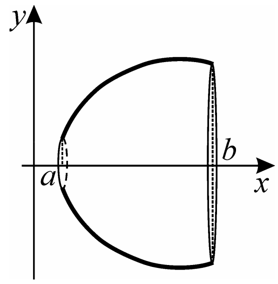
$$=\int_1^2\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}dx=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}dx=\int_1^2\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\ln x\right)\Big|_1^2=1+\frac{1}{2}\ln 2-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{0}\right)=1+\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{\ln 2}{2}.$$

8.4. ПЛОШТИНА НА РОТАЦИОНА ПОВРШИНА

Нека $y=f(x)$ е ненегативна функција со непрекинат извод на сегментот $[a,b]$. При ротација на лакот $AB\,/\,A(a,f(a)),B(b,f(b))$, од графикот Γ_f на функцијата $y=f(x)$, околу апцисната оска се добива т.н. **ротациона површина**.

Се докажува дека плоштината P на оваа ротациона површина се пресметува по формулата



$$\boxed{P=2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}dx}$$

Пример 1: Да се пресмета плоштината на ротационата површина што се добива со ротација околу апцисната оска на делот од синусоидата $y=\sin x,\quad x\in[0,\pi]$.

Решение:

$$P=2\pi\int_0^\pi \sin x\sqrt{1+(\sin x)'^2}dx=2\pi\int_0^\pi\sqrt{1+\cos^2 x}\sin x dx=$$

$$t=\cos x \qquad x=0\Rightarrow t=+1$$

$$dt=-\sin x \qquad x=\pi\Rightarrow t=-1$$

$$-dt=\sin x dx$$

$$=-2\pi\int_{1}^{-1}\sqrt{1+t^2}\,dt=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt=2\pi\cdot 2\int_{0}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt=$$

$$=4\pi\int_{0}^{1}\frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt=4\pi\int_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}+4\pi\int_{0}^{1}t\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}=$$

$$u=t \qquad dv=\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$du=dt \qquad v=\int\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}=\sqrt{1+t^2}$$

$$=4\pi\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\Big|_0^1+4\pi\left(\left(t\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^1-\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt\right)=$$

$$=4\pi\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+4\pi\left(\sqrt{2}-\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt\right)=$$

$$=4\pi\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+4\sqrt{2}\pi-4\pi\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt=$$

$$=4\pi\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+4\sqrt{2}\pi-P$$

$$\Rightarrow 2P=4\pi\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+4\sqrt{2}\pi\Rightarrow P=2\pi\left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Атанасова Е., Георгиевска С.: *Предавања по математика I*, Универзитет „Св. Кирил и Методиј", Скопје, 1985

2. Гусак А. А.: *Высшая математика*, Издательство БГУ им. В. И. Ленина, Минск, 1976

3. Димов А. Л.: *Математика 1*, Универзитет „Св. Кирил и Методиј", Скопје, 2006

4. Никольский С. М.: *Курс математического анализа, том I, том II*, Наука, Москва, 1983

5. Ивановски Н.: *Математичка анализа I, Функции од една независно променлива*, Универзитет „Св. Кирил и Методиј", Скопје, 1981

6. Кудрявцев Л. Д.: *Математический анализ, том I, II*, Высшая школа, Москва, 1973

7. Ляшко И., Боярчук А. К.: *Справочное пособие по математическому анализу, часть первая*, Высшая школа, Москва, 1978

8. Минорский В. П.: *Сборник задач по высшей математике*, Физматгиз, Москва, 1961

9. Пиперевски Б.: *Математичка анализа I*, Универзитет „Св. Кирил и Методиј", Скопје, 2001

10. Пономарев К. К.: *Составление дифференциальных уравнений*, Вышейшая школа, Минск, 1973

11. Ferenci I., Ungar I., Cvijanović M., Čimić I.: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike I*, Univerzitet u Novom Sadu, Beograd, 1967

12. Фихтенгольц Г. М.: *Основы математического анализа, том I*, Наука, Москва, 1968

13. Чупона Ѓ., Трпеновски Б., Целакоски Н.: *Виша математика, книга 1 и 2*, Просветно дело, Скопје, 1994

14. Џејмс Г., Барли Д., Клементе Д., Дајк Ф., Смарл Џ., Врајт Џ.: *Математика на модерен инженеринг* (превод на делото *Modern Engineering mathematics* од програмата на Владата на Р. Македонија), Македонско издание, Скопје, 2009

15. Шапкарев И.: *Задачи за вежбање по математика I*, Универзитет „Св. Кирил и Методиј", Скопје, 1972

СОДРЖИНА

I МНОЖЕСТВА И НИЗИ
1. Множества……………………………………………………...........………………….5
2. Пресликување………………………………………………………...........…………...12
3. Бинарни операции………………………………………………………...........……14
4. Бројни множества……………………………………………………………................14
5. Проширено множество на реални броеви………………………………………............ 21
6. Интервали и ε–околина……………………………………………………………............22
7. Математичка индукција…………………………………………………………............. 23
8. Биномна формула……………………………………………………………………...........25
9. Однос, пропорција и процент………………………………………………………...........30
10. Примена на процент и пропорција во хемиски сметки……………………….............37
11. Низи од реални броеви……………………………………………………………............44
11.1 Поим за низа. Конвергентност и дивергентност на низа…………….............44
11.2 Монотони и ограничени низи…………………………………………...........49
11.3 Некои теореми за конвергентни низи……………………………….............55
11.4 Аритметичка низа (прогресија)……………………………………….............62
11.5 Геометриска низа (прогресија)……………………………………..........…66
11.6 Природни низи и бројот е…………………………………………..........…71

II РЕАЛНИ ФУНКЦИИ ОД ЕДНА РЕАЛНА НЕЗАВИСНО ПРОМЕНЛИВА
1. Поим за реална функција ……………………………...........……………………77
2. Монотони и ограничени функции……………………………………...........…………84
3. Парни и непарни функции………………………………………………………..........…..86
4. Инверзни функции…………………………………………………………...........…89
5. Периодични функции…………………………………………………………............. 91
5.1 Тригонометриски функции над остар агол…………………………….............92
5.2 Тригонометриски функции над произволен агол……………...........…………94
6. Циклометриски функции…………………………………………………………........…103
7. Гранична вредност на функции………………………………………………...........108
7.1 Поим за гранична вредност……………………………………............…108
7.2 Лева и десна гранична вредност…………………………………............…112

7.3 Проширување на поимот за гранична вредност на функции. Асимптоти на функции……………………………………………………………..............113
7.4 Некои поважни гранични вредности на функции………….........…………120
8. Непрекинатост на функции…………………………………………………...............125
8.1 Непрекинатост во точка………………………………………………............. 125
8.2 Непрекинатост на сегмент…………………………………………….............128

III ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ

1. Поим за извод. Примери ……………………………………………………..............131
2. Извод од збир, разлика, производ и количник…………………………..................135
3. Извод од инверзни функции……………………………………………............…140
4. Табела на основни изводи………………………………………………….............142
5. Изводи од сложени функции……………………………………………............… 142
6. Извод од имплицитни функции…………………………………............……...146
7. Извод од параметарски зададени функции……………………………….............149
8. Геометриско значење на извод. Равенки на тангента и нормала……………............ 150
9. Физичко значење на извод…………………………………………………............153
10. Хемиско значење на извод……………………………………………….............155
11. Поим за диференцијал на функција………………………………………............. 155
12. Изводи и диференцијали од повисок ред…………………………………...............159
13. Локални екстреми и теорема на Ферма……………………………………............. 161
14. Некои основни теореми на диференцијално сметање……………………...............170
15. Монотоност на функции со помош на изводи………………………………............. 173
16. Неопределени изрази. Лопиталови правила………………………………..............175
17. Испитување на тек на функција и конструкција на графици………….........……182
18. Маклоренова и Тајлорова формула за полиноми……………………………............185
19. Тајлорова и Маклоренова формула за функции…………………………….............189

IV НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

1. Поим за неопределен интеграл и некои негови особини……………………..............195
2. Табела на основни интеграли……………………………………………….................198
3. Смена на променливи во неопределениот интеграл…………………………..............…201
4. Парцијална интеграција…………………………………………………….................211
5. Некои рекурентни формули………………………………………………............213
6. Некои неопределени интеграли кои содржат квадратен трином……...........………217
7. Неопределени интеграли од рационални функции……………………………...............219

8. Интеграли на хемиски реакции…………………………………………………............... 227
8.1 Интеграл на мономолекуларна реакција……………………….................227
8.2 Интеграл на бимолекуларна реакција………………………………...............229
8.3 Интеграл на полимолекуларна реакција……………………….................231
9. Неопределени интеграли од тригонометриски функции…………………...............233
10. Неопределени интеграли од некои ирационални функции……………….................242

V ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

1. Дефиниција на определен интеграл и некои негови особини..…………….................248
2. Врска меѓу неопределениот и определениот интеграл …………………..…...............252
3.Смена на променлива и парцијална интеграција во определениот интеграл 257
4. Њутн-Лајбницова формула и задача за плоштина на криволиниски трапез..............260
5. Теорема за средна вредност при определениот интеграл……...……………...............262
6. Интеграл со променлива горна граница и интеграл со бесконечна горна граница …………………………………………………………………..........……264
7. Приближно пресметување на определениот интеграл ……………………................267
8. Примена на определениот интеграл ……………………………………..…................272
8.1 Плоштина на рамнински лик ………………………………………..….............272
8.2 Волумен на ротационо тело ……………………………………...……..............278
8.3 Должина на лак на рамнинска крива………………………………................281
8.4 Плоштина на ротациона површина ……………………………….….................284

ЛИТЕРАТУРА 287

$$\frac{dx}{dt} = k(a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_n - x)$$

$$\int \frac{dx}{(a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_n - x)} = k\int dt$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \int \frac{dx}{a_j - x} = k\int dt$$

$$\vdots$$

ISBN-978-9989-43-323-8

9 789989 433238