УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ” - СКОПЈЕ

ЕЛЕНА АТАНАСОВА
СЛОБОДАНКА ГЕОРГИЕВСКА

# МАТЕМАТИКА I

ТРЕТО ИЗДАНИЕ

Скопје, 2004

**УНИВЕРЗИТЕТ "СВ.КИРИЛ И МЕТОДИЈ" ВО СКОПЈЕ**

**ЕЛЕНА АТАНАСОВА**
**СЛОБОДАНКА ГЕОРГИЕВСКА**

# МАТЕМАТИКА I

ТРЕТО ИЗДАНИЕ

Скопје, 2003

# ПРЕДГОВОР

Учебникот "Предавања по математика I" претставува дел од предавањата по предметот математика I за студентите на Градежниот факултет во Скопје (без делот од векторска алгебра и аналитичка геометрија) што авторите го држеа повеќе години.

Овој учебник содржи уводни поими, диференцијално и интегрално сметање на функции од една реална независно промрнлива со примена.

Материјалот е изложен во девет глави. Теориското изложување е проследено со голем број решени примери и задачи за вежбање со одговори. Математичката строгост при изложувањето е сообразена со целта дека ракописот е наменет за студентите од I година.

Деловите што се однесуваат на студентите кои имаат посебен интерес за продлабочување на знаењата по математика се означени на почетокот со знакот ⌈, а на крајот со знакот ⌋.

Во прв ред ракописот е наменет за студентите на Градежниот факултет, а мислиме дека корисно ќе послужи и на студентите од другите технички факултети, бидејќи материјата што е обработена во учебникот одговара на наставната програма по предметот математика I.

Авторите најсрдечно им се заблагодаруваат на рецензентите проф. д-р Илија Шапкарев и проф. Димитар Битраков, кои со своите забелешки придонесоа за подобрување квалитетот на ракописот. Исто така се заблагодаруваат на колегата проф. д-р Новак Ивановски кој целосно го прочита ракописот и даде корисни сугестии, како и другите колеги.

Скопје, јуни 1984 год. Авторите

## ПРЕДГОВОР КОН ВТОРОТО ИЗДАНИЕ

Во второто издание се извршени корекции на некои воочени грешки во првото издание и некои мали дополнувања на текстот.

Скопје, февруари 1992 год. Од авторите

## ПРЕДГОВОР КОН ТРЕТОТО ИЗДАНИЕ

Ова издание не се разликува по содржина од претходните две изданија.

Во него се извршени извесни дополнувања како на трекстот така И во примерите и задачите за вежбање.

За поголема прегледност на текстот извршена е компјутерска обработка на истиот.

На ас. м-р Вено Пачовски му изразуваме благодарност за укажаната помош при компјутерската обработка на текстот.

Скопје, декември 2003 Авторите

# ГЛАВА I

# ВОВЕДНИ ПОИМИ

## 1. НЕКОИ ПОИМИ И ОЗНАКИ ОД МАТЕМАТИЧКА ЛОГИКА

### 1 . 1. Искази

Мислите и чувствата се искажуваат со реченици. Во секојдневниот говор се искажуваат, покрај реченици со смисла и реченици без смисла.

**Пример 1.** Скопје е главен град на Република Македонија (со смисла).

**Пример 2.** Црвениот дожд пасе трева (без смисла).

Во математичката логика нé интересираат само речениците со смисла, реченици кои содржат информација, вистинита или невистинита.

**Дефиниција.** *Реченица, која има смисла, запишана со зборови или симболи, од која може да се утврди дали е вистинито или невистинито она што е искажано со неа, се вика* ***исказ*** (интуитивна дефиниција).

**Пример 3.** $3 \cdot 3 = 9$ (вистинит исказ).

**Пример 4.** $2+2 = 1$ (невистинит исказ).

**Пример 5.** $2x+3 = 5$ (оваа реченица е точна само кога е $x=1$, а за сите други вредности се добиваат невистинити, неточни реченици.

**Пример 6.** Жолтата боја е најубава. (За оваа реченица не може да се каже ниту дека е вистинита ниту дека е невистинита. За некого може жолтата боја да е најубава, а за некого да не е најубава.).

Речениците во примерите 5 и 6 не се искази. Исто така прашалните и извичните реченици не се искази, бидејќи кај нив не може да се утврди дали искажуваат вистина или невистина.

Точниот исказ го викаме ***тврдење.*** Некои позначајни тврдења се викаат ***теореми***, како на пример Питагоровата теорема.

**Пример 7.** $5 > 0$ и $5 > 3$.

**Пример 8.** Ако $3+2=5$, тогаш $5>3$ и $5>2$.

Примерите 7 и 8 се составени од два исказа.

Исказите што се составени од два или повеќе искази се вели дека се ***сложени искази***.

Исказите што не се составени од други искази се вели дека се ***прости*** или ***елементарни искази*** ( пр. 1, 3, 4).

Елементарните искази ќе се договориме да ги бележиме со малите букви од латиницата, најчесто со $p$, $q$, $r$, $s$ и $t$.

Даден исказ $p$ може да биде вистинит (точен) или невистинит (неточен). Зборовите вистинит и невистинит се викаат ***вредности на вистинитост.*** Со $\tau(p)$ ќе ја означуваме вредноста на вистинитост на исказот $p$.

Ако даден исказ е вистинит, тогаш се вели дека има вредност на вистинитост $\top$ (првата буква од англискиот збор truth-вистина) и се означува со $\tau(p) = \top$, а ако исказот $p$ е невистинит, се вели дека има вредност на вистинитост $\perp$ (не те ) и се означува со $\tau(p) =\perp$. За означување вредност на вистинитост, вистина и невистина, соодветно се користат и ознаките 1 и 0.

На пример: Ако со $p$ го означиме исказот: $2+3=6$, тогаш неговата вредност на вистинитост е $\tau(p) = \perp$.

## 1. 2. Операции со искази

Од два или повеќе прости искази се формираат сложени искази. Формирањето сложени искази и определувањето на нивната вредност на вистинитост е предмет на проучување на т.н. ***алгебра на искази.***

Во сметањето на искази ќе се задржиме на основните поими, пред сè, на оние што имаат примена во наставата по математика.

**$1^0$** ***Конјункција.*** *Ако $p$ и $q$ се два кои и да било искази, тогаш и исказот "$p$ и $q$" е исказ кој се вика* ***конјункција на исказите p и q*** *и се означува со* $p \wedge q$ (се чита: $p$ и $q$).

*Конјункцијата од два исказа е вистинит исказ, тогаш и само тогаш кога се вистинити и двата исказа.*

Ако исказите $p$ и $q$ ги замениме со нивната вредност на вистинитост, ја добиваме следнава шема за вредности на вистинитост за конјункција:

| $\tau(p)$ | $\tau(q)$ | $\tau(p\wedge q)$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ |
| $\perp$ | T | $\perp$ |
| $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ |

Очигледно, исказите $p\wedge q$ и $q\wedge p$ имаат иста вредност на вистинитост.

**Пример 1.**

$p$: (4 >3); $q$: (4 >1+1);

$p\wedge q$: $\big((4>3)$ и $(4>1+1)\big)$

$\tau(p) =$ T, $\tau(q) =$ T, $\tau(p\wedge q) =$ T.

**Пример 2.** $p$: (4>3); $q$: (4<2); $p\wedge q$: $\big((4>3)$ и $(4<2)\big)$.

$\tau(p) =$ T, $\tau(q) = \perp$, $\tau(p\wedge q) = \perp$.

**Пример 3.** $p$: (4<3); $q$: (4<1+1); $p\wedge q$: $\big((4<3)$ и $(4<1+1)\big)$

$\tau(p) = \perp$, $\tau(q) = \perp$, $\tau(p\wedge q) = \perp$.

$2^0$ ***Дисјункција.*** *Ако p и q се два кои и да било исказа, тогаш и исказот "p или q" е исказ кој се вика* ***дисјункција на исказите p и q*** *и се означува со* $p\vee q$ (се чита: $p$ или $q$).

*Дисјункција од два исказа е вистинит исказ, кога барем еден од исказите е вистинит, а е невистинит исказ, ако и двата исказа се невистинити.*

Според тоа, шемата за вредности на вистинитост на дисјункција од исказите $p$ и $q$ е следнава:

| $\tau(p)$ | $\tau(q)$ | $\tau(p\vee q)$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | $\perp$ | T |
| $\perp$ | T | T |
| $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ |

Очигледно е дека исказите $p\vee q$ и $q\vee p$ имаат иста вредност на вистинитост.

**Пример 1.** $p$: (1>0); $q$: (1<0);

$p\vee q$: ((1>0) или (1<0).

$\tau(p) =$ T, $\tau(q) = \perp$, $\tau(p\vee q) =$ T.

$3^0$ ***Импликација.*** *Ако* $p$ *и* $q$ *се два кои и да било исказа, тогаш и исказот* "ако е $p$, тогаш е $q$" *е исказ кој се вика* ***импликација на исказите p и q*** *и се означува* $\mathbf{p \Rightarrow q}$ (се чита: од $p$ следува $q$ или $q$ следува од $p$).

*Исказот импликација од исказите* $p$ *и* $q$ $(p \Rightarrow q)$ *е невистинит само кога исказот* $p$ *е вистинит, а исказот* $q$ *невистинит.*

Шемата на вредности на вистинитост за импликација гласи:

| $\tau(p)$ | $\tau(q)$ | $\tau(p \Rightarrow q)$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | $\perp$ | $\perp$ |
| $\perp$ | T | T |
| $\perp$ | $\perp$ | T |

**Пример 1.** $p$: $(5<2+3)$; $q$: $(5<3)$;

$(p \Rightarrow q)$:(( 5<2+3) следува (5<3)).

$\tau(p)=\perp$, $\tau(q)=\perp$, $\tau(p \Rightarrow q)=$T.

Сложениот исказ е вистинит зошто и двата исказа се невистинити.

Исказите:

– ако е $p$, тогаш е $q$,

– $p$ е доволен услов за $q$,

– $q$ е доволен услов за $p$,

имаат исто значење. *Исказот* $p$ се вика ***претпоставка***, а *исказот* $q$ ***последица*** (заклучок).

**Пример 2.** Исказот "ако еден многуаголник е квадрат, тогаш тој е правоаголник" има исто значење со исказите:

– доволен услов еден многуаголник да биде правоаголник е тој да е квадрат;

– потребен услов еден многуаголник да биде квадрат е тој да биде правоаголник.

$4^0$ ***Еквиваленција.*** *Ако* $p$ *и* $q$ *се два кои и да било исказа, тогаш и исказот* " $p$ е ако и само ако е $q$" *е исказ кој се вика* ***еквиваленција на исказите p и q*** *и се означува со* $\Leftrightarrow$ ( се чита: $p$ еквивалентно со $q$).

*Еквиваленција од два исказа е вистинита ако и само ако и двата исказа имаат меѓусебно исти вредности на вистинитост. Во другите случаи исказот еквиваленција е невистинит.* Соодветната шема на вредности на вистинитост гласи:

| $\tau(p)$ | $\tau(q)$ | $\tau(p\Leftrightarrow q)$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | ⊥ | ⊥ |
| ⊥ | T | ⊥ |
| ⊥ | ⊥ | T |

**Пример 1.** Исказот " $2^3=3^2$ ако и само ако 8=9" е вистинит исказ бидејќи и двата исказа $2^3=3^2$ и 8=9 се невистинити искази.

**Пример 2.** Ако $p$: $a=b$,

$q$; $a+c=b+c$, тогаш

$$\tau(p\Leftrightarrow q) = \tau(a=b \Leftrightarrow a+c=b+c) = \text{T}.$$

Исказите:

– $p$ е ако и само ако е $q$,

– $p$ е потребен и доволен услов за $q$,

– $q$ е потребен и доволен услов за $p$,

– $p$ е тогаш и само тогаш кога е $q$,

во математиката имаат исто значење.

**Пример 3.** Исказот: "триаголник е еднаквокрак ако и само ако има два еднакви агла" може да се искаже на следниов начин:

– потребен и доволен услов триаголник да биде еднаквокрак е да има два еднакви агла,

– потребен и доволен услов триаголник да има два еднакви агла е да биде еднаквокрак,

– триаголник има два еднакви агла тогаш и само тогаш кога е еднаквокрак.

**$5^0$** ***Негација.*** *Ако p е некој исказ, тогаш исказот "не p" е исказ кој се вика* ***негација на исказот p*** *и се означува со* $\rceil p$ *или* $\overline{p}$ ( се чита: не $p$).

*Исказот* $\overline{p}$ *е вистинит ако p е невистинит, а* $\overline{p}$ *е невистинит ако p е вистинит.* Шемата на вредности на вистинитост за негација е:

| $\tau(p)$ | $\tau(\overline{p})$ |
|---|---|
| T | ⊥ |
| ⊥ | T |

Принципот ако $p$ е вистина, а $\overline{p}$ невистина (лага) или $\overline{p}$ е вистина, а $p$ лага е наречен "принцип што го исклучува третото" или "tertium non datur". Овој принцип многу често се користи при индиректни докази во математиката. Имено, се зема тврдењето дека е неточно и се доаѓа до контрадикција.

**Пример 1.** $p$: 4 е квадрат од 2; $\tau(p)=\top$.

$\overline{p}$ : 4 не е квадрат од 2; $\tau(\overline{p})=\perp$.

**Пример 2.** $p$ : 5 е квадрат од 2; $\tau(p)=\perp$.

$\overline{p}$ : 5 не е квадрат од 2; $\tau(\overline{p})=\top$.

*Конјункција, дисјункција, импликација, еквиваленција и негација се викаат уште* ***основни логички операции со искази,*** *а симболите* $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ *и* $\rceil$ ***логички симболи****.*

Со дефинициите за конјункција, дисјункција, импликација, еквиваленција и негација, видовме како од еден или два исказа се добива нов исказ.

Во алгебрата на искази значајна улога играат исказните формули. ***Исказни формули*** *се искази формирани од прости искази* $p$, $q$, $r$, … , нивни негации $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$, … , знаците $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ и заградите ( ), применувајќи ги конечен број пати овие симболи. Заградите може и да не се пишуваат ако нивното испуштање не доведува до тешкотии околу смислата на исказот и ако низата $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ и $\rceil$ ја прифатиме за растечка по јачина на сврзувањето.

Помеѓу поважните исказни формули се наоѓаат и следниве:

**1.** $(\overline{\overline{p}}) = p$.

**2.** $p \vee p \Leftrightarrow p, \quad p \wedge p \Leftrightarrow p$.

**3.** $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p\,, \quad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$.

**4.** $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r,$

$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r.$

**5.** $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r),$

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$

**6.** $(\overline{p \vee q}) \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}\,, \quad (\overline{p \wedge q}) = \overline{p} \vee \overline{q}\,.$

Доказ дека некоја формула е точна може да се изведе со оформување табела на вистинитост во која се внесуваат сите можни вредности на таа формула во зависност од вистинитосните вредности на елементарните искази.

**Пример.** *Да се провери следнава еквиваленција*:

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\overline{p \wedge q})$$

*со помош на табелата на вредности на вистинитост.*

| $p$ | $q$ | $p\vee q$ | $p\wedge q$ | $\overline{p\wedge q}$ | $(p\vee q)\wedge(\overline{p\wedge q})$ | $(p\vee q)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(\overline{p\wedge q})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Од табелата се заклучува дека еквиваленцијата не важи, бидејќи не е точна во последниот ред од табелата.

## 1. 3. Квантификатори

Во **т. 1. 1** забележавме дека равенката $2x+3=5$ не е исказ, бидејќи само за $x=1$ е вистинит исказ, а за $x\neq 1$ е невистинит исказ. Исто така и неравенката $x^2>1$ не е исказ бидејки за $x<-1$ и $x>1$ таа е вистинит исказ, а за $-1<x<1$ невистинит. И во двата случаја се сретнуваме со *исказни функции* (*предиикати*).

***Предикат*** *е реченица која содржи променлива и станува исказ кога таа променлива ќе добие определена вредност.*

Предикатите се означуваат со $P(x)$, $S(x)$, … , каде со $x$ е означена променливата.

Од предикатот $P(x)$ може да се добијат исказите:

"За секој $x$ важи $P(x)$" или симболички се означува, $(\forall x)P(x)$.

"Постои $x$, таков што важи $P(x)$" или симболички се означува $(\exists\, x)\, P(x)$.

**$1^0$** Симболот "$\forall$" се вика ***универзален квантификатор*** (се чита: за секој, потсетува на завртена првата буква од англискиот збор "any – секој").

**Пример 1.** За секој реален број $x$ важи $x^2 > 0$. Со примена на овој квантификатор може да се напише:

$$(\forall x \in R)(x^2 > 0).$$

**$2^0$** Симболот "$\exists$" се вика ***егзистенцијален квантификатор*** (се чита: постои) потсетува на завртена првата буква од зборот "exist –постои, има".

**Пример 2.** Постои реален број $x$ кој е решение на равенката $3x$=6. Со примена на овој квантификатор може да се напише:

$$(\exists\, x)\ (3x=6).$$

Квантификаторите често се употребуваат во исказните формули. Според дефиницијата тие секогаш се ставаат пред некој објект $x$. Ќе ги употребуваме со загради, како $(\forall x)$, $(\exists\, x)$ ако е јасно за кој објект $x$ е збор (пример 2). Во спротивно, во заградата се допишува (објаснува) каде припаѓа $x$ ( пример 1), односно кој услов го задоволува $x$ (пример 3).

**Пример 3.** Ако $x$ и $y$ се реални броеви, тогаш исказот

$$(\forall x)\ (\exists\, y) \quad (x - y = 2)$$

се чита за секој $x$ постои $y$ таков што $x-y=2$.

Примената на квантификатори ќе дојде до израз во следната точка, во теоријата на множества.

## Задачи за вежбање

**1** Да се определи вистинитосната вредност на исказите:

**а)** $p$: $3^2=2\cdot 3$, $\tau(p) = 0$.

**б)** $q$: бројот 25 е од третата десетка, $\tau(q) = 1$.

**2.** Определи кои од следниве реченици се искази:

**а)** мислам дека 5+3=8; не е исказ.

**б)** $2x$ е поголемо од $x$; не е исказ.

**в)** бројот 36 е од третата десетка; да.

**г)** дали е 4+8=12? не.

**д)** $5^2 = 2^5$; да.

**ѓ)** бројот 3 е бел не.

**3.** Да се определи вредноста на вистинитост на исказите:

– конјункција;

**а)** Вардар минува низ Скопје и Гевгелија; (Т).

**б)** 3 е прост број и 3 е поголемо од 5; ($\perp$).

**в)** дијагоналите на ромбот заемно се нормални, а страните еднакви; (Т).

– дисјункција;

**а)** 4>5 или 5>6; ($\perp$).

**б)** дијагоналите на правоаголникот се еднакви или меѓу себе нормални; (Т).

**в)** 2–3 = 1 или 2–3 = –1; (Т).

– еквиваленција;

**а)** 6 е прост број, тогаш и само тогаш кога 6 > 7; (Т).

**б)** ако $2^3 = 3^2$, тогаш $8 \neq 9$; ($\perp$).

**4.** Да се изврши негација, а потоа да се определи вредноста на вистинитост на исказот,

– дијагоналите во правоаголникот меѓу себе се еднакви ($\perp$).

**5.** Да се докаже точноста на исказните формули наведени во точката **1.2.** со помош на табела од вредности на вистинитост.

**6.** Да се искажат со зборови следниве предикати:

**а)** $(\forall\, a)\,(\forall\, b)(a^2+b^2>0)$;

**б)** $(\forall\, a)\,(\exists\, b)\,(a^2-b^2>0)$.

**7.** Да се запише со помош на квантификатори:

**а)** за секој $x$, $3x> x$; $(\forall\, x)\,(3x> x)$.

**б)** постои $x$ за кој $x^2 <5$; $(\exists\, x)\ (x^2 <5)$.

**8.** Да се определи вредноста на вистинитост за следниве искази:

**а)** $(\forall\, x)\,(3x > x)$; ($\perp$).

**б)** $(\forall\, x)\,(\forall\, y)\,(x^2 + y^2 \geq 0)$; (Т).

**в)** $(\exists\, x)\,(x-2 = 8)$; (Т).

# 2. МНОЖЕСТВА

## 2. 1. Поим множество

Поимот множество (фамилија) е еден од најважните поими во математиката. Тој е интуитивно толку близок, што тешко би можел да се дефинира со помош на некој друг попрост поим, па затоа го земаме за основен, а ќе го објасниме на неколку примери:

– студентите на Универзитетот во Скопје формираат едно множество;

– студентите на Градежниот факултет, исто така, формираат множество;

– сите точки од една права, книгите во една библиотека, жителите на еден град се, исто така, примери на множества.

*Објектите од кои е составено множеството се викаат **елементи на множеството**.*

Вообичаено е множествата да ги обележуваме со големите букви од латиницата, а нивните елементи со малите букви од истата азбука.

На пример, $A = \{\ a, b, c, d\ \}$ е ознака за множеството $A$ од елементите $a, b, c, d$.

Ќе кажеме дека едно множество е дадено (познато) ако се знае точно кои се неговите елементи или ако е познато правилото по кое би можеле да утврдиме дали еден елемент му припаѓа или не.

На пример: $M=\{1,4,9\}$ или $M=\{x \mid x=n^2$ за $n=1,2,3\}$ или поопшто $M=\{x \mid x$ со особина A$\}$.

Ако сакаме да назначиме дека елементот $a$ му припаѓа на множеството $A$, ќе го употребиме знакот $\in$, имено $a \in A$, (се чита: елементот $a$ му припаѓа на множеството $A$). Спротивниот исказ на претходниот го означуваме симболички со знакот $\notin$ , т.е. $a \notin A$, означува дека $a$ не е елемент на множеството $A$.

*За **две множества** A и B велиме дека се **еднакви** и пишуваме A=B ако сите елементи од множеството A се елементи на множеството B и обратно.*

За ***две множества*** *велиме* ***не се еднакви*** *и пишуваме $A \neq B$ ако постои барем еден елемент од A koj не припаѓа на B или обратно.*

На пример: множествата $\{ a, b, c \}$, $\{ b, a, c \}$ и $\{ a, c, a, b \}$ меѓу себе се еднакви.

Од изнесената дефиниција за еднаквост следува дека не е важен редот на елементите по кој тие се запишани во заградите, ниту пак е важно колку пати еден од елементите е приброен кон даденото множество. Ние обично секој елемент само по еднаш ќе го прибbooиме кон множеството на кое тој му припаѓа. Со тоа може да биде дефиниран поимот број на елементи од едно множество.

*Мнжеството што не содржи ниту еден елемент се вика* ***празно множество*** *и симболично се означува со знакот* $\emptyset$.

Како пример за празно множество може да ни послужи множеството од реални корени на квадратната равенка $x^2+1=0$. Ова множество е празно, бидејки не постои реален број $x$ што ја задоволува оваа равенка.

*Ако меѓу елементите на две множества е воспоставена таква врска што на секој елемент од едното множество да му е придружен еден и само еден елемент од другото множество, и обратно, на секој елемент од другото множество да му е придружен еден и само еден елемент од првото множество, тогаш велиме дека меѓу тие две множества постои* ***заемно еднозначно придружување*** *или* ***заемно еднозначна кореспонденција.***

Множеството $X$ се вика ***множество*** што се состои ***од n елементи***, $n \in N$ ($N$ – множество од природни броеви), ако постои заемно еднозначно придружување од множеството $X$ на множеството $\{1,2, \dots , n \}$.

*Ако постои природен број n таков, што меѓу множеството A и множеството* $\{1,2, \dots , n \}$ *може да се воспостави заемно-еднозначна кореспонденција, тогаш велиме дека A* е ***конечно множество***.

Ако множеството $A$ не е конечно множество, тогаш велиме дека е ***бесконечно множество***.

*Ако A и B се две дадени множества и ако секој елемент од множеството A е елемент од множеството B, тогаш множеството A се вика* ***подмножество*** *од множеството B и се означува со* $A \subseteq B$, односно:

$$(a \in A \Rightarrow a \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B. \qquad (1)$$

Ако $A$ не е подмножество од $B$, пишуваме $A \quad \subseteq B$.

Од дефиницијата за подмножества следува $\emptyset \subseteq A$ и $A \subseteq A$.

Од дефиницијата за подмножество и од дефиницијата за еднаквост на две множества следува:

$$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)) \Leftrightarrow A = B. \tag{2}$$

За множеството $A$ велиме дека е ***вистинско подмножество*** од множеството $B$ ако постои барем еден елемент од $B$ кој не припаѓа на $A$. Тоа го означуваме со $A \subset B$, односно:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\ b \in B, b \notin A) \wedge A \subseteq B.$$

Во спротивен случај пишуваме $A \not\subset B$. Празното множество е вистинско подмножество од секое непразно множество $A$, т.е. $\emptyset \subset A$.

Две множества $A$ и $B$ ги викаме ***еквивалентни множества*** ако меѓу нив постои заемно еднозначна кореспонденција. Тоа се означува со $A \sim B$ и се чита: "$A$ е еквивалентно со $B$".

*Две еднакви множества се секогаш еквивалентни, но обратното не важи. Две еквивалентни множества немора да се еднакви.*

Ако две конечни множества се еквивалентни, викаме дека имаат ист број елементи.

**Пример 1.** *Дадени се множествата* $A=\{a, b, c\}$ и $B=\{1,2,3\}$.

Тие се еквивалентни бидејќи меѓу нивните елементи може да се воспостави заемно еднозначно придружување, т.е.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, dash] & b \arrow[d, dash] & c \arrow[d, dash] \\ 1 & 2 & 3 \end{tikzcd}$$

Ќе го наведеме уште и тоа дека ако $A \sim B$, тогаш и $B \sim A$, што произлегува од фактот дека ова придружување постои и во двете насоки.

Понекогаш се разгледуваат множества чии елементи се множества.

На пример: $M=\{\{1, 2\},\{4, 5, 7\}, 3, 5\}$, па имаме елемент множество $\{1, 2\} \in M$ и подмножество $\{3, 5\} \subset M$.

За да се избегне терминот множество од множества, како синоним ќе го користиме терминот ***фамилија множества.***

Нека е дадено множеството $A$. Со $P(A)$ ќе ја означиме фамилијата од сите подмножества на множеството $A$ и ќе го викаме ***партитивно множество.***

**Пример 2.** Партитивно множество на множеството $A=\{a,b,c\}$ е

$$P(A) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}.$$

Како погодна интерпретација на множества корисно е да се споменат ***Веновите дијаграми***, при што елементите од едно множество се интерпретираат како точки, па соодветно множество би било претставено како множество од точки.

**Пример 3.** *Дадени се множествата*:

$A=\{x \mid x$ природен број$\}$,

$B=\{x \mid x$ парен природен број$\}$,

$C=\{x \mid x$ природен број делив со 6$\}$,

$D=\{4,10,14,16,22\}$.

*Да се определи нивната заемна врска и да се претставаат множествата со помош на Веновите дијаграми.*

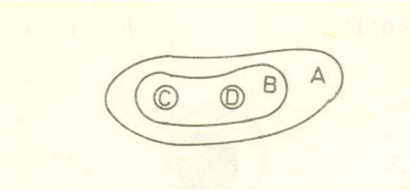
Веднаш се забележува дека се:

$B\subset A$, $C\subset A$,

$C\subset B$, $D\subset A$,

$D\subset B$, $D\not\subset C$,

што е графички прикажано на црт.1.1.



Црт. 1.1

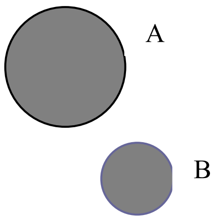
## 2. 2. Операции со множества

**$1^0$ *Унија на множества.*** *Множеството чии елементи припаѓаат барем на едно од множествата A и B се вика унија (сума) од множествата A и B.*

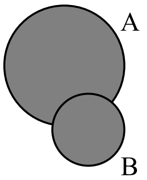
Унијата се означува со $A\cup B$ и се чита: $A$ унија $B$).

Ако $x\in A\cup B$ (елементот $x$ и припаѓа на унијата од множествата $A$ и $B$), значи дека $x\in A$ или $x\in B$, но не се исклучува можноста дека $x$ им припаѓа на двете множества, односно:

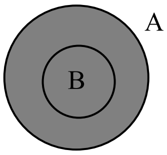
$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow ((x\in A) \vee (x\in B)). \quad (3)$$



Црт. 1. 2.



Црт. 1. 3.



Црт. 1. 4.

На цртежите 1.2, 1.3, 1.4 за множествата *A* и *B*, во разни соодноси унијата е исенчена.

**Пример 1.** *За множествата*

$$A=\{a, b, c, d\},\quad B=\{a, b, e\} \quad \text{и} \quad C=\{a, f\}$$

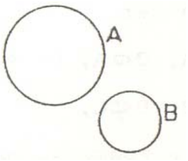
*униите на две по две множества соодветно се*:

$$A\cup B=\{a,b,c,d,e\},\quad A\cup C=\{a,b,c, d, f\},\quad B\cup C=\{a,b,e, f\}.$$

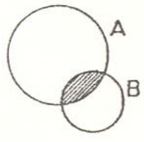
$2^0$ ***Пресек на множества.*** *Множеството што се состои од елементите што припаѓаат и на двете множества A и B се вика* ***пресек на множествата*** *A* ***и*** *B.* Се означува со $A\cap B$ (се чита: *A* пресек *B*).

Ако $x\in A\cap B$ (елементот *x* му припаѓа на пресекот од множествата *A* и *B*), значи дека $x\in A$ и $x\in B$, односно:

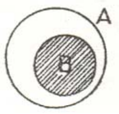
$$(x\in A\cap B) \Leftrightarrow ( (x\in A) \wedge (x\in B)). \qquad (4)$$



Црт. 1 5.



Црт. 1.6.



Црт. 1.7.

Ако множествата *A* и *B* немаат заеднички елементи, тогаш $A\cap B$ е множество без елементи, ($A\cap B = \emptyset$). Тие две множества велиме дека се ***дисјунктни.***

На цртежите 1.5, 1.6, 1.7 за множествата *A* и *B* во разни соодноси пресекот е исенчен.

**Пример 2.** *Нека се дадени множествата*:

$$A=\{a,b,c,d\},\quad B=\{b,a,e\}\ \text{и}\ C=\{a,f\}$$

тогаш

$$A\cap B=\{a,b\},\quad A\cap C=\{a\},\quad B\cap C=\{a\}.$$

### $3^0$ *Основни својства на операциите унија и пресек*

За наведените операции со множества важат следниве закони:

**1.** $A\cap B=B\cap A$ (*комутативен закон за пресек*),

**2.** $A\cup B=B\cup A$ (*комутативен закон за унија*),

**3.** $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (*асоцијативен закон за пресек*),

**4.** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (*асоцијативен закон за унија*),

**5.** $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cap C)$ (*дистрибутивен закон на унија спрема пресекот*),

**6.** $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ (*дистрибутивен закон на пресек спрема унијата*).

Особините **1**, **2**, **3** и **4** директно следуваат од дефинциите на унија и пресек.

Особината **6** ќе ја докажеме, а особината **5** се докажува аналогно.

Нека левата страна од особината **6** ја обележиме со $L$, а десната страна со $D$. Ако покажеме дека $L\subseteq D$ и $D\subseteq L$ според (2) тогаш сме докажале дека $L=D$, а со тоа и особината **6.**

Ако

$$x\in L=(A\cup B)\cap C\Rightarrow(x\in A\cup B)\wedge(x\in C)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in C)\Rightarrow(x\in A\wedge x\in C)\vee(x\in B\wedge x\in C)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x\in A\cap C)\vee(x\in B\cap C)\Rightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in D,$$

сме покажале $L\subseteq D$.

Ако, пак , сега

$$x\in D=(A\cap C)\cup(B\cap C)\Rightarrow(x\in A\cap C)\vee(x\in B\cap C)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x\in A\wedge x\in C)\vee(x\in B\wedge x\in C)\Rightarrow(x\in(A\cup B))\wedge(x\in C)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x\in(A\cup B)\cap \mathrm{C})=L,$$

сме покажале $D \subseteq L$, од каде и од претходното следува $L=D$.

Очигледно е како може да се дефинира унија и пресек од конечен број множества.

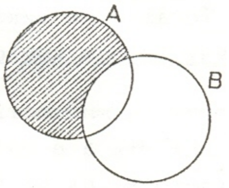
### $4^0$ *Разлика на множества.*

*Од множествата А и В може да се формира множество од елементите што му припаѓаат на множеството А и не му припаѓаат на множеството В. Ова множество се вика* ***разлика од множествата*** *А и В и се означува со* $A \backslash B$ (се чита: $A$ минус $B$).

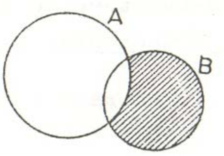
Според тоа,

$$(x \in A \setminus B\ ) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B).$$

Графички разликата на множествата $A$ и $B$ е прикажана на црт. 1.8, а разликата $B \setminus A$ на црт.1.9 (исенчениот дел).



Црт. 1.8.



Црт. 1.9.

Ако $A \subseteq M$, тогаш разликата $M \setminus A$ ја означуваме со $A_M^{'}$ и ја викаме ***комплемент на*** *А* ***во*** *М*, и го означуваме: $A_M^{'} = M \setminus A$. Ако множеството $M$ е фиксно, тогаш комплементот на $A$ во $M$ го бележиме со $A'$.

За операцијата разлика на множества важат особините:

**1.** $(A')' = A$,

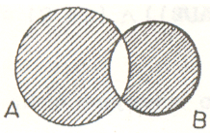
**2.** $(A \cup B)' = A' \cap B'$,

**3.** $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

### $5^0$ *Симетрична разлика*

***Симетрична разлика*** *на множествата А и В се вика множеството што е унија од разликите А \ В и В \ А на множествата А и В. Се означува со* $A \Delta B$ (*се чита*: *А симетрична разлика В*),

$$A \Delta B = (\ A \backslash B \cup B \backslash A).$$



Графички симетричната разлика е претставена на црт. 1.10.

Од самата дефиниција следува:

$$A \Delta B = B \Delta A.$$

Црт. 1.10.

## $6^0$ ***Декартов производ***

При воведувањето на поимот множество рековме дека редот на елементите во множеството не е важен. Меѓутоа, некогаш е потребно да се разгледуваат множества од два елемента, каде што редот на елементите е битен, на пример, во аналитичката геометрија во рамнина, координатите $(x,y)$ на една точка претставуваат подреден пар броеви. Точката (2,5) е различна од точката (5,2) иако множествата $\{2,5\}$ и $\{5,2\}$ се еднакви множества.

Кога сакаме да укажеме дека еден пар броеви $a$ и $b$ е подреден, го запишуваме во облик $(a,b)$. Тогаш $a$ се вика ***прв елемент*** (***прва компонента***) и $b$ ***втор елемент*** (***втора компонента***).

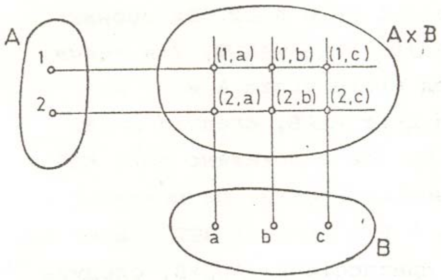
*Ако* $A$ *и* $B$ *се дадени множества, тогаш за множеството чии елементи се подредени парови* $(a,b)$, *при што* $a$ *е елемент од множеството* $A$, *а* $b$ *елемент од множеството* $B$, *се вели дека претставува* ***Декартов производ на множествата*** $A$ ***и*** $B$ *и се означува* $A \times B$ (се чита: $A$ по $B$ ). Значи,

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

На пример, за множествата $A = \{1,2\}$ и $B = \{a,b,c\}$, декартовиот производ е

$$A \times B = \{(1,a); (1,b); (1,c); (2,a); (2,b); (2,c)\}.$$

Тоа можеме да го илустрираме на следниов начин:



Од самата дефиниција на Декартовиот производ е јасно дека редоследот на множествата во тој производ е многу важен. Во наведениот пример може да се види дека

$$A \times B \neq B \times A.$$

*Ако некое од множествата А и В е празно множество, тогаш* по дефиниција земаме *и нивниот производ да е празно множество.*

***Два елемента*** $(a_1, b_1)$ ***и*** $(a_2, b_2)$ ***се еднакви*** *ако и само ако се еднакви меѓу себе соодветните компоненти,* т.е.

$$(a_1,b_1) = (a_2,b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2.$$

Поимот Декартов производ може на очевиден начин да се воопшти на случај од произволен конечен број множества. Ние ќе се задржиме само уште на три множества.

Имено, ***Декартов производ на три множествата*** $A$, $B$, $C$ *е множеството од сите подредени тројки* $(a,b,c)$, *каде* $a\in A$, $b\in B$ *и* $c\in C$ и го означуваме $A\times B\times C$, т.е.

$$A\times B\times C=\{(a,b,c)|\ a\in A,\ b\in B, c\in C\}.$$

## Задачи за вежбање

**1.** Да се напишат сите елементи на множеството:

**а)** од сите делители на бројот 48;

**б)** од сите збирови на точките што можат да се појават при фрлањето на две коцки за играње.

Одг.: **а)** 2,3,4,6,8,12,16,24;

**б)** 2,3, 4, 5, 6, 7, … , 12.

**2.** Дадени се множествата:

$$A = \{a,b,c\} \quad B = \{p,q,r\}.$$

Да се определат множествата:

$$A\cup B,\ A\cap B,\ A\setminus B,\ B\setminus A,\ A\times A,\ A\times B,\ B\times B.$$

**3.** Да се покаже дека важи:

**а)** $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B = B$;

**б)** $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B = A$.

**Доказ: а)** Прво ќе претпоставиме дека $A\subseteq B$. Од дефиницијата за унија јасно е дека $B\subseteq A\cup B$. Нека $x\in A\cup B$. Тоа значи дека $x$ припаѓа барем на едно од множествата $A$ и $B$. Ако $x\in A$ , тогаш според претпоставката дека $A\subseteq B$, следува дека $x\in B$, т.е. во секој случај $x\in B$.

Со тоа, докажано е дека $A\cup B\subseteq B$, што заедно со $B\subseteq A\cup B$ го дава равенството $A\cup B=B$.

Да покажеме дека важи и обратното, т.е. дека од $A\cup B=B$ следува $A\subseteq B$. Навистина, нека $x\in A$, тогаш $x\in A\cup B$, а од попретпоставката $A\cup B=B$, следува дека $x\in B$. Со тоа докажавме $A\subseteq B$.

На сличен начин се докажува и особината **б)**.

**4.** Да се покаже дека:

**а)** $A\subseteq B \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$,

**б)** $A\subseteq B \wedge B\subset C \Rightarrow A\subset C$,

**в)** $A\subset B \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\subset C$.

**5.** Да се покаже дека се точни особините:

**а)** $A,B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$;

**б)** $A\subseteq B \wedge A \subseteq C \Rightarrow A\subseteq B \cap C$;

**в)** $A \cup (A\cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$;

**г)** $A \cup C = B \cup C$ и $A \cap C= B \cap C \Rightarrow A = B$.

**6.** Нека е дадено множеството $M$ и нека $A$ и $B$ се произволни подмножества од $M$. Тогаш точни се особините:

**а)** $A \cup A' = M, \quad A \cap A' = \emptyset$;

**б)** $(A\cup B)' = A' \cap B', \quad (A\cap B)' = A' \cup B'$;

**в)** $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$;

**г)** $(A\backslash B)' = A' \cup B$.

**Доказ: а)** Точноста на особините следува од дефиницијата за комплемент.

**б)** Поради сличност ќе го докжеме првото од равенствата.

Нека $x\in(A\cup B)'$. Тоа значи дека $x\in M$ и $x\notin A\cup B$ , т.е. $x\notin A$ и $x\notin B$. Според тоа, добиваме дека $x\in M\backslash A=A'$ и $x\in M\backslash B=B'$ па $x\in A'\cap B'$. Со тоа е покажано дека $(A\cup B)' \subseteq A'\cap B'$.

Обратно, ако $y\in A'\cap B'$, добиваме дека $y\notin A$ и $y\notin B$, т.е. $y\notin A\cup B$. Според тоа, $y\in M \setminus (A\cup B) = (A\cup B)'$ па $A'\cap B' \subseteq (A\cup B)'$ .

Аналогно се изведуваат доказите под **в)** и **г)** .

**7.** Да се докаже дека:

**а)** $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

**б)** $A \times (A \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

**8.** Дали е точна особината

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$? Одг.: да.

**9.** Да се определи $P(A)$ ако $A$ е множество од сите природни броеви помали од 50, кои се квадрати од некои природни броеви.

**10.** Да се определи $B \times A \times B$ ако $A = \{a,b,c\}$, $B = \{x,y\}$ .

**11.** Нека $A$, $B$ и $C$ се произволни множества. Покажете го следното равенство:

$$(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C).$$

**12.** Да се докаже точноста на следнава релација:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

**13.** Да се докаже:

**а)** $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$; (Деморганови ставови)

**б)** $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$; – " –

**в)** $A \cap (A \Delta B) = A \Delta (A \cap B)$.

**14.** Во Декартов координатен систем да се исшрафира областа:

**а)** $A = \{(x,y) \mid y^2 < x)\} \cap \{(x,y) \mid x^2+y^2 > 1\}$,

**б)** $B = \{(x,y) \mid y^3 < x)\} \cap \{(x,y) \mid x < y^2 \}$.

**15.** Определи го множеството $C = A \cap B$, при што се:

$$A = \{x \mid x=3n-7 \wedge n<6, n \in N\}$$

$$B = \{x \mid x=2n+5 \wedge n \leq 3, n \in N\}$$

Одг.: $C = \{11\}$.

**16.** Да се определат елементите на множествата:

$A = \{x \mid x \in R \wedge (x^2 = 9 \vee 2x = 4)\}$; Одг.: $A = \{2,3,-3\}$.

$B = \{x \mid x \in R \wedge x \neq x\}$; Одг.: $B = \emptyset$.

$C = \{x \mid x \in R \wedge x+8=8\}$. Одг.: $C = \{0\}$.

## 3. РЕАЛНИ БРОЕВИ

За нас ќе бидат од интерес оние множества чии елементи се броеви, точки, функции, интервали, криви, површини.

Множеството на реалните броеви со право може да се смета за најважно во математиката, бидејки изучувањето на основните поими од анализата, како што се, на пример: конвергенција, непрекинатост, диференцирање, интегрирање итн., се базираат на точното определување на тие броеви. Тоа множество може да биде постапно конструирано ако се тргне од множеството на природните броеви. Овде ќе дадеме само краток преглед на множествата од броеви и законите на основните операции со нив.

### 3. 1. Множество на природни броеви

*Броевите*

$$1, 2, 3, \ldots$$

*се викаат* ***природни броеви.*** Множеството на природните броеви ќе го озничиме со $N$, значи $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Множеството $N$ е бесконечно.

Структурата на множеството $N$ од природните броеви може да се окарактеризира со таканаречените Пеанови аксиоми (1889) (G. Peano: 1858–1921).

**I.** 1 *е природен број.*

**II.** *Секој природен број* $a$ *има точно само еден следбеник* $a^+$ *во множеството на природните броеви*

**III.** *Секогаш е* $a^+ \neq 1$, *т.е.* 1 *не е следбеник на ниеден природен број.*

IV. *Од* $a^+ = b^+$ *следува* $a = b$, *т.е. природен број може да биде следбеник само на еден или ниеден природен број.*

**V.** ***Аксиома на математичка индукција.*** *Секое подмножество* $S$ *од природни броеви, кое го содржи бројот* 1 *и следбеникот на секој свој елемент, ги содржи сите природни броеви, т.е.* $S = N$.

Со помош на Пеанови аксиоми може да се докажат сите својства на природните броеви, како и својствата на операциите со природните броеви. Ние овде нема да се задржиме на тие докази.

На аксиомата V се базира постапката при докажување на некои теореми, која се вика ***принцип на целосна математичка индукција.***

Ако во формулацијата на некоја теорема се појавува природниот број $n$ и ако треба да се докажува дека теоремата важи за секој природен број, тогаш прво се докажува дека теоремата важи за природниот број 1, а потоа од претпоставката дека важи за природниот број $n$ се докажува дека важи и за природниот број $n+1$. Во тој случај се заклучува дека теоремата важи за секој природен број.

Од многуте својства на природните броеви ќе спомeнеме само некои.

Помеѓу два природни броја $n$ и $n+p$, каде $p\in N$ постојат $p-1$ природни броеви. Ако $p=1$, тогаш $p-1=0$, т.е. помеѓу $n$ и $n+1$ нема природни броеви; $n$ и $n+1$ се два *сукцесивни природни броја. Значи, помеѓу два природни броја, кои не се сукцесивни, постојат конечно многу природни броеви.*

Природните броеви може да бидат *парни* или *непарни* Парните броеви ги означуваме со $2n$, а непарните со $2n-1$ (или со $2n+1$), каде $n\in N$.

Природниот број е *прост број* ако е делив само сам со себе и со единица, во спротивно е *сложен број.*

**Пример:** Прости броеви се 2, 3, 5, 7, 11, 13, … , а сложени се 4, 6, 8, 9, 10, 12, … .

За два броја велиме дека се *релативно прости* ако само единицата им е заеднички делител, во спротивно тие не се релативно прости.

*Ако*

$$n, m \in N \Rightarrow n+m \in N \text{ и } n\cdot m \in N,$$

*т.е. сумата (збирот) и производот на два природни броја е природен број. Тоа значи дека множеството на природните броеви е затворено во однос на операциите собирање и множење.* Тоа не е случај со операциите вадење и делење.

*Ако* $n, m \in N$, *тогаш*

$$n-m \in N \text{ само ако } n>m, \text{ а}$$

$$\frac{n}{m} \in N \text{ само ако } n \text{ е делив со } m.$$

Операцијата вадење нé присилува да ги воведеме нулата и негативните броеви, а делењето да ги воведеме дропките Потребата од такво проширување на множеството броеви се појавува, исто така, при мерењето на некои геометриски и физички големини.

## 3. 2. Множество на цели броеви

Множеството на цели броеви

$$\{\, \dots , -n,\ \dots,\ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots , n, \dots \,\}$$

кратко го обележуваме со $Z$. Множеството на целите броеви $Z$ е бесконечно множество.

Операциите собирање, вадење и множење може неограничено да се изведуваат во множеството $Z$.

Ако $a \in Z$, очигледно е дека $a$ и $a+1$ се два сукцесивни елемента на множеството $Z$. Исто така, очигледно е дека меѓу два елемента од множеството $Z$, кои не се сукцесивни, се наоѓаат конечно многу елементи од истото множество.

Природните броеви ги викаме и цели позитивни броеви и во тој случај пишуваме $N= Z^+$; ако ставиме

$$Z^- = \{\, \dots , -n,\ \dots,\ -3, -2, -1\}$$

имаме

$$Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}.$$

## 3. 3 Множество на рационални броеви

Нека се

$$p,\, q \in Z, \text{ каде што } q \neq 0.$$

Да се подели $p$ со $q$ значи да се најде трет број $x$, така што да биде

$$q \cdot x = p.$$

Бројот $x$ еднозначно постои во множеството $Z$ само ако $p$ е содржател на бројот $q$, т.е. ако $p=mq$, каде $m \in Z$. Во спротивно бројот $x$ не постои во множеството $Z$, затоа сме присилени да воведеме броеви од вид $\dfrac{p}{q}$, т.е. дропки. Секој број од облик $\dfrac{p}{q}$, каде $p$, $q \in Z$, $q \neq 0$, го викаме ***рационален број***.

Множеството од сите рационални броеви го означуваме со Q. Секој цел број $a$ е рационален број, зашто може да се претстави во облик $\frac{a}{1}$, каде што $a\in Z$. Според тоа, множеството на рационалните броеви го сочинуваат: сите позитивни и негативни цели броеви, нулата и сите позитивни и негативни дропки. Бидејки секоја дропка може да се напише во облик на конечна или бесконечна децимална периодична дропка, можеме да кажеме дека множеството на рационалните броеви го сочинуваат: сите цели броеви, нулата, сите конечни и сите бесконечни периодични децимални дропки.

Ако е $q=0$, а $p\neq 0$, тогаш не постои број $x$ кој би ја задоволил равенката $qx=p$, т.е. нема смисла да се дели со број кој е нула. Ако е $q=0$ и $p=0$, тогаш равенката $qx=p$ ќе биде задоволена со кој и да е број, тоа значи дека делењето на 0 со 0 е неопределено.

*Во множеството на рационалните броеви неограничено се изводливи операциите собирање, вадење, множење и делење, со исклучок на делење со нула.* Затоа спомнатите операции се викаат ***рационални операции***.

Ќе покажеме дека ***множеството на рационални броеви насекаде е густо***, т.е. меѓу кои и да било два рационални броја $a$ и $b$ ($a<b$) може да се најде барем еден рационален број, а според тоа и бесконечно многу рационални броеви.

Навистина, ако на двете страни од неравенството $a<b$ прво додадеме $a$, а потоа $b$ ги добиваме соодвено неравенствата:

$$a+a < a+b, \qquad a+b < b+b,$$

$$2a < a+b, \qquad a+b < 2b,$$

$$a < \frac{a+b}{2}; \qquad \frac{a+b}{2} < b.$$

Од овие две неравенства следува:

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

Значи, меѓу двата рационални броја $a$ и $b$ има рационален број $a_1 = \frac{a+b}{2}$, така што

$$a < a_1 < b.$$

На ист начин, како и во претходниот случај се добива:

$$a < \frac{a+a_1}{2} < a_1. \quad \text{и} \quad a_1 < \frac{a_1+b}{2} < b,$$

или

$$a < a_2 < a_1 \quad \text{и} \quad a_1 < b_1 < b,$$

каде што

$$a_2 = \frac{a+a_1}{2}, \quad b_1 = \frac{a_1+b}{2},$$

т.е.

$$a < a_2 < a_1 < b_1 < b.$$

Истата постапка може да се примени неограничено многу пати и така да се добиваат неограничено многу рационални броеви кои што се помали од бројот $b$, а поголеми од бројот $a$. Со тоа го докажавме споменатото тврдење.

Врз основа на ова докажано тврдење, следува дека *во множеството рационални броеви не постојат два сукцесивни броја.*

## 3. 4. Множество на ирационални броеви

Броевите, обично, се користат за мерење на различни големини, на пример, за мерење на отсечки. Еден едноставен проблем за измерување во елементарната геометрија покажал дека за негово решавање не се доволни рационалните броеви. Станува збор за мерниот број на дијагоналата на квадратот.

Ако земеме квадрат со страна чија должина е 1, тогаш за должината на неговата дијагонала $d$ имаме $d^2=2$, т.е. $d = \sqrt{2}$. Ќе покажеме дека не постои рационален број чиј што квадрат е 2.

Да претпоставиме спротивно, т.е. дека

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \tag{1}$$

и дека $p$ и $q$ се релативно прости (во спротивно можеме да ја скратиме дропката). Од претпоставената релација слеува:

$$p^2=2q^2,$$

а од оваа релација следува дека $p$ е парен број, т.е. дека $p$=2$k$, каде $k\in N$, па затоа

$$4k^2 = 2q^2$$

или

$$q^2 = 2k^2.$$

Од последната релација следува дека $q$ е парен број, т.е. $q$=2$m$, каде $m\in N$. Така $p$ и $q$ имаат заеднички делител 2, што е спротивно со претпоставката дека $p$ и $q$ се релативно прости броеви. Затоа претпоставената релација (1) мора да отпадне и да остане

$$\sqrt{2} \neq \frac{p}{q} \quad \text{или} \quad \sqrt{2} \notin Q.$$

Со цел да може секоја отсечка да се измери и да се изведуваат операциите степенување со рационален степенов показател, логатитмување и решавање на некои алгебарски равенки, нужно е множеството $Q$ од рационални броеви да се прошири, т.е. да се воведат ирационалните броеви. Секој број што не е рационален викаме дека е ирационален, т.е. секој број што не може да се претстави во облик $\frac{p}{q}$, каде $p$, $q\in Z$ и $q \neq 0$ е ирационален број. Секој ирационален број може да се претстави во облик на бесконечна непериодична децимална дропка ($\sqrt{2}$=1,4142 … ; $\pi$ = 3,1415 … ). Множеството на ирационалните броеви го означуваме со $I$.

## 3. 5. Својства на реалните броеви

Множеството на сите рационални и ирационални броеви го викаме множество на реалните броеви и го означуваме со $R$.

Во множеството на реалните броеви неограничено може да се изведуваат операциите: собирање, вадење, множење и делење, со исклучок, делење со нула.

Ќе изнесеме некои основни својства што важат во множеството на реалните броеви, познати од елементарната математика.

### $1^0$ *Својство на подредување*

Множеството на реалните броеви е *подредено множество*. Меѓу кои и да било два реални броја $a$ и $b$ секогаш постои само една од следниве релации:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b,$$

притоа, викаме дека за реалните броеви важи *законот за трихотомија.*

Исто така и во множеството на природни, цели, рационални и ирационални броеви важи законот за трихотомија.

Ако

$$a < b \ \wedge \ b < c \ \Rightarrow \ a < c,$$

ова својство се вика *транзитивност на релацијата за подредување* $<$ .

Со помош на релацијата $<$ може да се определи и друга релација $\leq$ на следниов начин:

$$a \leq b \ \Leftrightarrow \ (a<b \ \vee \ a=b),$$

(т.е. $a$ не е поголемо од $b$).

Релацијата $<$ ќе ја викаме *релација за стриктно подредување на* $R$, а релацијата $\leq$ *релација за поредување на* $R$.

Релацијата $\leq$ ги има следниве особини:

**1)** $\forall \ a \in R, \ a \leq a$ (*рефлексивност*),

**2)** $a \leq b \ \wedge \ b \leq a \ \Rightarrow \ a = b$ (*антисиметричност*),

**3)** $a \leq b \wedge \ b \leq c \ \Rightarrow \ a \leq c$ (*транзитивност*).

### $2^0$ *Својства на опрацијата собирање*

За секои два реални броја $a$ и $b$, секогаш како збир на овие два броја постои само еден број, кој се обележува со $a+b$.

Ќе изнесеме некои основни својства за операцијата собирање кои ни се добро познати.

**$2_1$.** *Комутативен закон.* За секои два броја $a$ и $b$ точно е

$$a + b = b + a.$$

**$2_2$.** *Асоцијативен закон.* За секои три броја $a$, $b$ и $c$ важи

$$(a+b) + c = a + (b+c).$$

**$2_3$.** *Неутрален елемент.* Постои број означен со 0 и наречен *нула*, таков што за секое $a \in R$

$$a + 0 = a.$$

⌜**Последица 1**. Бројот што го има својството на нулата е единствен.

Навистина, да претпоставиме дека постојат две нули, 0 и 0', такви што 0+0'=0 и 0'+0=0'. Од особината **$2_1$** следува, левите страни од овие две равенства се еднакви, па еднакви се и десните, т.е. 0=0'.⌟

**$2_4$.** *Спротивен елемент.* За секој број $a \in R$, постои број означен со $-a$, $-a \in R$ и наречен спротивен на $a$, таков што

$$a + (-a) = 0.$$

⌜**Последица 2**. Број спротивен на дадениот е единствен.

Да претпоставиме дека бројот $a$ има два спротивни броја $b$ и $c$, такви што $a+b=0$ и $a+c=0$. Од првото од овие равенства следува $0+c = (a+b)+c = c$, т.е.

$$b = 0+b = (a+c)+b = a+(c+b) = a+(b+c) = (a+b)+c = 0+c = c.$$

**Последица 3**. За секој број $a$

$$-(-a) = a.$$ ⌟

Врската меѓу операцијата собирање и релацијата за подредување на $R$ е определена со следнава особина:

**$2_5$.** Ако е $a<b$, тогаш за секој број $c$

$$a+c < b+c \qquad (\textit{закон за монотонија}).$$

За секои два реални броја $a$ и $b$ равенката $a+x=b$ има решение $x=b+(-a)$ што е еднозначно определено, $x$ е разлика на броевите $b$ и $a$ и се означува со $b-a$.

⌜Особините од **$2_1$** до **$2_4$** покажуваат дека множеството на реалните броеви во однос на операцијата собирање е комутативна (Абелова ) група. Исто така, и множеството на целите и рационалните броеви се Абелови групи во однос на собирање.

За множеството $M$ велиме дека има структура на група во однос на операцијата собирање ( или некоја друга операција) ако за кои и да било елементи $a$, $b$ и $c$ од тоа множество важи:

**1.** асоцијативен закон

$$a+(b+c) \ = \ (a+b)+c;$$

**2.** постои неутрален елемент 0

$$a+0 \ = \ 0+a \ = \ 0;$$

**3.** за секој елемент $a$ постои *инверзен елемент* на $a$, $-a$, кој припаѓа на $M$, т.е.

$$a+(-a) = (-a)+a = 0.$$

(Доколку за таа операција важи и комутативен закон

**4.** $a+b = b+a,$

тогаш за множестото $M$ велиме дека е *комутативна* или *Абелова група* во однос на таа операција).⌋

### $3^0$ *Својства на операцијата множење*

За два реални броја $a$ и $b$ секогаш како производ на овие броеви постои само еден реален број, кој се обележува со $ab$. Производот на реалните броеви ги има следниве основни својства:

**$3_1$.** *Комутативен закон.* За секои два броја $a$ и $b$

$$ab = ba;$$

**$3_2$.** *Асоцијативен закон.* За секои три броја $a$, $b$ и $c$

$$a(bc) = (ab)c;$$

**$3_3$.** *Неутрален елемент.* Постои број, означен со 1, $1 \in R$, кој се вика *единица* (*неутрален елемент*), таков што $1 \neq 0$ и за секој $a$

$$a \cdot 1 = a;$$

**$3_4$.** *Инверзен елемент.* За секој број $a \neq 0$, постои единствен број означен со $\frac{1}{a}$, наречен инверзен на дадениот, таков што

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Врската помеѓу релацијата за подредување и операцијата множење во $R$ е определена со следнава особина:

**З₅.** *Ако* $a < b$ *и* $c>0$, *шоѓаш* $ac < bc$ (закон за монотонија). *Ако йак* $c<0$, *шоѓаш* $ac > bc$.

⌈Како и при собирањето од овие наброени особини може да се добијат интересни последици, како: единицата и инверзниот елемент за $\forall a \neq 0$ се еднозначно определени. ⌋

За секои $a,b \in R$, при што $a \neq 0$, равенката $ax=b$ е еднозначно решлива во $R$; решението $x=b\cdot\frac{1}{a}$, односно, како што е вообичаено, се означува со $\frac{b}{a}$, и ќе го викаме количник на $b$ со $a$.

⌈Множеството на реалните броеви во однос на операцијата множење не е група, затоа што елементот $0 \in R$ нема инверзен. Но, ако го земеме множеството $R^{*}=R \setminus \{0\}$, тогаш множеството е комутативна група во однос на оерацијата множење (Абелова мултипликативна група). ⌋

### $4^0$ *Врска меѓу ойерациише собирање и множење*

Разгледувањето на множеството од реални броеви $R$ како множество со две операции има смисла само ако меѓу операциите постои некоја врска. Таа е определена на следниов начин:

За секои три броја $a$, $b$ и $c$ важи:

$$a(b+c) = ab + ac$$

што е *дисшрибушивен закон на множењешо во однос на собирањешо.*

Со оглед на комутативноста на операциите собирање и множење, од оваа особина следува дека важи и особината:

$$(a+b)c = ac + bc.$$

⌈**Последица.** За секои три броја $a$, $b$ и $c$ од $R$ важи

$$a(b-c) = ab - ac.$$

Навистина,

$$a(b-c) = a(b-c) + ac - ac = a(b-c+c) - ac = ab - ac.$$

Множествата на рационалните и раелните броеви по однос на операциите собирање и множење ги викаме соодветно поле на рационални и поле на реални броеви.

За едно множество $M$ велиме дека е поле во однос на операциите собирање и множење (или некои други две операции), ако:

**$1^0$** множеството $M$ е комутативна група во однос на операцијата собирање;

**$2^0$** множеството $M^*=M\backslash\{0\}$ (0–неутрален елемент за собирање) е комутативна група во однос на операцијата множење;

**$3^0$** операцијата множење е дистрибутивна во однос на операцијата собирање, т.е. за кои и да било $a, b, c\in M$ важи идентитетот

$$a(b+c) = ab + ac.$$ ⌋

### ⌈ $5^0$ *Архимедова аксиома*

*За секој реален број* $a$ *постои природен број* $n$ *таков, што* $n > a$.

Од оваа аксиома следува, *ако* $a$ *и* $b$ *се кои и да било позитивни реални броеви*, $0<a<b$, *тогаш постои природен број* $n$ *таков, што* $na>b$, т.е. собирајќи го бројот $a$ доволен број пати, секако дека тој ќе го надмине бројот $b$.

Навистина, бидејќи $a\neq 0$, постои количник $\frac{b}{a}$, за кого, според искажаната аксиома, може да се најде природен број $n > \frac{b}{a}$, од каде што следува $na > b$.

Ова својство ја има геометриската интерпретација: ако имаме две отсечки со должина $a$ и $b$, тогаш нанесувајќи ја помалата отсечка на поголемата по конечен број нанесувања ќе излезе од границите на поголемата отсечка. ⌋

### ⌈ $6^0$ *Својство на непрекинатост на реалните броеви*

Сите наброени својства за подреденост, собирање, множење и Архимедовата аксиома ги има и множеството на рационалните броеви. Множеството на реалните броеви има уште едно својство, наречено својство на непрекинатост на реалните броеви во смисла на Кантор, што ние понатаму ќе го викаме ***Канторова аксиома***. Пред да го формулираме својството за непрекинатост, ќе воведеме неколку поими.

**1.** *Ако $a$ и $b$ се дадени реални броеви, $a \leq b$, множеството од сите реални броеви $x$, такви што $a \leq x \leq b$, се вика* ***отсечка (сегмент)*** *или* ***затворен интервал*** *и се означува со симболот* $[a,b]$. Ако $a=b$, сегментот $[a,a]$ се состои само од една точка, точката $a$.

**2.** *Системот сегменти (отсечки)*

$$[a_1,b_1],\ [a_2,b_2],\ \dots,\ [a_n,b_n],\ \dots$$

*се вика систем* ***вложени сегменти***, *ако*

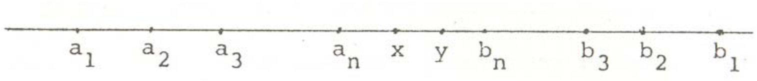
$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

**3.** ***Должината*** *на сегментите* $[a_n,b_n]$, $n = 1, 2, \dots$ *од системот вложени сегменти* ***се стреми кон нула*** *кога $n$ расте, ако за секој реален број $\varepsilon>0$ постои природен број $n_0$ таков што за секој $n>n_0$ да важи неравенството $b_n-a_n<\varepsilon$.*

***Принцип на вложени сегменти*** (***Канторова аксиома***). *За секој систем вложени сегменти постои барем еден реален број што им припаѓа на сите сегменти од системот.*

**Теорема 1.** *За секој систем од вложени сегменти, чија должина се стреми кон нула, постои единствен број кој припаѓа на сите сегменти од дадениот систем.*

**Доказ:** Нека е $[a_n,b_n]$, $n=1, 2, \dots$ зададен систем од вложени сегменти чија должина се стреми кон нула. Според Канторовата аксиома постои барем еден број кој припаѓа на сите сегменти од системот. Ќе докажеме дека тој број е единствен. Нека претпоставиме дека постојат два различни броја $x$ и $y$, кои припаѓаат на сите сегменти и нека $x<y$ (црт. 1.11).



Црт. 1. 11

За овие два броја ќе важи:

$$a_n \leq x \leq b_n \quad \text{и} \quad a_n \leq y \leq b_n, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Од неравенството $y \leq b_n$ и $-x \leq -a_n$ со собирање се добива $y-x \leq b_n-a_n$. За произволно $\varepsilon>0$ постои природен број $n_0$ таков што за сите $n \geq n_0$ е исполнето неравенството $b_n-a_n<\varepsilon$, од каде се добива

$y-x< \varepsilon$. Ставајки $\varepsilon=y-x$ (бидејки ε беше произволно), добиваме $y-x<y-x$, што е противречност. Од тоа се добива дека претпоставката за постоење на два различни броја, кои припаѓаат на сите сегменти од системот $\left[a_n,b_n\right]$, е противречна. Со тоа теоремата е докажана.

Со својството на непрекинатост на реалните броеви се сретнуваме во практиката. При измерувањето на некои физички големини (температура на тело, димензии на тело итн.), секогаш добиваме приближни вредности со поголема или помала точност. Ако при измерувањето се добиваат низи од вредности кои ја даваат вредноста на измеруваната големина со кусок или со вишок и секое следно мерење се извршува со поголема точност, тогаш добиваме низа од вложени сегменти. Својството на непрекинатост на реалните броеви нé уверува во тоа дека измерената големина, има определена вредност која се наоѓа меѓу приближните вредности со кусок и со вишок.

Својствата од $\mathbf{1^0}$ до $\mathbf{5^0}$ ги имаат не само реалните броеви (на пример ги имаат и рационалните броеви), а својството $\mathbf{6^0}$, т.е. својството за непрекинатост го имаат реалните броеви, а рационалните броеви, пак, го немаат тоа својство.

На пример, ако јаземеме низата рационални отсечки

$$[1;2],\quad [1{,}4;1{,}5],\quad [1{,}41;1{,}42],\quad [1{,}414;1{,}415],\ \dots,$$

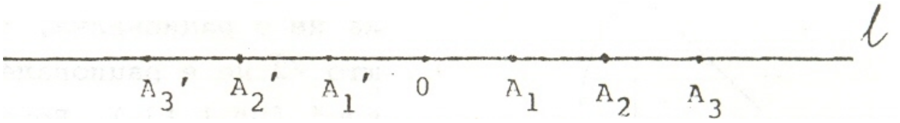
т.е. низа од множества рационални броеви кои припаѓаат на отсечките со краеви $a_n$ и $b_n$, $n$= 1, 2, … , кои се вредности на $\sqrt{2}$, пресметани со кусок и со вишок, со точност од $\frac{1}{10^n}$, $n$=1, 2, …, очигледно не постои рационален број кој припаѓа на сите тие отсечки. Таков број би можел да биде само $\sqrt{2}$, а тој не е рационален број.

За реалните броеви можеме да ја искажеме следнава дефиниција: *множеството елементи, кои ги имаат својствата од* $\mathbf{1^0}$ *до* $\mathbf{6^0}$, *се вика множество реални броеви.* Секој елемент од тоа множество се вика *реален број.*

Сите други својства на реалните броеви можат по дедуктивен пат да се добијат како последици од основните, т.е. од оние што ги набројавме досега. $\rfloor$

## 3. 6. Бројна права

Нека е избрана една права $\ell$ и на неа две точки O и $A_1$.



Ако отсечката $\overline{OA_1}$ ја преместуваме десно по правата, почнувајки од O ќе ги добиеме со ред отсечките $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$, итн. На точката O ѝ ја придружуваме нулата, а на точката $A_1$ единицата; на точката $A_2$ бројот два итн. Ако истото го направиме лево од точката O се добиваат отсечките

$$\overline{OA_1{}'}, \overline{OA_2{}'}, \ldots, \overline{OA_n{}'}, \ \ldots \ .$$

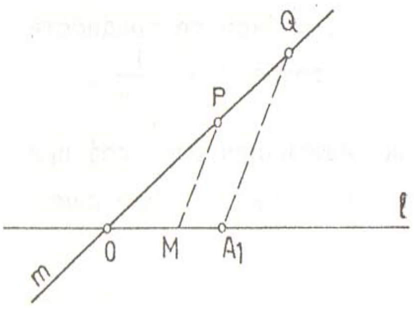
Сега на точките $A_1'$, $A_2'$, …, $A_n'$, … им ги придружуваме соодветно броевите $-1, -2, \ldots, -n, \ldots$ .

На тој начин на целите броеви им придружуваме точки од правата. Исто така, на секој рационален број можеме да му придружиме по една точка од правата.

Нека $x$ е кој и да било рационален број, т.е. $x=\dfrac{p}{q}$, односно

$$x:1 = p:q \qquad (1)$$

Низ точката O од правата $\ell$ да повлечеме произволна права $m$ и на неа почнувајќи од точката O да ги нанесеме должините



Црт. 1. 12

$$\overline{OP} = p\cdot\overline{OA_1} \quad \text{и} \quad \overline{OQ} = q\cdot\overline{OA_1}$$

( $p>0$, $q>0$ ), (црт. 1.12.).

Очигледно

$$\Delta OMP \sim \Delta OA_1Q,$$

од каде што следува:

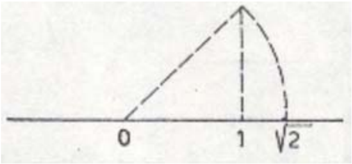
$$\overline{OM} : \overline{OA_1} = \overline{OP} : \overline{OQ},$$

$$\overline{OM} : \overline{OA_1} = p\cdot\overline{OA_1} : q\cdot\overline{OA_1},$$

$$\overline{OM} : 1 = p : q. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува: $\overline{\mathrm{OM}} = x$, т.е. на бројот $\dfrac{p}{q}$ му одговара точката M. За овие точки велиме дека се ***рационални точки.***

Со множеството рационални точки не се исцрпени сите точки од правата, иако секаде густо се распоредени. На пример, на ирационалниот број $\sqrt{2}$ лесно може да му придружиме точка од правата. Таа точка не е рационална точка, затоа што $\sqrt{2}$ не е рационален број (црт. 1.13.). Воопшто на множеството на ирационалните броеви им ги придружуваме сите точки кои не се рационални.



Црт. 1. 13.

*Множеството* ***ирационални точки*** *како и множеството ирационални броеви е* ***насекаде густо.***

Со множеството на реалните броеви се исцрпуваат сите точки од правата, така што на секој реален број му одговара само по една точка од правата, и обратно, на секоја точка од правата ѝ одговара само еден реален број. Велиме дека помеѓу множеството на реалните броеви $R$ и точките од правата постои заемно еднозначна кореспонденција.

*Правата на која сме избрале почетна точка, единица мерка за должина, и на секоја точка сме ѝ придружиле реален број, се вика* ***бројна права*** *(****бројна оска****).*

*Множеството на реалните точки се вика* ***геометриски линеарен континуум на точки****, а множеството реални броеви се вика* ***аритметички линеарен континуум на броеви.***

## 3. 7. Граници на бројни множества

Нека $A$ е множество од реални броеви, т.е. $A$ е непразно подмножество од $R$.

За множеството $A$ велиме дека е ***ограничено одозгора***, ***ограничено од десно*** или ***мајорирано*** ако постои реален број $M$, таков што $a \leq M$ за секој број $a \in A$. Бројот $M$ се вика ***горна граница, десна граница*** или ***мајорант*** за множеството $A$.

За множеството $A$ велиме дека е ***ограничено одоздола***, ***ограничено од лево*** или ***минорирано*** ако постои реален број $m$, таков што $m \leq a$ за секое $a \in A$. Секој реален број со тоа својство се вика ***долна граница***, ***лева граница*** или ***минорант*** за множеството $A$.

**Пример 1.** *Множеството*

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\}$$

е ограничено од озгора со единица или кој и да било број што е поголем од единица. Тоа множество е ограничено и одоздола со нула или кој и да било негативен број.

*Ако множеството е ограничено одозгора и одоздола, го викаме* ***ограничено множество****.*

Ако множеството е ограничено одозгора, тоа има бесконечно многу горни граници, затоа што секој број што е поголем од една негова горна граница, исто така е негова горна граница.

Исто така множеството кое е ограничено одоздола има бесконечно многу долни граници.

*Најмалата горна граница* $c$ *на множеството* $A$*, ако постои, се вика* ***супремум*** *на* $A$ *или* ***горна меѓа*** *и се означува со* $\sup A = c$.

Ако множеството има супремум и ако тој му припаѓа на множеството $A$, тогаш тој се вика ***најголем елемент*** на $A$.

Дефиницијата за супремум може да се искаже и на следниов начин:

***бројот*** $c$ ***е супремум*** *на множеството* $A$ *ако* се исполнети следниве два услова:

**1)** $c$ *е мајорант на множеството* $A$, т.е. $a \leq c$ за секој $a \in A$,

и

**2)** *за секој реален број* $\varepsilon > 0$ *постои барем еден број* $x \in A$, *таков што* $c - \varepsilon < x$.

Овие дефиниции за супремум се еквивалентни, затоа што условот **1)** искажува дека $c$ е горна граница на множеството $A$, а условот **2)** означува дека ниту еден број помал од $c$ ($c - \varepsilon < c$, за секој $\varepsilon > 0$) не е горна граница за множеството $A$, т.е. дека $c$ е најмалата горна граница на $A$.

*Најголемата долна граница* $m$ *на множеството* $A$ *се вика* ***инфимум*** *на* $A$ *и се означува со* $m = \inf A$.

Ако множеството $A$ има инфимум и тој му припаѓа на множеството $A$, тогаш тој се вика ***најмал елемент*** на $A$.

Дефиницијата за инфимум може да се искаже и на следниов начин:

***бројот* $m$ *е инфимум*** *на множеството* $A$ *ако ги исполнува следниве услови:*

**1)** $m$ *е минорант на множеството* $A$, т.е. $a \geq m$ за секој $a \in A$,

и

**2)** *за секој произволен број* $\varepsilon > 0$ *постои барем еден број* $x \in A$ *таков што* $x < m + \varepsilon$.

**Пример 2.** Множеството од сите чисти дропки

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \middle| \; m,n \in N; \;\; m < n \right\}$$

е ограничено множество

$$sup\, A = 1, \qquad inf\, A = 0,$$

меѓутоа, нема ниту најголем, ниту најмал елемент, затоа што 1 и 0 не му припаѓаат.

**Пример 3.** Сегментот $[2,7] = M$ е мајорирано и минорирано множество; 7 е супремум, а 2 е инфимум. Бидејќи 2 и 7 припаѓаат на множеството $M$, тие ги претставуваат најмалиот и најголемиот елемент на тоа множество $M$.

Нека $S$ и $T$ се непразни множества од реални броеви, тогаш точно е:

**а)** $inf\,(-S) = -\, sup\, S$,

**б)** $sup\,(-S) = -\, inf\, S$,

**в)** $sup\,(S+T) = sup\, S + sup\, T$,

**г)** $inf\,(S+T) = inf\, S + inf\, T$,

при претпоставка дека $inf\, S$, $supS$, $inf\, T$ и $sup\, T$ постојат.

Ако множеството $A$ не е ограничено одозгора (не е мајорирано), т.е. ниеден реален број не е мајорант на $A$, па изгледа бесмислено да се зборува за најмала горна граница на $A$. Меѓутоа, по дефиниција, ќе велиме дека супремум на тоа множество е $+\infty$.

Аналогно ако множеството $A$ не е ограничено одоздола ќе сметаме, по дефиниција, дека $inf\, A = -\,\infty$.

**Теорема 2.** (***за егзистенција на супремум односно инфимум***). *Секое непразно мајорирано множество A од реални броеви има супремум. Секое непразно минорирано множество од реални броеви има инфимум.*

**Доказ:** Множеството $A$ е непразно, па постои барем еден елемент $a\in A$, а тоа е мајорирано, па постои барем еден мајорант $b$ на $A$. Од тоа што $b$ е мајорант на $A$, следува $a<b$. Можеме да го формираме сегментот $[a,b]$ во кој се наоѓа барем еден елемент од $A$ и за секој елемент $x$ од $A$ важи $x\leq b$. Разделувајки го сегментот $[a,b]$ на половина, добиваме два сегмента

$$\left[a,\frac{a+b}{2}\right] \quad \text{и} \quad \left[\frac{a+b}{2},b\right].$$

Ако во десниот сегмент има барем еден елемент од $A$, тогаш овој сегмент ќе го означиме со $[a_1,b_1]$; ако пак во него нема ниеден елемент од $A$, тогаш со $[a_1,b_1]$ ќе го означиме левиот сегмент. Сегментот $[a_1,b_1]$ содржи елементи од множеството $A$ и целото множество е налево од $b_1$, т.е. $(x\leq b_1)(\forall\, x\in A)$. Потоа сегментот $[a_1,b_1]$ ќе го разделиме на половина, со што добиваме два сегмента:

$$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right] \quad \text{и} \quad \left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right].$$

Со $[a_2,b_2]$ ќе го означиме десниот сегмент ако во него има барем еден елемент од $A$; ако пак во него нема ниеден елемент од $A$, тогаш со $[a_2,b_2]$ ќе го означиме левиот сегмент и при тоа пак имаме $x\leq b_2$ за секој $x\in A$.

Нека со оваа постапка е добиен сегментот $[a_n,b_n]$. Разделувајќи го на половина, добиваме два сегмента. Ако во десниот има барем еден елемент од $A$, тогаш него ќе го означиме со $[a_{n+1},b_{n+1}]$, а ако нема ниеден елемент од $A$, тогаш со $[a_{n+1},b_{n+1}]$ ќе го означиме левиот сегмент.

На овој начин се добива систем од вложени сегменти

$$[a_1,b_1],\ [a_2,b_2], \ldots, [a_n,b_n], \ldots$$

кој ги има следниве својства:

**а)** *$x \le b_n$ за кој и да било $n$ =1, 2, … и за кој и да било $x \in A$*;

**б)** *во сегментот $[a_n, b_n]$ за секој $n$=1, 2, … има барем еден елемент од A.*

Должината на сегментот $[a_n, b_n]$ ($n$=1, 2, …)

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

се стреми кон нула кога $n$ расте.

Навистина, нека $\varepsilon > 0$ е произволен избран реален број. Според Архимедовата аксиома, постои природен број $n$, таков што за секој природен број $n \ge n_0$ да важи неравенството

$$n > \frac{b-a}{\varepsilon} \quad \text{т.е.} \quad \frac{b-a}{n} < \varepsilon.$$

Бидејки

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n+1)}{2} + \ldots > n,$$

добиваме

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} \quad \text{за секој } n = 1, 2, \ldots .$$

Според тоа, за секој $n > n_0$ важи:

$$\frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n} < \varepsilon.$$

а тоа значи дека должината $b_n - a_n$ на сегментот $[a_n, b_n]$ се стреми кон нула кога $n$ расте.

Според **Канторовата аксиома** и **теорамата 1**, постои единствена точка $c$ која му припаѓа на секој од сегментите $[a_n, b_n]$ за $n$= 1, 2, … . Тврдиме $c = supA$.

Да докажеме прво дека $c$ е мајорант на $A$, т.е. $x \le c$ за секој $x \in A$. Затоа ќе го претпоставиме спротивното т.е. дека постои точка $d \in A$, таква што $d > c$. Бидејки $b_n - a_n$ се стреми кон нула кога $n$ расте, постои $n_0 \in N$ такво што

$$b_{n_0} - a_{n_0} < d - c$$

т.е.

$$b_{n_0} < d - (c - a_{n_0}).$$

Бидејки $c \in \lfloor a_{n_0}, b_{n_0} \rfloor$ па $c - a_{n_0} \geq 0$ и затоа $d-(c-a_{n_0})<d$, т.е. следува дека $b_{n_0} < d$, што противречи на својството **а)** па значи не постои елемент $d$ во $A$ таков што $c<d$, т.е. $c$ е мајорант на $A$.

Сега ќе покажеме дека $c$ е најмалиот мајорант на $A$, т.е. за секој $\varepsilon>0$, постои $x_\varepsilon \in A$, таков што $c-\varepsilon < x_\varepsilon$.

Нека $\varepsilon>0$ е произволно избран број. Ќе го избереме $n_0$ така што $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$. Поради својството **б)**, постои $x \in A$, таков што $x \in \lfloor a_{n_0}, b_{n_0} \rfloor$, а според докажаното $x < c$, така што

$$a_{n_0} \leq x < c \leq b_{n_0},$$

а од тоа неравенство добиваме:

$$c-x \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon \quad \text{т.е.} \quad c-\varepsilon < x.$$

Со тоа докажавме дека $c = sup\, A$.

За егзистенција на инфимум на непразното минорирано множество $A$ доволно е да се разгледа множеството:

$$S = \{-x \mid x \in A\},$$

кое е мајорирано множество и за него важи претходно докажаното, т.е.

$$inf\, A = -\, sup\, S.$$

Со тоа **теоремата 2** е докажана.

## 3. 8. Апсолутна вредност на реалните броеви

***Айсолуйнайа вредносй на реалнийой број*** *$a$ ја означуваме со $|a|$ и ја дефинираме на следниов начин*:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{за } a > 0 \\ 0 & \text{за } a = 0 \\ -a & \text{за } a < 0. \end{cases}$$

Значи, секогаш е $|a| \geq 0$.

Ќе споменеме за некои својства на апсолутната вредност:

**$1^0$** *Айсолуйнаийа вредносйи од збирот на два реални броја не е йоголема од збирот на айсолуйнийе вредносйи на йие броеви*,

$$|a+b| \leq |a|+|b|;$$

**$2^0$** *Айсолуйнаийа вредносйи од разликаийа на два реални броја не е йомала од разликаийа на айсолуйнийе вредносйи на йие броеви,*

$$|a-b| \geq |a|-|b|;$$

**$3^0$** *Айсолуйнаийа вредносйи од йроизводой на два реални броја еднаква е на йроизводой од айсолуйнийе вредносйи на йие броеви,*

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$$

**$4^0$** *Айсолуйна вредносйи од количникой на два реални броја еднаква е на количникой од айсолуйнийе вредносйи на йие броеви,*

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \qquad b \neq 0.$$

Ќе го докажеме својството под **$1^0$.**

**$1_1$.** Нека $a > 0$, $b > 0$, тогаш

$$|a+b| = a+b = |a|+|b|;$$

**$1_2$.** Нека $a < 0$, $b < 0$, тогаш

$$|a+b| = -(a+b) = (-a)+(-b) = |a|+|b|;$$

**$1_3$.** Нека $a > 0$, $b < 0$, $a+b>0$, тогаш

$$|a+b| = a+b = a-(-b) = |a|-|b| < |a|+|b|;$$

**$1_4$.** Нека $a > 0$, $b < 0$, $a+b<0$, тогаш

$$|a+b| = -(a+b) = -a-b = -a+(-b) = -|a|+|b| < |a|+|b|.$$

Врз основа на сето горе изнесено следува точноста на својството **$1^0$**.

Ќе подвлечеме дека релацијата

$$|x| < a$$

значи исто што и

$$-a < x < a.$$

Исто така

$$|x-a| \leq r$$

значи исто што и

$$-r \leq x-a \leq r,$$

односно исто што и

$$a-r \leq x \leq a+r.$$

## 3. 9. Интервали

Во понатамошното изучување ќе се користиме со некои подмножества од реалните броеви.

**1.** Нека се $a$, $b \in R$ $(a<b)$. *Множеството од сите реални броеви x кои не се помали од a ни поголеми од b, т.е.* кои ја задоволуваат релацијата

$$a \leq x \leq b$$

*се вика* ***затворен интервал*** (***сегмент***) и го означуваме $[a,b]$.

**2.** *Ако броевите a и b не припаѓаат на интервалот*, т.е. *ако е*

$$a < x < b,$$

*тогаш велиме дека интервалот е* ***отворен*** и го означуваме со $(a,b)$.

**3.** *Ако бројот a припаѓа на интервалот, а b не припаѓа, т.е. ако е*

$$a \leq x < b,$$

*се вика дека интервалот е одлево затворен, а оддесно отворен и го означуваме со* $[a,b)$.

Исто така, интервалот е одлево отворен, а оддесно затворен, ако бројот $a$ не припаѓа, а бројот $b$ припаѓа на интервалот, т.е. ако е

$$a<x \leq b$$

и го означуваме со $(a,b]$.

**4.** Множеството на сите реални броеви кои не се помали од бројот $a$ претставува интервал кој се означува со

$$[a,+\infty) \quad \text{т.е.} \quad a \le x < +\infty.$$

Ако е $a<x<+\infty$ , интервалот ќе го означиме со $(a, +\infty)$. Во првиот случај интервалот е отворен оддесно, а во вториот случај интервалот е отворен и одлево и оддесно.

**5.** Множеството на сите реални броеви кои не се поголеми од бројот $a$ ќе претставува интервал што ќе го означуваме со

$$(-\infty,a] \quad \text{т.е.} \quad -\infty < x \le a.$$

Ако е $-\infty < x < a$, интервалот ќе го означиме со $(-\infty, a)$.

Множеството на сите реални броеви ќе го означиме со

$$(-\infty,+\infty) \quad \text{т.е.} \quad -\infty < x < +\infty.$$

Овој интервал е отворен одлево и оддесно.

Интервалите

$$[a,+\infty),\ (a, +\infty),\ (-\infty,a],\ (-\infty ,a) \text{ и } (-\infty,+\infty)$$

се бесконечни. На првите четири им одговара полуправа, а на петтиот целата бројна права.

Во случај на конечни интервали

$$[a,b],\ [a,b),\ (a,b],\ (a,b),$$

бројот $b-a$ се вика ***должина на интервалот.***

Нека на бројната права земеме фиксна точка $A$ на која ѝ одговара реалниот број $a$. Секој отворен интервал

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

се вика ***$\varepsilon$ –околина на точката*** $A$, односно ***$\varepsilon$–околина на бројот*** $a$, каде што $\varepsilon$ е произволен позитивен број (од интерес е да се нагласи дека $\varepsilon$ може да биде кој и да било мал позитивен број). Ако $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ т.е. ако $x$ е број кој го задоволува неравенството

$$a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \quad \text{или} \quad -\varepsilon < x-a < \varepsilon$$

односно

$$|x-a| < \varepsilon,$$

тогаш викаме дека *точката на бројната права која одговара на бројот $x$ се наоѓа во $\varepsilon$–околината на точката* A, *т.е. бројот $x$ е во $\varepsilon$–околината на бројот $a$.*

## 3. 10. Биномна формула

Пред да ја докажеме биномната формула ќе воведеме некои поими.

**1.** Производот на сите природни броеви од 1 до $n$ се означува со $n!$ ( се чита: $n$ факториел), т.е.

$$1\cdot2\cdot3\cdot\ \dots\ \cdot n = n!$$

и уште по дефиниција

$$0! = 1.$$

Така, на пример

$$1! = 1,\quad 2! = 2,\quad 5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120.$$

**2.** Нека се $n$ и $k$ природни броеви или 0 и нека е $n\geq k$. Тогаш под биномен коефициент $\binom{n}{k}$ (се чита: $n$ над $k$) подразбираме:

$$\binom{n}{k} \overset{\text{деф}}{=\!=} \frac{n(n-1)(n-2)\ \cdots\ (n-k+1)}{1\cdot2\ \cdots k},\quad (k>0) \qquad (1)$$

$$\binom{n}{0} \overset{\text{деф}}{=\!=} 1 \quad \text{и} \quad \binom{0}{0} \overset{\text{деф}}{=\!=} 1, \qquad (k=0).$$

**3.** Биномните коефициенти пократкo можат да се изразат со помош на факториели. Ако ја прошириме десната страна на (1) со $(n–k)!$, тогаш (1) добива вид:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{n!\,(n-k)!}.$$

овој израз е точен и за $k=0$ и за $k=n$, бидејќи важи

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1, \quad \text{и} \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1.$$

Биномните коефициенти ги имаат следниве особини:

**$1^0$** *биномните коефициенти еднакво оддалечени од краиштата, се еднакви меѓу себе, т.е.*

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}. \tag{2}$$

Посебно

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}, \quad \binom{n}{1}=\binom{n}{n-1} \quad \text{итн.}$$

Од тоа што

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!}=\frac{n!}{(n-k)!k!},$$

следува точноста на (2);

**$2^0$** *за биномните коефициенти важи и релацијата*

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.$$

За да се докаже точноста на релацијата, потребно е биномните коефициенти да се изразат со помош на факториели и левата страна да се сведе на заеднички именител, т.е.

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=$$

$$=\frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!}=$$

$$=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,[n+1-(k+1)]!}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Тоа е она што требаше да се докаже.

Сега можеме да ја формулираме ***биномната формула***:

*ако* $a$ *и* $b$ *се кои и да било два реални броја и* $n$ *природен број, тогаш важи*:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ \dots\ +\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\dots$$

$$\dots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Биномната формула се докажува со помош на математичка индукција.

Очигледно, формулата е точна за $n = 1, 2, 3$. Нека е точна за $n$, т.е.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots$$

$$\ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \ .$$

Да провериме дали од точноста за $n$ следува точност за $n+1$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \left[\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \right](a+b) =$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \ldots + \binom{n}{n}ab^n +$$

$$+ \binom{n}{0}a^n b + \ldots + \binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^n +$$

$$+ \binom{n}{n}b^{n+1} =$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right]a^n b + \ldots + \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]\mathrm{a}^{n+1-k}b^k + \ldots$$

$$\ldots + \left[\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right]ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1} \ .$$

Ако замениме

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}, \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1},$$

бидејќи секој од тие коефициенти е еднаков на 1 и го примениме својството **$2^0$**, се добива:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \ldots + \binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + \ldots$$

$$\ldots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} ,$$

од каде што се гледа дека формулата важи и за $n$+1. Со тоа доказот е завршен.

За определување на биномните коефициенти, врз основа на својството **2⁰**, може да послужи таканаречениот Паскалов триаголник.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

…………………………………

**Пример1.** *Да се пресмета* $(a+b)^5$.

Според биномната формулата се добива:

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 +$$

$$+\binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5.$$

Бидејќи

$$\binom{5}{0}=1,\quad \binom{5}{1}=\frac{5}{1}=5,\quad \binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10,$$

$$\binom{5}{3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=10,\quad \binom{5}{4}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=5,\quad \binom{5}{5}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}= 1,$$

се добива:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

## Задачи за вежбање

**1.** Да се покаже дека производот од четири последователни броја е делив со 24.

**2.** Да се покаже дека бројот $11\cdot 10^{2n}+1$ е делив со 3, ако $n$ е природен број или нула.

**3.** Со помош на математичка индукција за $n\in N$ да се докажат равенствата:

**а)** $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

**б)** $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

**в)** $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

**г)** $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+ \ldots +\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$;

**д)** $\dfrac{1}{1^2\cdot 3^2}+\dfrac{1}{3^2\cdot 5^2}+\dfrac{1}{5^2\cdot 7^2}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n-1)^2}$

**ѓ)** $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+ \ldots +\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;

**е)** $(1+x)\,(1+x^2)\,(1+x^4)\,\ldots\,(1+x^{2^{n-1}}) = 1+x+x^2+ \ldots + x^{2^{n-1}}$ ;

**ж)** $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; $(\sin\alpha \neq 0)$.

**4.** Со помош на аксиомата на математичка индукција да се докажат следниве неравенства:

**а)** $2^n > n, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$

**б)** $2^n > n^2, \qquad n = 5, 6, 7, \ldots$

**в)** $3^n \geq 3n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

**г)** $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+ \ldots +\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \qquad (n \geq 2)$

*Решение*: **б)** за $n$=5 неравенството е исполнето, т.е.

$$2^5 > 5^2.$$

Нека претпоставиме дека е точно за $n$, т.е.

$$2^n > n^2.$$

Да покажеме дека ова неравенство ќе биде точно и за $n$+1. Од

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > 2n^2 > (n+1)^2$$

следува дека даденото неравенство е точно за секој природен број $n$. ( Напомена: треба да се покаже и точноста на неравенството

$$2n^2 > (n+1)^2, \quad \text{т.е.} \quad 2 > \left(\frac{n+1}{n}\right)^2.)$$

**5.** Да се покаже дека

$$\textbf{а)}\ \frac{13^{2n}-1}{168}\ ; \qquad \textbf{б)}\ \frac{n^5-5n^3+4n}{120},$$

се цели броеви, ако $n \in N$.

**6.** Да се покаже дека

$$\textbf{а)}\ \sqrt{3}\,; \qquad \textbf{б)}\ \sqrt{2}+\sqrt{3}\,,$$

се ирационални броеви.

**7**. Дали бројот 10 е горна граница на интервалот $(-5,2)$. (да)

**8.** Дали бројот $-3$ е долна граница на интервалот $(-2,3]$. (да)

**9.** Дали е ограничено множеството на целите броеви деливи со 3. (не)

**10.** Дали има најмал елемент и дали е ограничено бесконечното множество

$$M = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ ...\right\}?$$

(Одг.: $min\ M = \frac{1}{2}$, $max\ M$ не постои. Множеството $M$ е ограничено.)

**11.** Да се најде $inf$ и $sup$ на множеството на рационалните броеви $r$ што го задоволуваат неравенството $r^2 < 2$.

(Одг.: $inf\, M = -\sqrt{2}$ , $sup\ M = \sqrt{2}$ ).

**12.** Да се најде множеството од броеви $x$ кои го задоволуваат неравенството:

**а)** $|x-1|<3$; Одг.: $\{x\in R|\ -2<x<4\}=(-2,4)$.

**б)** $|2x-1|\le 3$; Одг.: $\{x\in R|\ -1\le x\le 2\}=[-1,2]$.

**в)** $|x-1|<|x+1|$; Одг.: $\{x\in R|\ x>0\}=(0,+\infty)$.

**г)** $|x+2|+|x-1|\le 12$. Одг.: $\{x\in R|\ -6\le x\le 6\}=[-6,6]$.

**13.** Кои множества од точки се определени со равенствата:

**а)** $x^2-5|x|+6=0$; Одг.: $\{-3,-2,2,3\}$.

**б)** $|2x-3|=3-2x$; Одг.: $\left\{x\in R|\ x<\frac{3}{2}\right\}$.

**в)** $|(x^2+4x+9)+(2x-3)|=|x^2+4x+9|+|2x-3|$;

Одг.: $x\ge\frac{3}{2}$.

**г)** $|(x^4-4)-(x^2+2)|=|x^4-4|-|x^2-2|$. Одг.: $|x|\ge\sqrt{3}$.

**14.** Да се покаже дека се исполнети следниве неравенства:

**а)** $||a|-|b||\le|a-b|$;

**б)** $|\sin(a+b)|\le|\sin a|+|\sin b|$.

**15.** Да се најде коефициентот пред $x^7$ во развојот $(x^2-x+1)^5$.

Одг.: $-30$.

**16.** Да се најдат природните броеви $n$ и $m$ ако

$$\binom{n}{m-1}:\binom{n}{m}:\binom{n}{m-1} = 2:3:4.$$

Одг.: $n=34$, $m=14$.

**17.** Во биномот $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^n$ да се определи степеновиот показател $n\in N$, ако се знае дека сумата од првите три биномни коефициенти е 16. За најденото $n$ да се претстави биномот во развиена форма.

Одг.: $n=5$; $89\sqrt{3}-109\sqrt{2}$.

**18.** Да се определи четвртиот член од развиениот бином $\left(x^{1/4}+\sqrt[3]{\dfrac{x^{-2}}{7}}\right)^{y}$ каде што $x, y\in N$ и ја задоволуваат релацијата

$$\binom{y}{x+1}:\binom{y}{x}:\binom{y}{x-1}=1:3:5. \qquad \text{Одг.: } 1;\ \text{за } x=5,\ y=7.$$

**19.** Да се покаже дека се точни равенствата:

**а)** $$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ \dots\ +n\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1};$$

**б)** $$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\ \dots\ +(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=0;$$

**в)** $$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ \dots\ +\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n};$$

**г)** $$\binom{n}{0}^2-\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2-\dots+(-1)^n\binom{n}{n}^2=\begin{cases}0, & n-\text{парно};\\ (-1)^{\binom{n}{2}}\dbinom{n}{\frac{n}{2}}, & n-\text{непарно};\end{cases}$$

**Доказ: а)** Од $(1+1)^n$ се добива:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ \dots\ +\binom{n}{n}=2^n-\binom{n}{0}.$$

Ако го собереме ова равенство со следниве:

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ \dots\ +\binom{n}{n}=2^n-\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right],$$

$$\binom{n}{3}+\ \dots\ +\binom{n}{n}=2^n-\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right],$$

…………………………………………..

$$\binom{n}{n}=2^n-\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n-1}\right],$$

се добива:

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}=n\cdot 2^n-\left[n\binom{n}{0}+(n-1)\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-1}\right]$$

или

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ \ldots\ +n\binom{n}{n}=n\cdot 2^n-\frac{n\cdot 2^n}{2}=n\cdot 2^{n-1}$$

што ја дава точноста на особината **а)**.

**в)** Да разгледаме

$$(a+b)^n(b+a)^n=\left[\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{n}b^n\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\binom{n}{0}b^n+\binom{n}{1}b^{n-1}a+\ldots+\binom{n}{n}a^n\right]=$$

$$=\left[\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2\right]a^nb^n+\ldots$$

и

$$(a+b)^{2n}=\binom{2n}{0}a^{2n}+\binom{2n}{1}a^{2n-1}b+\ \ldots\ +\binom{2n}{n}a^nb^n+\ldots$$

Ако ги изедначиме коефициентите пред $a^nb^n$, се добива:

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ \ldots\ +\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n},$$

што требаше да се докаже.

**г)** Ги споредуваме коефициентите пред $a^nb^n$ во

$$(a-b)^n(b+a)^n=\left[\binom{n}{0}a^n-\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+(-1)^nb^n\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\binom{n}{0}b^n+\binom{n}{1}b^{n-1}a+\binom{n}{2}b^{n-2}a^2+\ldots+\binom{n}{n}a^n\right]$$

и $(a^2-b^2)^n$.

Ако се измножат членовите кои што се еден под друг ќе се добијат членовите што го содржат $a^n b^n$. Коефициентот на тој член ќе биде дадената алтернативна сума. Ако, пак, се развие $(a^2-b^2)^n$ , член со $a^n b^n$, ќе постои само ако $n$ е парен број. Тој ќе има коефициент

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}.$$

Ако пак $n$ е непарен, таков член нема да има.

За алтернативен збир на кубовите од биномните коефициенти доказот е потежок.

## 4. КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Познато е дека не секоја равенка може да се реши со помош на реалните броеви. Наједноставната равенка која нема корени во множеството на реалните броеви е равенката $x^2+1=0$. За да се реши оваа равенка, потребно е проширување на множеството на реалните броеви во множество во кое споменатата равенка, а и секоја друга алгебарска равенка, да има решение.

Се воведува нов математички објект кој ќе го означиме со буквата $i$ и ќе му припишеме својство $i^2=-1$, за кого ќе важат сите математички закони што важат за реалните броеви, со исклучок на релацијата за подредување (т.е. знаците за нееднаквост). Овој нов број го викаме ***имагинарна единица***.

*Производот на реалниот број $y$ со $i$ го нарекуваме* ***имагинарен број*** *$iy$. Збирот од реалниот број $x$ и имагинарниот број $yi$ го викаме* ***комплексен број*** *$x+iy$. Множеството чии елементи се броевите $x+iy$, $x,y\in R$ се вика* ***множество на комплексни броеви****. Множеството на комплексните броеви го означуваме со буквата C.*

$$C=\{z|\ z=x+iy,\quad x,y\in R\wedge\ i^2=-1\}.$$

За комплексниот број $z=x+iy$, $x$ се вика ***реален дел*** и се означува со

$$Re\, z = x,$$

а реалниот број $y$ се вика ***имагинарен дел*** и се означува со

$$Im\, z = y.$$

Ако $Im\, z = 0$, тогаш бројот $z$ е реален број, а ако $Re\, z = 0$, тогаш бројот $z$ е имагинарен број.

За $x$=0 се добиваат имагинарните броеви, а за $y$=0 реалните броеви како посебен случај на комплексните броеви.

*Под* ***айсолушна вредност*** *или* ***модул на комйлексниош број*** $x+iy$ *се йодразбира йозишивен корен од збирош на квадрашиише од реалниош и имагинарниош дел*, т.е.

$$|\, z\,| = |\, x + iy\,| = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

За $y$=0 се добива апсолутна вредност на реалниот број $x$, која е еднаква на позитивниот корен $\sqrt{x^2}$ , а тоа значи дека е $x$ за $x>0$ и $-x$ за $x<0$, што се сложува со дефиницијата за апсолутна вредност на реалните броеви.

Ако е $z=x+iy$, тогаш комплексниот број $x - iy$ , означен со $\bar{z}$ , ќе велиме дека е *конјугиран на комйлексниош број* $z$.

Во множеството на комплексните броеви равенката $x^2+1=0$ може да се реши. Нејзините корени се $x_1 = i$ и $x_2 = - i$.

## 4.1. Операции со комплексни броеви

Операциите со комплексните броеви се определуваат на следниов начин:

**1$^0$** ***два комйлексни броја*** $z_1= x_1+ iy_1$ *и* $z_2 = x_2+ iy_2$ *се* ***еднакви*** *ако и само ако им се еднакви нивниише реални и имагинарни делови*, т.е.

$$z_1 = z_2,\ \text{односно}\ \ x_1+ iy_1 = x_2+ iy_2 \ \Leftrightarrow\ x_1= x_2 \ \wedge y_1 = y_2;$$

**2$^0$** *збирош на два комйлексни броја* $z_1= x_1+ iy_1$ *и* $z_2 = x_2+ iy_2$ *е единсшвен комйлексен број* $z$ *за кого важи* $z= z_1 + z_2$, т.е.

$$z= z_1 + z_2 = (x_1+iy_1) + (x_2+iy_2) = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2).$$

*При* ***собирање на комйлексни броеви*** *се собирааш реален со реален и имагинарен со имагинарен дел на шие броеви.*

***Неушрален елеменш за собирање*** *на комйлексни броеви е бројош* $0+i0$.

***Сйрошивен елеменш*** *на елеменшош* $x+iy$ *е елеменшош* $-(x+iy)$;

**$3^0$** *разликата на комплексните броеви се дефинира како обратна операција на операцијата собирање.* Ако $z_1= x_1+ iy_1$ *и* $z_2 = x_2+ iy_2$ се два кои и да било комплексни броја, тогаш постои само еден комплексен број $z=x+iy$, за кој важи равенството

$$z_1 + z = z_2.$$

*Комплексниот број* $z$ *се вика* ***разлика*** *на броевите* $z_2$ *и* $z_1$ *и се означува со* $z_2–z_1$.

Навистина, од равенството следува:

$$(x_1+iy_1) + (x+iy)= x_2+iy_2,$$

$$(x_1+x) + i(y_1+y) = x_2+iy_2.$$

Користејќи го својството за еднаквост **$1^0$**, следува:

$$x_1+x = x_2 \;\wedge\; y_1+y = y_2,$$

т.е.

$$x = x_2–x_1 \;\wedge\; y = y_2–y_1,$$

па

$$z = ( x_2–x_1 ) + i ( y_2–y_1 ).$$

*При* ***вадење (разлика) на два комплексни броја*** *се вади реален од реален и имагинарен од имагинарен дел на тие броеви*;

**$4^0$** ***производот*** *на два комплексни броја* $z_1= x_1+ iy_1$ *и* $z_2 = x_2+ iy_2$ *е единствен комплексен број* $z$ *кој се бележи со* $z= z_1 z_2$, т.е.

$$z = z_1 z_2 = (x_1+iy_1)\,(x_2+iy_2) = (x_1 x_2 – y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \qquad (1)$$

Не е тешко да се забележи дека равенството (1) може да се добие формално по обично множење на бином со бином, земајќи во обѕир $i^2 = –1$.

***Неутрален елемент за множење*** *на комплексни броеви е бројот* $1=1+ i\cdot 0$;

**$5^0$** ***делењето*** *на комплексни броеви се дефинира како операција обратна на множењето, т.е. ако* $z_1= x_1+ iy_1$ *и* $z_2 = x_2+ iy_2$ *се два кои и да било комплексни броја и* $z_1\neq 0$, тогаш постои еден и само еден комплексен број $z = x+iy$, таков што е

$$z_1\cdot z = z_2. \qquad (2)$$

*Комплексниот број* $z$ *се вика* ***количник*** *на броевите* $z_2$ *и* $z_1$ *и се бележи со* $\frac{z_2}{z_1}$.

Навистина, од равенството (2) имаме:

$$(x_1 x - y_1 y) + i(x_1 y + x_2 y) = x_2 + iy_2,$$

и од еднаквоста на два комплексни броја следува:

$$x_1 x - y_1 y = x_2,$$
$$x_1 y + x_2 y = y_2.$$

Од овој систем равенки се добива:

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Според тоа,

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i\,\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}. \tag{3}$$

Не е тешко да се забележи дека ова равенство може да се добие ако во дропката $\frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1}$ се помножи броителот и именителот со конјугираниот именител, т.е.

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2 \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1} = \frac{z_2 \bar{z}_1}{|z_1|^2}.$$

Секој комплексен број $z \neq 0$ има свој единствен инверзен елемент, кој се означува со

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2};$$

**6⁰** *за операциите собирање и множење на комплексни броеви важат следниве закони:*

**1.** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (*комутативен закон за собирање*),

**2.** $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (*комутативен закон за множење*),

**3.** $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (*асоцијативен закон за собирање*),

**4.** $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ (*асоцијативен закон за множење*),

**5.** $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (*дистрибутивен закон за множење спрема собирање*);

**7⁰** *множеството на комплексните броеви е* ***поле***;

**$8^0$** лесно се докажува дека се точни следниве особини:

**1.** $z\bar{z} = x^2+y^2 = |z|^2$ за секој $z \in C$.

**2.** $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ за секој $z_1, z_2 \in C$.

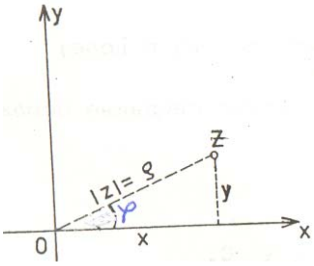
**3.** $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

**4.** $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, ако $z_2 \neq 0$.

**5.** $\overline{\bar{z}_1 z_2} = z_1 \bar{z}_2$.

## 4.2. Геометриска интерпретација на комплексни броеви. Тригонометриски вид на комплексен број

Секој комплексен број $z=x+iy$ може да се запише еднозначно како подреден пар броеви, т.е. $z=(x,y)$. Затоа секој комплексен број во Декартовиот координатен систем $x$O$y$ ќе го претставиме со точката Z($x,y$). Според тоа реалните броеви се нанесуваат на $x$–оската, а имагинарните броеви на $y$–оската. Затоа апсцисната оска ја викаме ***реална оска***, а ординатната оска-***имагинарна оска***. *Рамнината x*O*y во која се претставуваат комплексните броеви се вика* ***комплексна*** или ***Гаусова рамнина***.



Црт. 1. 14.

Бидејќи секој комплексен број $z=x+iy$ е определен со својот реален дел $x$ и имагинарен дел $y$ на единствен начин, тогаш на секој комплексен број ќе му одговара единствена точка во комплексната рамнина. Очигледно дека е точно и обратното. Имено, на секоја точка од $x$O$y$ рамнината одговара единствен комплексен број.

Значи, меѓу комплексните броеви и точките од комплексната рамнина постои заемно еднозначно придружување.

Растојанието од точката Z до координатниот почеток O е модул на комплексниот број $z$, т.е. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Нека во $xOy$ рамнината со $\rho$ да ја означиме должината на растојанието од точката Z што одговара на бројот $z=x+iy$ до координатниот почеток, а со $\varphi$ аголот што го гради зракот од координатниот почеток на кој лежи точката Z и позитивната насока на $x$–оската (црт. 1.14).

Помеѓу $x$, $y$ и $\rho$, $\varphi$ постојат следниве врски:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Од овие формули се добива дека *комплексниот број* $z=x+iy$, кој е запишан *во алгебарски вид*, може да се запише во вид:

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

што се вика *тригонометриски вид на комплексен број*. Очигледно е дека

$$\rho = | z | = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

*Аголот* $\varphi$ *се вика* ***аргумент на комплексниот број*** $z$ *и се означува со* $\arg z$, ако се земе главната вредност на аголот ($0\leq \arg z \leq 2\pi$) и со $\mathrm{Arg}\, z$, ако се избере општата вредност на аголот. Според тоа,

$$\mathrm{Arg}\, z = \varphi+2k\pi \qquad (-\infty < \mathrm{Arg}\, z < +\infty)$$

каде што $k$ е произволен цел број, а $\varphi$ која и да било вредност од 0 до $2\pi$.

***Два комплексни броја*** $z_1 = \rho_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$ *и* $z_2 = \rho_2 (\cos\varphi_2+i \sin\varphi_2)$ ***се еднакви*** *ако им се еднакви модулите а аргументите им се разликуваат за* $2k\pi$, т.е.

$$\rho_1 = \rho_2 \text{ и } \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi.$$

Користејќи го тригонометрискиот вид на комплексен број ќе докажеме дека

$$| z_1 + z_2 | \leq | z_1 | + | z_2 | \quad \text{и} \quad | z_1 + z_2 | \geq | z_1 | - | z_2 |.$$

Навистина,

$$| z_1 + z_2 |^2 = \left| (\rho_1 \cos\varphi_1 + \rho_2 \cos\varphi_2) + i (\rho_1 \sin\varphi_1 + \rho_2 \sin\varphi_2) \right|^2 =$$

$$= (\rho_1 \cos\varphi_1 + \rho_2 \cos\varphi_2)^2 + (\rho_1 \sin\varphi_1 + \rho_2 \sin\varphi_2)^2 =$$

$$= \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Бидејќи

$$-1 \leq cos(\varphi_1 - \varphi_2) \leq 1,$$

најголема вредност крајниот израз добива кога

$$cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1, \quad \text{т.е.} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = 0,$$

па во тој случај ќе биде:

$$|z_1 + z_2|^2 \leq \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 = \left(|z_1| + |z_2|\right)^2.$$

Најмала вредност се добива кога

$$cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1, \quad \text{т.е.} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \pi,$$

тогаш вредноста ќе биде:

$$|z_1 + z_2|^2 \geq \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 = (\rho_1 - \rho_2)^2 = \left(|z_1| - |z_2|\right)^2,$$

од каде што се добива:

$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

## 4. 3. Операции со комплексни броеви во тригонометриски вид

Операциите множење, делење, степенување и коренување на комплексни броеви поедноставно се изведуваат ако комплексните броеви се изразени во тригонометриски вид.

### $1^0$ *Множење на комплексни броеви*

Нека се $z_1 = \rho_1 (cos\varphi_1 + i\, sin\varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2 (cos\varphi_2 + i\, sin\varphi_2)$ два дадени комплексни броја. Множејќи ги овие броеви се добива:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 (cos\varphi_1 + i\, sin\varphi_1) \cdot \rho_2 (cos\varphi_2 + i\, sin\varphi_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2 \left[(cos\varphi_1\, cos\varphi_2 - sin\varphi_1\, sin\varphi_2) + i(sin\varphi_1\, cos\varphi_2 + cos\varphi_1\, sin\varphi_2)\right] =$$

$$= \rho_1\rho_2 \left[cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\, sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right],$$

т.е.

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 \left[cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\, sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

Значи, ***комплексните броеви се множат*** *кога ќе се помножат нивните модули, а нивните аргументи се соберат*.

Истото правило може да се примени кога се множат и повеќе комплексни броеви,

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = \rho_1\rho_2 \ldots\rho_n \ \left[cos\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \ \ldots \ + \varphi_n\right) + \right.$$
$$\left. + i\, sin\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \ \ldots \ + \varphi_n\right)\right] \qquad (1)$$

### $2^0$ *Моаврова формула*

Нека $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, тогаш користејќи (1) се добива:

$$z^n = \rho^n(cos\, n\varphi + i\, sin\, n\varphi).$$

Ова равенство ни ја дава Моавровата формула, а многу често е во употреба за $\rho=1$, т.е. формулата

$$(cos\ \varphi + i\, sin\varphi)^{\,n} = cos\, n\varphi + i\, sin\, n\varphi\,.$$

Ова равенство е точно за секој цел број $n$ и за секој реален број $\varphi$.

**Доказ:** За $n$=0 и $n$=1 точноста е очевидна. Со математичка индукција се покажува дека таа формула е точна за секој природен број.

За $n$ таа е

$$(cos\varphi + i\, sin\varphi)^{\,n} = cos\, n\varphi + i\, sin\, n\varphi\,,$$

а за $n$+1 се добива:

$$(cos\varphi + i\, sin\varphi)^{\,n+1} = (cos\ \varphi + i\, sin\ \varphi)^{\,n}\,(\,cos\varphi + i\, sin\varphi) =$$
$$= (cos\, n\varphi + i\, sin\, n\varphi)(\,cos\varphi + i\, sin\varphi\ ) =$$
$$= cos\,(n{+}1)\,\varphi + i\, sin(n{+}1)\,\varphi\,,$$

што значи дека таа е точна и за $n$+1, а со тоа докажавме дека Моавровата формула е точна и за секој природен број.

За $n = -1$ се добива:

$$(cos\ \varphi + i\, sin\ \varphi)^{\,-1} = \frac{cos\,\varphi - sin\,\varphi}{cos^2\,\varphi + sin^2\,\varphi} = cos(-1)\,\varphi + isin(-1)\,\varphi\,.$$

Ако $n = -m$ е негативен цел број, се добива:

$$(cos\varphi + i\, sin\varphi)^{\,n} = \left[\left(cos\,\varphi + i\, sin\,\varphi\right)^{-1}\right]^m =$$
$$= \left[cos\left(-\,\varphi\right) + i\, sin\left(-\,\varphi\right)\right]^m = cos(-m)\,\varphi + i\, sin(-m)\ \varphi\,.$$

Тоа значи дека е точна и за кој и да е негативен цел број.

**Пример.** *Да се пресмета* $(1-i)^{10}$.

Ако бројот $1-i$ го запишеме во тригонометриски вид, се добива:

$$(1-i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(cos 10\cdot\frac{7\pi}{4} + i\, sin 10\cdot\frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$= 32\ (cos\frac{3\pi}{2}\ + i\ sin\frac{3\pi}{2}) = -32\ i.$$

### $3^0$ *Делење на комплексни броеви*

За количникот на броевите

$$z_1 = \rho_1\ (cos\varphi_1 + i sin\varphi_1)\ \text{ и }\ z_2 = \rho_2\ (cos\varphi_2 + i sin\varphi_2),$$

се добива:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\left(cos\varphi_1 + i\, sin\varphi_1\right)}{\rho_2\left(cos\varphi_2 + i\, sin\varphi_2\right)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(cos\varphi_1 + i\ sin\varphi_1)(cos\varphi_2 + i\ sin\varphi_2) =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\left(cos\varphi_1\, cos\varphi_2 + sin\varphi_1\, sin\varphi_2\right) + i\left(sin\varphi_1\, cos\varphi_2 - sin\varphi_2\, cos\varphi_1\right)\right] =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\, sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right].$$

Значи, *при* ***делење на комплексни броеви*** *модулите се делат, а аргументите се вадат.*

### $4^0$ *Коренување на комплексни броеви*

Нека е $z = r(cos\alpha + i\ sin\alpha)$ даден комплексен број и $n\in N$. Под $n$–ти корен на комплексниот број $z$ се подразбира комплексен број $w = \rho\ (cos\varphi\ + i\ sin\varphi)$ чиј $n$–ти степен е еднаков на $z$, т.е.

$$w^n = z,$$

односно

$$\left[\rho\left(cos\varphi + i\, sin\varphi\right)\right]^n = r(cos\alpha + i\ sin\alpha). \qquad (1)$$

Решението на оваа равенка го означуваме со $\sqrt[n]{z}$ .

Навистина, ако ги изедначиме модулите и аргументите на левата и десната страна во (1), се добива:

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \alpha + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ \dots \ ,$$

односно

$$\rho = \sqrt[n]{r}\,, \quad \varphi_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ \dots \tag{2}$$

Иако бројот $k$ може да ги прими сите вредности од множеството на целите броеви, сепак со изразите (2) се дефинирани само $n$ различни вредности на коренот $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$, односно:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\,sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \tag{3}$$

Секој цел број $k$ може да се запише во вид:

$$k = nq + p, \quad \text{каде што} \quad 0 < p \leq n-1 \tag{4}$$

($p$ е остаток при делење на $k$ со $n$ и прима вредности 0,1, … , $n$–1).

Ако $k \geq n$ , тогаш користејќи (4), аргументот е:

$$\varphi_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha + 2\pi(nq + p)}{n} = \frac{\alpha + 2\pi p}{n} + 2\pi q = \varphi_p + 2\pi q \ ,$$

односно

$$\varphi_k - \varphi_p = 2\pi q,$$

па следува дека комплексните броеви т.е. корените $w_k$ и $w_p$ се еднакви. Затоа равенката (1) има најмногу $n$ корени. Ќе покажеме дека тие се различни меѓу себе.

Да претпоставиме дека два корена се еднакви,

$$w_s = w_t, \quad \text{каде што} \quad 0 < s < t < n,$$

тогаш

$$\frac{\alpha + 2\pi t}{n} = \frac{\alpha + 2\pi s}{n} + 2k\pi, \quad k\text{–цел број}$$

$$t - s = kn, \quad k = 0$$

што е можно само за $t$=$s$. Со тоа докажавме дека $n$–ти корен од еден комплексен број има $n$ различни вредности.

Геометриски тоа значи дека сите точки што им одговараат на корените се наоѓаат на исто растојание $\sqrt[n]{r}$ од координатниот почеток, т.е. точките лежат на кружница со радиус $\sqrt[n]{r}$. Со тоа што $k$ ги прима вредностите 0, 1, 2, … , $n$–1, аргументите на соодветните комплексни броеви се

$$\frac{\alpha}{n},\ \frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n},\ \ \ldots\ \ ,\ \frac{\alpha}{n}+(n-1)\frac{2\pi}{n}.$$

Очигледно е дека аргументот во секој чекор се зголемува за $\frac{2\pi}{n}$, а така добиените точки на кружницата се темиња на еден вписан правилен $n$–аголник.

**Пример 1.** *Да се пресметаат сите вредности на корените*:

$$\text{а) } \sqrt[3]{i}, \qquad \text{б) } \sqrt[4]{-1+i}.$$

*Решение*: **а)** Бројот $i$ ќе го претставиме во тригонометриски вид:

$$i = cos\frac{\pi}{2}\ +\ i\,sin\frac{\pi}{2}\ .$$

Користејќи ја формулата за коренување на комплексни броеви, имаме:

$$\sqrt[3]{i}\ = cos\,\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\ +\ i\,sin\,\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3},\qquad k = 0, 1, 2.$$

т.е.

$$w_k = cos\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}\right)\ +\ i\,sin\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}\right),\qquad k = 0, 1, 2,$$

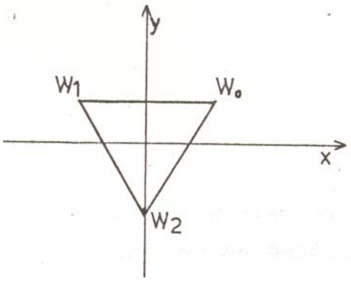
од каде што:

$$w_0 = cos\frac{\pi}{6}\ +\ i\,sin\frac{\pi}{6}\ =\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right),$$

$$w_1 = cos\frac{5\pi}{6}\ +\ i\,sin\frac{5\pi}{6}\ =\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right),$$

$$w_2 = cos\frac{3\pi}{2}\ +\ i\,sin\frac{3\pi}{2}\ = -\,i.$$

Точките $w_0$, $w_1$ $w_2$ се темиња на рамностран триаголнок кои лежат на кружница со радиус 1 и центар во O(0,0) (црт. 1.15).



Црт. 1. 15.

**б)** Ќе го претставиме бројот $-1+i$ во тригонометриски вид

$$-1+i=\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Од формулата за коренување на комплексни броеви следува:

$$w_k=\sqrt[4]{-1+i}$$

$$w_k=\sqrt[4]{\sqrt{2}}\cdot\left(cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\,sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

$$w_k=\sqrt[8]{2}\left[cos\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\,sin\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)\right].$$

**Пример 2.** *Да се реши биномната равенка:*

$$x^6+64=0.$$

Решавањето на оваа равенка се сведува на наоѓање $\sqrt[6]{-64}$, т.е. $2\sqrt[6]{-1}$. За таа цел бројот $-1$ ќе го претставиме во тригонометриски вид

$$-1=cos\pi+i\,sin\pi.$$

Со примена на формулата за коренување на комплексен број, се добива:

$$\sqrt[6]{-1}=\sqrt[6]{cos\,\pi+i\,sin\,\pi}\,.$$

$$w_k=cos\,\frac{\pi+2k\pi}{6}\;+\;i\,sin\frac{\pi+2k\pi}{6},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,5).$$

односно:

$$w_0=cos\,\frac{\pi}{6}\;+\;i\,sin\frac{\pi}{6}\;=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right),$$

$$w_1 = cos\ \frac{\pi}{2} + i\ sin\frac{\pi}{2} = i,$$

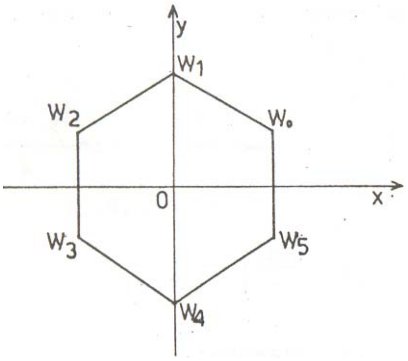
$$w_2 = cos\ \frac{5\pi}{6} + i\ sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right),$$

$$w_3 = cos\ \frac{7\pi}{6} + i\ sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right),$$

$$w_4 = cos\ \frac{3\pi}{2} + i\ sin\frac{3\pi}{2} = -i,$$

$$w_5 = cos\ \frac{11\pi}{6} + i\ sin\frac{11\pi}{6} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-i\right).$$

Точките $w_0$, $w_1$, … , $w_5$ се темиња на правилен шестаголник, впишан во кружница со радиус 1 (црт. 1.16).



Црт. 1. 16.

Корените на равенката се:

$x_1 = 2w_0 = \sqrt{3} + i,$

$x_2 = 2w_1 = 2i,$

$x_3 = 2w_2 = -\sqrt{3} + i,$

$x_4 = 2w_3 = -\sqrt{3} - i,$

$x_5 = 2w_4 = -2i,$

$x_6 = 2w_5 = \sqrt{3} - i.$

## Задачи за вежбање

**1.** Да се покаже дека постои неутрален елемент (единица) $z=1+0\cdot i$ во операцијата множење, таков што

$$z_1 \cdot z = z_1$$

**2.** Да се покаже дека секој елемент $z_1 \neq 0+i\cdot 0$ има свој инверзен елемент $z$ во операцијата множење, таков што помножен со $z_1$ има производ единица, т.е.

$$z \cdot z_1 = 1. \tag{1}$$

**Доказ:** Нека $z$ и $z_1 \in C$ и нека $z=x+iy$ и $z_1=x_1+iy_1$, тогаш од (1) следува:

$$(x+i\,y)(x_1+i\,y_1) = 1,$$

т.е.

$$(x_1x-y_1y) + i\,(y_1x+x_1y) = 1.$$

Изедначувајќи ги реалните и имагинарните делови, се добива системот:

$$x_1x-y_1y=1$$

$$y_1x+x_1y=0,$$

кој решен по $x$ и $y$ дава:

$$x=\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}\,, \qquad y=-\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\,,$$

па

$$z=\frac{1}{z_1}=\frac{x_1-iy_1}{x_1^2+y_1^2}=\frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}=z_1^{-1}=(\,x_1+i\,y_1)^{-1}.$$

**3.** Да се определи комплексниот број $z$ од условите:

$$\left(\frac{\bar{z}}{z+1}\right)^2=1 \quad \text{и} \quad \frac{z}{\bar{z}}=i.$$

Одг.: $z=-\frac{1}{2}(1+i)$.

**4.** Да се определи комплексниот број $z$ кој ја задоволува равенката

$$|\,z\,|+z=2+i.$$

Одг.: $z=\frac{3}{4}+i$.

**5.** Ако $z_1$ и $z_2$ се корени на равенката $z^2-4z+13=0$, да се покаже дека важи:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{z_2}{z_1}.$$

**6.** Ако $z_1$ и $z_2 \in C$ да се покаже дека важи равенството:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

*Решение*: Од $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ имаме:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = (z_1+z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) =$$

$$= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2},$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1-z_2)\left(\overline{z_1 - z_2}\right) = (z_1-z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) =$$

$$= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2},$$

тогаш

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}) = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

**7.** Во која област од рамнината $xOy$ лежат броевите:

$$2Re\left[(1+2i)z\right] \geq (Im\,z)^2.$$

**8.** Комплексните броеви $z_1$, $z_2$, $z_3$ го задоволуваат условот $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Ако нивните точки во комплексната рамнина лежат на единична кружница, тогаш се темиња на рамностран триаголник. Да се докаже.

**9.** Да се претстават во тригонометриски вид броевите:

**а)** $z = -1 - i\sqrt{3}$, Одг.: $2\left(cos\frac{4\pi}{3} + i\frac{4\pi}{3}\right)$.

**б)** $z = -6 + 6i$, Одг.: $6\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\frac{3\pi}{4}\right)$.

**10.** Да се пресмета:

**а)** $\dfrac{\left(2 + i\sqrt{12}\right)^5}{(1-i)^6}$, Одг. $2^7\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right)$.

**б)** $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$.

**11.** Да се покаже дека:

**а)** $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(cos\frac{n\pi}{4}+i\ sin\frac{n\pi}{4}\right)$, $\quad n\in N$;

**б)** $(1+cos\alpha+isin\alpha)^n = 2^n cos\frac{n\alpha}{2}\left[cos\frac{n\alpha}{2}+i\ sin\frac{n\alpha}{2}\right]$, $n\in N$.

**12.** Да се пресметаат корените:

**а)** $\sqrt{-8+6i}$ ; Одг.: $\pm(1+3i)$.

**б)** $\sqrt[8]{-4}$ **;**

Одг.: $\sqrt[4]{2}\left[cos\frac{(2k+1)\pi}{8}+i\ sin\frac{(2k+1)\pi}{8}\right]$, $\quad (k = 0, 1, \ldots ,7)$.

**в)** $(1-i)^{\frac{3}{2}}$.

Одг.: $\sqrt[4]{8}\left[cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\ sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{2}\right]$, $\quad (k = 0, 1)$.

## ГЛАВА II

# БЕСКОНЕЧНИ НИЗИ ОД РЕАЛНИ БРОЕВИ

## 1. ПОИМ ЗА НИЗА И ВИДОВИ БРОЈНИ НИЗИ

### 1. 1. Поим за низа

За природните броеви наредени по големина

$$1, 2, 3, \ \dots\ , n, \ \dots$$

се вика дека претставуваат низа од природни броеви.

*Ако постои правило (закон) по кое на секој природен број му одговара по еден реален број, се добива низа од реални броеви:*

$$a_1, a_2, a_3, \ \dots\ , a_n, \ \dots\ . \tag{1}$$

За броевите $a_1, a_2, \ \dots\ , a_n, \ \dots$ велиме дека се ***членови на низата*** (1). За $a_n$ велиме дека е ***општ член на низата*** (1). Низата чиј општ член е $a_n$ кратко ќе ја означиме со $(a_n)$. Најчесто низата е зададена со израз за општиот член, $a_n = f(n)$.

**Примери:**

**1)** $a_n = \dfrac{1}{n}$; $\qquad 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ \dots\ , \dfrac{1}{n}, \ \dots$

**2)** $a_n = (-1)^{n+1}$; $\qquad 1, -1, 1, -1, \ \dots\ , (-1)^{n+1}, \ \dots$

**3)** $a_n = 1+\dfrac{(-1)^n}{n}$; $\qquad 0, \dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}, \ \dots\ , 1+\dfrac{(-1)^n}{n}, \ \dots$

**4)** $a_n = 2n$; $\qquad 2, 4, 6, \ \dots\ , 2n, \ \dots$

**5)** $a_n = (-1)^n n$. $\qquad -1, 2, -3, 4, \ \dots\ , (-1)^n n, \ \dots$

Низата може да биде зададена и описно.

**Пример 6.** *Општиот член на низате* $a_n$ *е* $n$*–тата цифра во бројот* $\sqrt{2}$ .

Тогаш ќе најдеме дека

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 1, \ \ldots \ .$$

**Пример 7.** *На секој природен број* $n$ *нека му одговара бројот од сите природни броеви, помали од* $n$ *и деливи со три.*

Така е зададена низата:

$$0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, \ \ldots \ .$$

Постои и друг начин на задавање низа, а тоа е рекурентниот начин. Се состои во тоа што се задава првиот член на низата и се укажува правилото на премин од $n$–тиот на $n$+1–от член. Така, имаме правило на постепено добивање на секој член од низата, тргнувајќи од првиот нејзин член. На овој начин може да бидат зададени аритметичка и геометриска прогресија.

Овој начин на задавање низа може малку и де се измени:

На пример, да се зададат првите два члена на низата и секој нејзин член $a_n\,(n\geq 3)$ да се изрази со претходните два члена.

**Пример 8.** *Дадени сечленовите на низата*:

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_n = a_{n-1}-2a_{n-2} \quad (n=3,4, \ldots).$$

Така следните членови на низата се:

$$a_3 = a_2-2a_1= 0, \ \ a_4 = a_3-2a_2 = -\,4, \ldots \ .$$

За низата $(a_n)$ велиме дека е ***мајорирана*** **(*ограничена од десно*)** ако постои таков реален број $M$ што $a_n \leq M$ за секој природен број $n$. Секој број со оваа особина го викаме ***мајорант*** (***десна граница***). Ако низата е мајорирана, тогаш постои најмал мајорант кој се вика ***супремум на низата*** $(a_n)$ и се означува со $\sup a_n$.

Слично, секој реален број со особина $m\leq a_n$, за секој $n\in N$ се вика ***минорант*** (***лева граница***) на низата $(a_n)$, а за низата велиме дека е ***минорирана*** (***ограничена од лево***). Ако низата $(a_n)$ е минорирана низа, тогаш меѓу сите миноранти постои најголем минорант кој се вика ***инфимум на низата*** и се означува со $\inf a_n$.

Низата што е мајорирана и минорирана се вика ***ограничена низа***.

Низата од примерот **1)** е ограничена бидејќи $\frac{1}{n} \in (0,1]$ односно $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ за секој $n \in N$.

Низата од примерот **2)** $a_n = (-1)^{n+1}$ е исто така ограничена низа, бидејќи $|a_n| = 1$;

Низата од примерот **3)** е ограничена бидејќи $1 + \frac{(-1)^n}{n} \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ т.е. $0 \leq 1 + \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{3}{2}$ за секој $n \in N$.

За примерите:

**1)** $inf\,\frac{1}{n} = 0, \qquad sup\,\frac{1}{n} = 1;$

**2)** $inf\,(-1)^{n+1} = -1, \qquad sup\,(-1)^{n+1} = 1;$

**3)** $inf\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0, \quad sup\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{3}{2};$

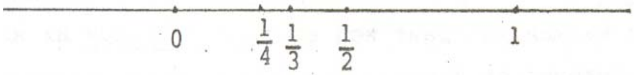
Низата **4)** е минорирана $inf(2n) = 2$, но таа не е мајорирана.

Една низа може да биде ни мајорирана ни минорирана. Таква , на пример, е низата со општ член $a_n = (-1)^n n$, т.е.

$$-1, 2, -3, 4, \ \ldots\ , \ (-1)^n n, \ \ldots \qquad (\text{пр.}\mathbf{5}).$$

Членовите на една низа можат геометриски да се претставуваат со точки од бројната права.

Ако низата е ограничена, тогаш сите точки со кои е претставена низата ќе лежат на отсечка ограничена од $inf a_n$ и $sup a_n$. На пример низата од примерот **1)** е претставена со точки од отсечката (0,1].



Ако низата е неограничена, тогаш точките се распоредени на полуправа или целата права.

## 1. 2. Монотони низи

*За низата* $(a_n)$ *велиме дека* ***монотоно расте*** *ако* $a_n < a_{n+1}$ *за секој* $n \in N$, *ако пак* $a_n \leq a_{n+1}$ *тогаш низата* $(a_n)$ *викаме дека* ***не опаѓа.***

*За низата* $(a_n)$ *викаме дека* ***монотоно опаѓа*** *ако* $a_n > a_{n+1}$, *а* ***не расте*** *ако* $a_n \geq a_{n+1}$ *за секој* $n \in N$ .

Секоја низа од овој вид се вика ***монотона низа***. *Низите што растат и низите што опаѓаат се викаат* ***строго монотони низи***.

Низата од примерот **4)** монотоно расте, а таа од примерот **1)** монотоно опаѓа. Низата од примерот **2)** ниту расте ниту опаѓа. Таа е немонотона низа.

**Забелешка:** Од дефинициите за монотоност, за практично определување дали низата опаѓа или расте доволно е да се определи соодветно знакот на разликата од $n$-тиот и $n$+1 член на низата или дали количникот од тие два соседни члена е поголем или помал од 1.

**Пример 9.** *Да се покаже дека низата со општ член* $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ *монотоно расте.*

Навистина, $n$-тиот и $n$+1 -от член на низата се

$$a_n = \frac{n-1}{n} \quad \text{и} \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} .$$

Ако ја определиме разликата

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - (n-1)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0,$$

т.е $a_n < a_{n+1}$. Значи дадената низа строго расте.

## 1. 3. Точка на натрупување

Нека

$$a_1, a_2, \ \dots \ , a_n, \ \dots$$

е бесконечна бројна низа.

За реалниот број $a$ велиме дека е ***точка на натрупување на низата*** $(a_н)$ ако за кој и да било број $\varepsilon>0$ постојат бескрајно многу членови од низата што припаѓаат на интервалот $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Геометриски тоа значи дека бескрајно многу точки од низата лежат во секоја отсечка со должина $2\varepsilon$, чија средина е точката $a$, без оглед колку мало е одбрано $\varepsilon$. Точката на натрупување може, а и не мора да припаѓа на низата.

Низата од примерот **1)** има една точка на натрупување, а тоа е точката 0. Низата од примерот **2)** има две точки на натрупување $+1$ и $-1$.

Низата од примерот **3)** има една точка на натрупување, а тоа е 1.

Низата од примерот **4)** нема точка на натрупување. Исто и низата од примерот **5)**.

Една бесконечна бројна низа може да има и неограничено многу точки на натрупување.

## 2. КОНВЕРГЕНТНИ НИЗИ

### 2. 1. Граница на низа

*Бројот* $a$ *се вика* ***граница на низата*** $(a_n)$, ако за секој позитивен реален број $\varepsilon$ може да се најде природен број $n_0$ (кој зависи од $\varepsilon$) таков што да е исполнето неравенството

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{за секој} \quad n > n_0.$$

Во тој случај пишуваме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{или} \quad a_n \to a \ \text{кога}\ n \to \infty.$$

Од дефиницијата за граница на низа се гледа, ако $a$ е граница на низата $(a_n)$, тогаш за произволно мало $\varepsilon>0$ во $\varepsilon$–околината на точката $a$ се наоѓаат сите членови на низата, почнувајќи од членот со индекс $n_0+1$, т.е. $a_n\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ за $n>n_0$, а само конечен број членови надвор од тој интервал ($n_0$ –членови).

*Низата што има граница се вика* ***конвергентна низа****.*

*Низа што нема граница се вика* ***дивергентна низа.***

**Пример 1.** *Да се покаже дека низата*

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

*има граница* 1.

Од дефиницијата за граница на низа следува

$$|a_n - 1| < \varepsilon,$$

т.е.

$$\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right| < \varepsilon\,, \quad \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon\,,$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon\,, \quad n > \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Значи, навистина

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right] =1.$$

Овде за $n_0$, ако $\frac{1}{\varepsilon}$ не е природен број, може да се земе најголемиот природен број кој е помал од $\frac{1}{\varepsilon}$ и тоа се означува $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ или $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, (што се чита цел дел од $\frac{1}{\varepsilon}$). На пример, ако $\varepsilon = 10^{-3}$, $n_0 = 1000$, ако пак $\varepsilon = 7\cdot10^{-3}$, тогаш $n_0 = \left[\frac{1000}{7}\right] = [142{,}8] = 142$.

Во случајот кога $\varepsilon = 10^{-3}$ сите членови со индекс почнувајќи од 1001 припаѓаат на интервалот $(1-10^{-3},\ 1+10^{-3})$, а надвор од тој интервал има само 1000 членови.

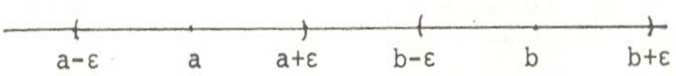
Во случајот кога $\varepsilon = 7\cdot10^{-3}$ сите членови со индекс почнувајќи од 143 се во интервалот $(1-7\cdot10^{-3},\ 1+7\cdot10^{-3})$, а само 142 члена се надвор од тој интервал, т.е. кога е $\varepsilon$ поголемо, тогаш $n_0$ е помало и обратно кога ε е помало $n_0$ е поголемо, односно се гледа дека $n_0$ зависи од ε. Оваа низа е конвергентна.

Низите од примерите **1)** и **3)** се конвергентни, а низите од примерите **2)**, **4)** и **5)** се дивергентни (од **т.1.1**).

## 2. 2. Некои особини на конвергентни низи

**Теорема 1.** *Ако низата* $(a_n)$ *е конвергентна, тогаш нејзината граница е еднозначно определена.*

**Доказ:** Да претпоставиме дека низата $(a_n)$ има две граници $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и притоа $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$. Ако ставиме $\varepsilon = \frac{1}{3}|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|$, ќе добиеме дека интервалите $(\boldsymbol{a}-\varepsilon, \boldsymbol{a}+\varepsilon)$ и $(\boldsymbol{b}-\varepsilon, \boldsymbol{b}+\varepsilon)$ немаат заеднички точки.



Од тоа што $\boldsymbol{a}$ е граница на низата $(a_n)$ следува дека надвор од интервалот $(\boldsymbol{a}-\varepsilon, \boldsymbol{a}+\varepsilon)$ се наоѓаат конечен број членови на низата, па значи во интервалот $(\boldsymbol{b}-\varepsilon, \boldsymbol{b}+\varepsilon)$ има конечен број членови, од каде што следува дека $\boldsymbol{b}$ не е граница на низата.

**Теорема 2.** *Секоја конвергентна низа е ограничена.*

**Доказ:** Нека $(a_n)$ е конвергентна низа и има граница $\boldsymbol{a}$ и нека ε е некој позитивен реален број. Тогаш само конечен број членови на низата се надвор од интервалот $(\boldsymbol{a}-\varepsilon, \boldsymbol{a}+\varepsilon)$, т.е. за некој природен број $n_0$,

$$a_n \in (\boldsymbol{a}-\varepsilon, \boldsymbol{a}+\varepsilon) \quad \text{ако} \quad n > n_0.$$

Нека

$$M = max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, \boldsymbol{a}+\varepsilon\}$$

($M$ е најголемиот од овие броеви) и

$$m = min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, \boldsymbol{a}-\varepsilon\}$$

($m$ е најмалиот од броевите во заградата).

Тогаш е очигледно дека $m \le a_n \le M$ за секој $n \in N$ што покажува дека навистина низата е ограничена.

Забележуваме дека обратното не важи, т.е. не секоја ограничена низа е и конвергентна (пр. **2**, **т.1.1**)

**Теорема 3.** *Секоја монотона и ограничена низа е конвергентна.*

**Доказ.** Нека низата $(a_n)$ не опаѓа и е мајорирана. Од тоа следува дека постои $\sup a_n = \boldsymbol{a}$. Ќе покажеме дека $\boldsymbol{a}$ е граница на низата. Од дефиницијата за супремум, за секој ε постои природен број $n_0$ таков што $\boldsymbol{a} - \varepsilon < a_{n_0} < \boldsymbol{a}$. Тогаш, бидејќи низата не опаѓа, за сите $n > n_0$ ќе имаме $\boldsymbol{a} - \varepsilon < a_n \le \boldsymbol{a}$, што значи

$$a_n \in (\boldsymbol{a}-\varepsilon, \boldsymbol{a}) \subset (\boldsymbol{a}-\varepsilon, \boldsymbol{a}+\varepsilon) \text{ за секој } n > n_0, \text{ т.е. } \lim_{n\to\infty} a_n = \boldsymbol{a}.$$

На сосема ист начин се докажува и

**Теорема 4:** *Секоја монотона низа што опаѓа и е ограничена оздола е конвергентна и има граница* $\boldsymbol{a} = \inf a_n$.

**Пример 2.** *Да се покаже дека низата* $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ *е конвергентна.*

Покажавме дека низата строго монотоно расте (пр.**9**,**т.1.2**).

Бидејќи

$$|a_n| = \left|\frac{n-1}{n}\right| = \left|1 - \frac{1}{n}\right| < 1 \qquad (\forall\, n \in N),$$

следува дадената низа е ограничена.

Значи, оваа низа е конвергентна и има граница $\boldsymbol{a} = 1$.

**Пример 3.** *Ќе ја разгледаме низата*

$$\sqrt{a}\,,\ \sqrt{a+\sqrt{a}}\,,\ \ldots\,,\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ \ldots\ +\sqrt{a_{.n}}}}}_{n-\text{корени}}\,,\ \ldots$$

*и ќе покажеме дека е конвергентна.*

Општиот член на оваа низа е:

$$a_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ \ldots\ +\sqrt{a_{.n}}}}}_{n-\text{корени}}\ .$$

Од формулата непосредно следува дека:

$$a_{n+1} = \sqrt{a + a_n} \ . \tag{1}$$

Ќе покажеме дека разгледуваната низа расте. За таа цел ќе се послужиме со методот на математичка индукција. Јасно е дека

$$\sqrt{a + \sqrt{a}} > \sqrt{a}, \quad \text{т.е.} \quad a_2 > a_1.$$

Ќе претпоставиме дека за некој $n > 1$

$$a_n > a_{n-1}.$$

Од (1) следува:

$$a_{n+1}^{\ 2} = a + a_n > a + a_{n-1} = a_n^{\ 2},$$

т.е. $a_{n+1} > a_n$. Со тоа монотоноста на низата е докажана.

Ќе покажеме дека низата е ограничена, т.е. дека за секој $n$

$$a_n < \sqrt{a} + 1.$$

Навистина

$$a_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a} + 1.$$

Ако претпоставиме дека за некој $n$ е исполнето неравенството

$$a_n < \sqrt{a} + 1, \tag{2}$$

тогаш од (1) се добива:

$$a_{n+1} = \sqrt{a + a_n} < \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} < \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{a} + 1\right)^2} = \sqrt{a} + 1,$$

а со тоа докажавме дека неравенството (2) е исполнето за секој $n$, т.е. дека разгледуваната низа е ограничена одозгора.

Од **теоремата 3** следува дека дадената низа има граница. Таа граница нека ја означиме со $\boldsymbol{b}$. Ќе забележиме дека и низата $(a_{n+1})$ ја има истата граница,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}^{\ 2} = \boldsymbol{b}^2 \qquad \lim_{n\to\infty} (a + a_n) = a + \boldsymbol{b}.$$

Од равенството (1) следува:

$$\boldsymbol{b}^2 = a + \boldsymbol{b}. \tag{3}$$

Бидејќи членовите на разгледуваната низа се позитивни и границата на низата ќе биде позитивниот корен на равенката (3), односно:

$$\boldsymbol{b} = \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}.$$

**Теорема 5.** *Ако низите* $(a_n)$ *и* $(b_n)$ *се конвергентни и имаат иста граница* $\boldsymbol{a}$ *и низата* $(c_n)$ *е таква што*

$$a_n \le c_n \le b_n \quad \text{за секој } n \in N,$$

*тогаш низата* $(c_n)$ *ќе биде конвергентна, при што* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \boldsymbol{a}$.

**Доказ:** Од $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ следува дека за кој и да било реален број $\varepsilon>0$, постојат природни броеви $n_1$ и $n_2$ такви што $\boldsymbol{a}-\varepsilon < a_n$ (за $n>n_1$) и $b_n < \boldsymbol{a}+\varepsilon$ $(n>n_2)$.

Нека $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. За $n > n_0$ имаме:

$$\boldsymbol{a}-\varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < \boldsymbol{a}+\varepsilon,$$

што значи дека и

$$c_n \in (\boldsymbol{a}-\varepsilon, \boldsymbol{a}+\varepsilon), \qquad \text{за } n > n_0,$$

па следува дека и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \boldsymbol{a}$.

**Пример 4.** *Да се определи границата на низата*

$$a_n = \frac{\sin n}{n}.$$

Бидејќи е

$$-1 \le \sin n \le 1$$

и бидејќи низите $\left(-\frac{1}{n}\right)$ и $\left(\frac{1}{n}\right)$ конвергираат кон нула, според **теорамата 5** следува:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Низата со општ член $a_n = \dfrac{n}{\sin n}$ е не ограничена, бидејќи $\left|\dfrac{n}{\sin n}\right| > n$. Од **теоремата 2** следува дека нема граница.

**Пример 5.** *Да се најде границата на низата чиј општ член е*

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Секој собирок на дадената сума зависи од $n$ и е поголем од последниот, а помал од првиот собирок. Затоа

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < a_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

т.е. за членовите на низата $a_n$ важи

$$b_n < a_n < c_n,$$

каде што

$$b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}, \quad c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$, следува дека и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

**Теорема 6.** *Ако* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \boldsymbol{a} \neq 0$, *тогаш постои природен број* $n_0$ *таков што* $|a_n| > \frac{|\boldsymbol{a}|}{2}$ *за* $n > n_0$.

*Уште повеќе, ако* $\boldsymbol{a} > 0$, *тогаш* $a_n > \frac{\boldsymbol{a}}{2}$, *а ако* $\boldsymbol{a} < 0$, *тогаш* $a_n < \frac{\boldsymbol{a}}{2}$, *за* $n > n_0$. *Членовите на низата* $(a_n)$ *имаат ист знак како и* $\boldsymbol{a}$ *почнувајќи од некој природен број.*

**Доказ:** Нека низата $(a_n)$ има граница $\boldsymbol{a}$. Ако земеме $\varepsilon = \frac{\boldsymbol{a}}{2}$, според дефиницијата за граница постои природен број $n_0$ таков што

$$|\boldsymbol{a} - a_n| < \frac{|\boldsymbol{a}|}{2}, \quad \forall\, n > n_0,$$

а од својството за апсолутна вредност за разлика

$$|\boldsymbol{a}| - |a_n| < |\boldsymbol{a} - a_n|$$

т.е.

$$|a_n| > |\boldsymbol{a}| - \frac{|\boldsymbol{a}|}{2} = \frac{|\boldsymbol{a}|}{2}.$$

Првиот дел од теоремата е докажан.

Неравенството

$$|\boldsymbol{a} - a_n| < \frac{|\boldsymbol{a}|}{2}$$

е еквивалентно со неравенството

$$\boldsymbol{a} - \frac{|\boldsymbol{a}|}{2} < a_n < \boldsymbol{a} + \frac{|\boldsymbol{a}|}{2}.$$

Ако $\boldsymbol{a} > 0$, тогаш $\frac{\boldsymbol{a}}{2} = \boldsymbol{a} - \frac{|\boldsymbol{a}|}{2} < a_n$ за $n > n_0$

и ако $\boldsymbol{a} < 0$, тогаш $a_n < \boldsymbol{a} + \frac{|\boldsymbol{a}|}{2} = \boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{a}}{2} = \frac{\boldsymbol{a}}{2}$ .

## 2. ОПЕРАЦИИ СО КОНВЕРГЕНТНИ НИЗИ

Нека $(a_n)$ и $(b_n)$ се две низи од реални броеви. Тогаш низите $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ $(b_n \neq 0$ за $n \in N)$ се викаат соодветно збир, разлика, производ и количник на низите $(a_n)$ и $(b_n)$.

Се поставува прашање дали конвергентноста на новоформираните низи ќе зависи од конвергентноста на дадените низи. Одговорот на тоа прашање е содржан во следнава теорема.

**Теорема 7.** *Ако* $(a_n)$ *и* $(b_n)$ *се конвергентни низи и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \boldsymbol{a}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \boldsymbol{b}$, *тогаш се конвергентни и низите* $(a_n \pm b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ *и ако уште* $\boldsymbol{b} \neq 0$ *конвергентна е и низата* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$. *Притоа важи*:

**а)** $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

**б)** $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

**в)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

**Доказ: а)** Нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \boldsymbol{a}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \boldsymbol{b}$ и нека ε₁ е кој и да било реален позитивен број и нека $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$, тогаш од конвергентноста на низите $(a_n)$ *и* $(b_n)$ следува дека постојат броевите $n_1$ и $n_2$ такви што

$$|a_n - \boldsymbol{a}| < \varepsilon_1 \quad \text{за} \quad n > n_1$$

и

$$|b_n - \boldsymbol{b}| < \varepsilon_1 \quad \text{за} \quad n > n_2.$$

Ако $n_0 = max\,\{n_1, n_2\}$, тогаш:

$$|a_n - \boldsymbol{a}| < \varepsilon_1, \quad |b_n - \boldsymbol{b}| < \varepsilon_1 \quad \text{за } n > n_0,$$

па за низата збир следува:

$$|(a_n + b_n) - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})| = |(a_n - \boldsymbol{a}) + (b_n - \boldsymbol{b})| \le$$

$$\le |a_n - \boldsymbol{a}| + |b_n - \boldsymbol{b}| \;\; < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon;$$

односно за низата разлика:

$$|(a_n - b_n) - (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})| = |(a_n - \boldsymbol{a}) - (b_n - \boldsymbol{b})| \le$$

$$\le |a_n - \boldsymbol{a}| + |b_n - \boldsymbol{b}| \;\; < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

со што е покажана конвергентноста на низите $(a_n+b_n)$ и $(a_n-b_n)$, како и

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

**б)** Бидејќи низите $(a_n)$ и $(b_n)$ по претпоставка се конвергентни (според **теорема 2**), тие се и ограничени, т.е.

$$m_1 \le a_n \le M_1 \quad \text{и} \quad m_2 \le b_n \le M_2 \quad \text{за секој } n \in N.$$

Ставајќи $A = max\,\{|m_1|, |m_2|, |M_1|, |M_2|\}$, добиваме дека

$$|a_n| < A \text{ и } |b_n| < A \text{ за секој } n \in N.$$

Од конвергентноста на низите ($a_n$) и ($b_n$) следува дека за произволно $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{A+|a|}$ постојат природни броеви $n_1$ и $n_2$ такви што

$$|a_n - \boldsymbol{a}| < \varepsilon_1 \qquad \text{за} \quad n > n_1$$

и

$$|b_n - \boldsymbol{b}| < \varepsilon_1 \qquad \text{за} \quad n > n_2.$$

Ако $n_0 = max\,\{n_1, n_2\}$, тогаш:

$$|a_n b_n - \boldsymbol{ab}| = |(a_n b_n - \boldsymbol{a}b_n) + (\boldsymbol{a}b_n - \boldsymbol{ab})| \leq$$

$$\leq |a_n b_n - \boldsymbol{a}b_n| + |\boldsymbol{a}b_n - \boldsymbol{ab}| = |a_n - \boldsymbol{a}| \cdot |b_n| + |\boldsymbol{a}| \cdot |b_n - \boldsymbol{b}| <$$

$$< \varepsilon_1 \cdot A + |\boldsymbol{a}| \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon_1 (A + |\boldsymbol{a}|) = \varepsilon.$$

Со тоа докажавме дека

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Специјален случај: ако низата ($a_n$) конвергира кон $\boldsymbol{a}$, и $k$ е произволен реален број, тогаш низата ($ka_n$) е конвергентна и има граница $k\boldsymbol{a}$.

**в)** Претпоставуваме дека низите ($a_n$) и ($b_n$) се конвергентни и дека $b_n \neq 0$ за секој $n \in N$ и $\boldsymbol{b} \neq 0$.

Го разгледуваме изразот

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right| = \left|\frac{a_n \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}b_n}{\boldsymbol{b} \cdot b_n}\right| = \left|\frac{a_n \boldsymbol{b} - \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ab} - \boldsymbol{a}b_n}{\boldsymbol{b} \cdot b_n}\right| =$$

$$= \left|\frac{\boldsymbol{b}(a_n - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} - b_n)}{\boldsymbol{b} \cdot b_n}\right| \leq \frac{|\boldsymbol{b}|\,|a_n - \boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b} - b_n|}{|\boldsymbol{b}| \cdot |b_n|} =$$

$$= \frac{|a_n - \boldsymbol{a}|}{|b_n|} + \frac{|\boldsymbol{b} - b_n|}{|b_n|} \cdot \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}.$$

Според **теоремата 6**, постои број $n_1$ таков што $|b_n| > \dfrac{|\boldsymbol{b}|}{2}$, за $n > n_1$.

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right| < \frac{|a_n-\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\cdot 2+\frac{|\boldsymbol{b}-b_n|}{|\boldsymbol{b}|}\cdot 2\cdot\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}, \quad n > n_1.$$

Од конвергенцијата на низите $(a_n)$ и $(b_n)$ следува дека постојат природни броеви $n_2$ и $n_3$ такви што да важи:

$$|a_n-\boldsymbol{a}| < \frac{\varepsilon|\boldsymbol{b}|}{4} \qquad \text{за} \quad n > n_2$$

$$|b_n-\boldsymbol{b}| < \frac{\varepsilon|\boldsymbol{b}|^2}{4|\boldsymbol{a}|} \qquad \text{за} \quad n > n_3.$$

Нека $n_0 = max\,\{n_1, n_2, n_3\}$, тогаш

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad \text{за } n > n_0$$

т.е. покажавме дека

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

## 4. НУЛА-НИЗА. НИЗИ ШТО НЕОГРАНИЧЕНО РАСТАТ ПО АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ

*Ако* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *тогаш за низата* $(a_n)$ *велиме дека станува бескрајно мала по апсолутна вредност или дека е* ***нула-низа.***

*За* ***низата*** $(a_n)$ *велиме дека* ***неограничено расте по апсолутна вредност*** *ако за секој реален позитивен број* $K$ *постои природен број* $n_0$ *таков што* $|a_n| > K$ за $n > n_0$ ($n_0$ зависи од $K$).

Секоја низа од овој вид е неограничена, па според **теорема 2** е дивергентна, и пишуваме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Ако за секој позитивен реален број $K$, постои природен број $n_0$, таков што

$$a_n > K \quad \text{за} \quad n>n_0,$$

тогаш велиме дека низата $(a_n)$ се стреми кон $+\infty$ и пишуваме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty .$$

Аналогно, за низата $(a_n)$ велиме дека се стреми кон $-\infty$, ако за секој позитивен реален број $K$, постои природен број $n_0$, таков што

$$a_n < -K \quad \text{за} \quad \forall n>n_0,$$

па пишуваме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty .$$

**Примери:**

**1)** $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty .$ ( $K = 10000$, $n^2 > 10000$, $n>100$, $n_0 = 100$).

**2)** $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty .$ ( $K = 2^{18}$, $2^n > 2^{18}$, $n > 18$, $n_0 = 18$).

**3)** $\lim\limits_{n\to\infty} -5^n = -\infty$ ( $K = 5^{20}$, $-5^n < -5^{20}$, $n > 20$, $n_0 = 20$).

**Теорема 8.** *Ако е* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *и* $a_n \neq 0$ *за* $\forall n \in N$ *тогаш,* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty .$

**Доказ:** Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, тогаш од дефиницијата за граница на низа следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0$ таков што $|a_n| < \varepsilon$ за $n>n_0$. Нека $K$ е произволен реален број и нека ставиме $\varepsilon = \dfrac{1}{K}$, тогаш за $n > n_0$ од $|a_n| < \varepsilon$ се добива:

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon} = K, \qquad \text{т.е.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty .$$

Важи и обратната теорема.

**Теорема 9.** Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ *и* $a_n \neq 0$ *за* $\forall n \in N$ *тогаш,* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0.$

**Доказ:** Нека $\varepsilon > 0$ и нека $K = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Од $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ следува дека постои таков број $n_0$ што

$$\left| a_n \right| > K \quad \text{за} \quad n > n_0$$

од каде што

$$\left| \frac{1}{a_n} \right| < \frac{1}{K} = \varepsilon, \qquad \text{т.е.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

**Примери: 1)** *Да се определи конвергенцијата на низата со општ член*

$$a_n = q^n.$$

За $0 < q < 1$ низата монотоно опаѓа бидејќи

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1, \quad a_{n+1} < a_n$$

и е ограничена одоздола. Според тоа (**теорема 3**) има граница $\boldsymbol{a}$, па

$$\boldsymbol{a} = \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \lim_{n\to\infty} q^n \cdot q = q \cdot \lim_{n\to\infty} q^n = q \cdot \boldsymbol{a},$$

од каде што следува:

$$\boldsymbol{a}(1-q) = 0, \text{ а бидејќи } q \neq 1, \text{ следува } \boldsymbol{a} = 0.$$

Ако $q > 1$, тогаш $0 < \dfrac{1}{q} < 1$. Од **теоремата 7** следува

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} = \infty.$$

**2)** *Да се докаже дека* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0.$

**Доказ:** Нека $a$ е произволен реален број. Постои природен број $k$ таков што $|a| < k$. Бројот $\dfrac{|a|}{k}$ го означуваме со $\theta$, т.е.

$$\frac{|a|}{k} = \theta < 1,$$

па броевите $\dfrac{|a|}{k+1}, \dfrac{|a|}{k+2}, \ldots$ сите се помали од $\theta$ , а $0< \theta < 1$.

За секој број $n > k$ се добива:

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^k}{k!}\cdot\frac{|a|}{k+1}\cdot\frac{|a|}{k+2}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{|a|}{n} \le \frac{|a|^k}{k!}\theta^{n-k} =$$

$$= \frac{|a|^k}{k!}\cdot\frac{\theta^n}{\theta^k}.$$

Бидејќи $0< \theta < 1$ следува $\theta^n \to 0$, кога $n \to \infty$ затоа и $\dfrac{a^n}{n!} \to 0$ кога $n \to \infty$.

**3)** *Да се испита низата* $a_n = 1 + q + \ \ldots\ + q^{n-1}$.

- За $q = 1$, $a_n = n$ и тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$;
- за $q = -1$, низата 1, 0, 1, 0, ... е дивергентна:
- за $|q| < 1$, општиот член на низата може да се запише во вид

$$a_n = \frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{q^n}{q-1} - \frac{1}{q-1},$$

тогаш

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{0}{q-1} - \frac{1}{q-1} = \frac{1}{q-1},$$

а тоа значи дека низата е конвергентна.

- за $|q| > 1$ следува $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, (бидејќи $q^n \to \infty$)

т.е. низата е дивергентна.

## 5. БРОЈОТ e

Да ја разгледаме низата со општ член

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ќе покажеме дека оваа низа е конвергентна. За таа цел ќе покажеме дека е монотоно растечка и ограничена.

**1⁰** Низата $(a_n)$ монотоно расте.

Според биномната формула општиот член на низата $a_n$ се запишува во вид:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ \dots\ + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1+ \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \ \dots + \frac{n(n-1)\dots\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ \dots\ + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right);$$

соодветно, $n$+1-от член е

$$a_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \ \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Од споредувањето на изразите за $a_n$ и $a_{n+1}$ следува $a_n<a_{n+1}$, што значи дека навистина низата монотоно расте.

**$2^0$** Низата ($a_n$) е мајорирана.

Бидејќи $1-\frac{i}{n}<1$ ($i=1, 2, \ldots, n-1$), за $a_n$ се добива изразот:

$$a_n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\ \ldots+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ \ldots\ +\frac{1}{2^{n-1}},$$

па значи

$$a_n < 1+1\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1} = 1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{-\frac{1}{2}} = 1+2-\left(\frac{1}{2}\right)^n < 3,$$

т.е. низата ($a_n$) е мајорирана.

Со тоа покажавме дека разгледуваната низа е конвергентна (**теорема 3.**).

Нејзината граница ја означуваме со *e*, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Според разгледуваното може да се заклучи дека $2 < e < 3$.

Се покажува дека бројот *e* е ирационален број чии први цифри се: 2,718281… .

**Пример 1.** *Да се најде границата на низата чиј општ член е*

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

За да ја најдеме границата на низата ќе ги извршиме следниве операции:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\boldsymbol{n}-1}\right)^{\boldsymbol{n}-1}} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\boldsymbol{n}-1}\right)} = \frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

**Пример 2.** *Да се најде границата на низата чиј општ член е*

$$a_{\boldsymbol{n}} = \left(1+\frac{k}{n}\right)^n,$$

*каде што* $k \in N$.

За да ја најдеме границата на низата ќе ги извршиме следниве операции:

$$\lim_{n\to\infty} a_{\boldsymbol{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}\cdot k} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^k =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^k = e^k.$$

# 6. ТЕОРЕМА НА БОЛЦАНО-ВАЕРШТРАС И КОШИЕВА ТЕОРЕМА

Да изнесеме уште неколку особини на конвергентни низи меѓу кои и т.н. основен критериум за конвергенција.

Видовме дека секоја ограничена низа не мора да е конвергентна, додека постоење на точка на натрупување за ограничена низа е дадено со теоремата на Болцано-Ваерштрас.

## 6. 1. Теорема на Болцано-Ваерштрас

Теоремата на Болцано-Ваерштрас гласи: ***Секоја бесконечна ограничена низа има барем една точка на натрупување.***

**Доказ:** Нека низата $(a_n)$ е бесконечна и ограничена, тогаш постојат реални броеви $m$ и $M$ такви што

$$m \leq a_n \leq M \quad \text{за} \quad \forall\, n \in N,$$

каде што $m = inf a_n$ , $M = sup a_n$. Интервалот $[m,M]$ да го поделиме на два еднакви дела. Барем една од половините на тој интервал содржи бесконечно многу членови на низата $(a_n)$, во спротивно, интервалот $[m,M]$ би содржел конечно многу членови.

Нека $[m_1,M_1]$ е половината од интервалот $[m,M]$ која содржи бесконечно многу членови од низата $(a_n)$. Ако и двете половини содржат бесконечно многу членови, тогаш изборот е произволен. Интервалот $[m_1,M_1]$ го делиме на два еднакви дела и постапуваме аналогно, па доаѓаме до интервалот $[m_2,M_2]$ кој содржи бесконечно многу членови на низата $(a_n)$. Процесот ако се продолжи се доаѓа до бесконечна низа од вложени интервали:

$$[m,M] \supset [m_1,M_1] \supset [m_2,M_2] \supset \ \dots \ \supset [m_n,M_n] \supset \dots$$

каде очигледно е дека

$$M_n - m_n = \frac{M-m}{2^n} \qquad \text{т.е.} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{M-m}{2^n} = 0,$$

а тоа е низа вложени отсечки чија должина тежи кон нула.

Според тоа, постои единствена точка која припаѓа на сите интервали

$$[m_n, M_n], \quad n = 1, 2, 3, \ \dots \ .$$

Нека таа точка ја означиме со $\boldsymbol{c}$, па

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} M_n = \boldsymbol{c}.$$

Од дефиницијата за граница на низа следува дека за секој реален број ε може да се најде таков број $n$ што

$$\boldsymbol{c} - \varepsilon < m_n < M_n < \boldsymbol{c}+\varepsilon, \quad [m_n, M_n] \subset (\boldsymbol{c}-\varepsilon, \boldsymbol{c}+\varepsilon).$$

Бидејќи интервалот $[m_n, M_n]$ содржи бесконечно многу членови од низата $(a_n)$, и во интервалот $(\boldsymbol{c}-\varepsilon, \boldsymbol{c}+\varepsilon)$ има исто така бесконечно многу членови на низата $(a_n)$, а тоа значи дека $\boldsymbol{c}$ е точка на натрупување на низата $(a_n)$.

Со тоа теоремата е докажана.

## 6. 2. Кошиев критериум за конвергенција на низи

*Низата* $(a_n)$ *е конвергентна ако и само ако за секој реален број* $\varepsilon>0$ *постои природен број* $n_0$ *таков што*

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \quad \text{за} \quad \forall n > n_0 \qquad (*)$$

*и за секој природен број* $p \geq 1$. (Основен Кошиев критериум).

**Доказ:** Нека низата $(a_n)$ е конвергентна и има граница $\boldsymbol{a}$. Од конвергенцијата на низата следува дека за произволно $\varepsilon>0$ постои природен број $n_0$ таков што

$$|a_n - \boldsymbol{a}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{за } \forall n > n_0$$

па важи и

$$|a_{n+p} - \boldsymbol{a}| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{за} \quad n+p > n_0, \quad p \geq 1,$$

тогаш

$$|a_{n+p} - a_n| = |a_{n+p} - \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} - a_n| = |(a_{n+p} - \boldsymbol{a}) - (a_n - \boldsymbol{a})| \leq$$

$$\leq |a_{n+p} - \boldsymbol{a}| - |a_n - \boldsymbol{a}| < \varepsilon.$$

Со тоа покажавме дека условот (*) е потребен.

Нека за секој произволен број $\varepsilon>0$ е исполнет условот

$$\left|a_{n+p}-a_n\right|<\varepsilon \qquad \text{за } \forall n>n_0,\ \forall\, p\geq 1, \quad (n, p\in N),$$

тогаш за $n = n_0+1$ се добива:

$$\left|a_{n+p}-a_{n_0+1}\right|<\varepsilon$$

или

$$a_{n_0+1}-\varepsilon<a_{n+p}<a_{n_0+1}+\varepsilon \qquad \text{за секој } \quad n>n_0,\ p>1.$$

Ако ставиме

$$M = max\ \{a_1, a_2, \dots, a_{n_0+1}+\varepsilon\}, \quad m = min\ \{a_1, a_2, \dots, a_{n_0+1}-\varepsilon\}$$

се добива дека $m \leq a_n \leq M$, за секој $n\in N$ т.е. низата е ограничена.

Од теоремата на Болцано-Ваерштрас, т.е. од тоа што докажавме дека низата е ограничена, следува дека таа има барем една точка на натрупување. Ќе докажеме дека низата $(a_n)$ има само една точка на натрупување.

Ако $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ се две различни точки на натрупување на низата $(a_n)$, тогаш во секој од интервалите $(\boldsymbol{a}-\varepsilon, \boldsymbol{a}+\varepsilon)$, $(\boldsymbol{b}-\varepsilon, \boldsymbol{b}+\varepsilon)$ има бесконечно многу членови од низата, а тоа значи дека апсолутна вредност на разликата помеѓу членовите кои припаѓаат на $(\boldsymbol{a}-\varepsilon,\boldsymbol{a}+\varepsilon)$ и тие на $(\boldsymbol{b}-\varepsilon,\boldsymbol{b}+\varepsilon)$ не би била помала од $\dfrac{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}{3}$. За $\varepsilon=\dfrac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{3}$ постојат бесконечно многу природни броеви $n$ и $p\geq 1$, такви што

$$a_n \in (\boldsymbol{a}-\varepsilon, \boldsymbol{a}+\varepsilon) \quad \text{и} \quad a_{n+p} \in (\boldsymbol{b}-\varepsilon, \boldsymbol{b}+\varepsilon),$$

а тогаш би добиле:

$$\varepsilon = 3\varepsilon-2\varepsilon = \left|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\right|-2\varepsilon \leq \left|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-2\varepsilon\right| =$$

$$= \left|(\boldsymbol{b}-\varepsilon)-(\boldsymbol{a}+\varepsilon)\right| < \left|a_{n+p}-a_n\right|,$$

што е спротивно на условот (*). Според тоа низата $(a_n)$ има само една точка на натрупување.

Докажавме дека од условот $\left|a_{n+p}-a_n\right|<\varepsilon$ следува дека низата $(a_n)$ е ограничена и дека има само една точка на натрупување, т.е. дека е конвергентна. Со тоа е докажана Кошиевата теорема.

## Задачи за вежбање

**1.** Да се напишат првите десет члена на низата зададена со општ член

$a_n = n^{(-1)^n}$  Одг.: $1,\ 2,\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{1}{5},\ 6,\ \frac{1}{7},\ 8,\ \frac{1}{9},\ 10.$

**2.** Да се напишат првите неколку члена на низите со општ член:

**а)** $a_n = \dfrac{n}{n+2}$  Одг.: **а)** $\frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{6},\ \dots$

**б)** $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n}$  **б)** $-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},-\frac{1}{6}\ ,\ \frac{1}{8},\ \dots$

**в)** $a_n = n^2–2n+1$  **в)** $0,\ 1,\ 4,\ \dots$

**3.** Знаејќи неколку први члена на низата, да се напише еден од можните изрази за општиот член:

**а)** $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \dots$ ;  Одг.: **а)** $a_n = \dfrac{n}{n+1}.$

**б)** $\frac{2}{1},\ \frac{4}{3},\ \frac{6}{5},\ \dots$ ;  **б)** $a_n = \dfrac{2n}{2n-1}.$

**в)** $\frac{2}{3},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{11},\ \frac{5}{18},\ \frac{6}{7},\ \dots$ ;  **в)** $a_n = \dfrac{n+1}{n^2+2}.$

**г)** $\sqrt{5}\ ,\ \sqrt{5\sqrt{5}}\ ,\ \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}\ ,\ \dots$ ;

*Упатство*: $a_1 = 5^{\frac{1}{2}}\ ,\ a_2 = 5^{\frac{3}{4}}\ ,\ \dots$ .  Одг.: $a_n = 5^{\left(2^n-1\right)/2^n}$ .

**д)** 0,2; 0,23; 0,233; … ; 0,233 … 3; …

$a_1 = 0{,}2$

$a_2 = 0{,}2+0{,}03 = 0{,}2 + \dfrac{3}{100}$

$a_3 = 0{,}2+0{,}03 = 0{,}2 + \dfrac{3}{100}+\dfrac{3}{1000} = 0{,}2 + \dfrac{3}{100}\left(1+\dfrac{1}{10}\right)$

$\vdots$

$$\vdots$$

$$a_n = 0{,}2 + \frac{3}{100}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ ...\ +\frac{1}{10^{n-2}}\right) =$$

$$= 0{,}2 + \frac{3}{100}\cdot\frac{\frac{1}{10^{n-1}}-1}{\frac{1}{10}-1}.$$

**4.** Да се најде $inf\, a_n$ и $sup\, a_n$ за низите:

**а)** $a_n = \dfrac{2n}{2n-1}$; Одг.: **а)** $1 < a_n \le 2$.

**б)** $a_n = sin\, n$; **б)** $-1 \le a_n \le 1$.

**в)** $0, 1, 0, 2, \ \dots\ , 0, n, \dots$ . **в)** $inf\, a_n = 0$, низата е неограничена.

**5.** Кои од следниве низи се монотони

**а)** $a_n = \dfrac{3n-1}{4n+1}$; Одг.: **а)** не опаѓа и е ограничена $0<a_n<1$.

**б)** $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$; **б)** не расте и е ограничена $0<a_n\le 1$.

**в)** $a_n = \left(2+(-1)^n n\right)$. **в)** не е монотона и е неограничена.

**6.** Да се докаже дека низата $\left(\dfrac{3^n+1}{3^n}\right)$ е ограничена и опаѓа.

**7.** Со помош на дефиницијата за граница на низа да се докаже дека

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

**8.** Да се најде границата $\boldsymbol{a}$ на низата и индексот $n_0$ почнувајќи од кој $|a_n - a| < \varepsilon$ за низите:

**а)** $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ за $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$.

Одг.: $\boldsymbol{a} = 0,\ n_0 = E\left(\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+1;\ n_0 = 4$ за $\varepsilon = 0{,}1$;

$n_0 = 11$ за $\varepsilon = 0{,}01$; $n_0 = 32$ за $\varepsilon = 0{,}001$.

**б)** $0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ \dots,\ 0{,}\underbrace{99\dots9}_{n},\ \dots$ за $\varepsilon = 0{,}0001$.

Одг.: $\boldsymbol{a} = 1,\ n_0 = 5$.

**9.** Познато е дека

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2-3n} = -\frac{2}{3}.$$

Да се најде бројот $n_0$, таков што за сите индекси $n > n_0$ да е исполнето неравенството:

$$\left|\frac{2n-1}{2-3n} + \frac{2}{3}\right| < 0{,}0001.$$

Одг.: $n_0 = 1112$.

**10.** Да се објасни конвергенцијата на низата:

$$\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{7}},\ \dots\ \frac{1}{\sqrt{2n+1}},\ \dots\ .$$

Одг.: Низата опаѓа и е ограничена одоздола.

**11.** Да се најдат границите на низите:

**1)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+4}{(n+2)^2}$; Одг.: **1)** 1.

**2)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\ \dots\ +n}{n^2}$; **2)** $\dfrac{1}{2}$.

**3)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\ \dots\ +(n-1)^2}{n^3}$; **3)** $\dfrac{1}{3}$.

**4)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$; Одг.: **4)** 0.

**5)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$; **5)** $\dfrac{1}{2}$.

**6)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$; **6)** 0.

**7)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ \dots\ +\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$; **7)** 1.

**8)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+3+5+\ \dots\ +(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right)$; **8)** $-\dfrac{3}{2}$.

**9)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\ \dots\ a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ \dots\ \frac{1}{4^n}}$.

Одг.: $|a|<1,\ \dfrac{3}{4(a-1)}$; $|a|\geq 1$, низата нема граница.

**10)** $\lim\limits_{n\to\infty} n[ln(n+1)-ln\,n]$; Одг. **10)** 1.

**11)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^n$; **11)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

**12)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$. **12)** $e^{\frac{-3}{2}}$.

## ГЛАВА III

# ФУНКЦИИ ОД ЕДНА РЕАЛНА НЕЗАВИСНО ПРОМЕНЛИВА

## 1. ПОИМ ЗА ФУНКЦИЈА

До поимот за функција може да се дојде изучувајќи ги односите меѓу различни големини при некои појави во природата и општеството.

Во геометријата, физиката и другите науки се сретнуваме со различни големини:

– *меѓу себе зависни големини* ( на пр. температура и време, должина и температура, периметарот на кружницата и нејзиниот радиус, плоштина на квардат и негова страна, волумен на топка и нејзин радиус ). Овие големини ги викаме ***променливи големини*** ;

– *големини кои не се менуваат* (на пр. бројот $\pi$ кој претставува однос помеѓу периметарот на кружницата и нејзиниот дијаметар). Овие големини ги викаме ***константи***.

Променливите големини примаат вредности од некое подмножество од множеството на реалните броеви или пак од целото множество на реалните броеви.

Ќе дадеме некои примери за променливи големини:

**1.** На секоја вредност на $r$ (радиус на кружница) од множеството на реалните позитивни броеви одговара една вредност за $L$ (периметар на кружница) од множеството на позитивните реални броеви по формулата $L = 2r\pi$.

**2.** На секоја вредност за $a$ (страна на квадрат) од множеството на позитивните реални броеви одговара една вредност за $P$ (плоштина на квадрат) од множеството на позитивните реални броеви по формулата $P = a^2$.

**3.** На секоја вредност на $t$ (време) од множеството на реални броеви од интервалот $[0,T]$ ($T$–време потребно телото слободно да падне) одговара една вредност за $s$ ($s$ – изминат пат на тело што слободно паѓа за време $t$) од множеството на позитивните реални броеви по формулата $s = \frac{gt^2}{2}$ ($g$ – земјино забрзување).

**4.** Во табелата е даден односот помеѓу вредностите на $r$ и соодветните вредности на $s$.

| $r$ | 10 | 15 | 50 | 75 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | 1.00 | 1.35 | 1.69 | 1.87 | 2.00 |

Разгледувајќи ги истовремено наведените примери, констатираме дека, пред сé, во секој пример се работи за две множества. Ќе ги означиме со $D$ и $G$. Потоа, постои некое правило (некоја формула), според кое се определува еден елемент $y$ од множеството $G$, кога е избран еден елемент $x$ од множеството $D$. Во сите овие примери се среќаваме со функција.

Поимот функција зазема едно од централните места во математиката. Функциите од реална променлива, што се предмет на наше изучување, се само еден специјален случај од општиот вид пресликувања што се сретнуваат во теоријата на множества.

Нека $D$ и $G$ се две множества. *Ако на секој елемент од множеството $D$ по некој пропис (правило), еднозначно му е придружен определен елемент од множеството $G$, велиме дека е определено* ***пресликување*** *$f$ од $D$ во $G$.* Ако елементот $x\in D$ се пресликува со $f$ во $y \in G$, пишуваме $f\colon x \to y$ или $y = f(x)$.

*Ако $D$ и $G$ се подмножества од множеството на реалните броеви $R$ и ако $f\colon x\to f(x)$ е пресликување од $D$ во $G$, тогаш велиме дека е определена една* ***функција*** *$y = f(x)$ во множеството на реалните броеви со* ***дефинициона област*** *$D$ и $G$ е* ***множество вредности на функцијата*** $y = f(x)$. Така на секој реален број $x\in D$ еднозначно му е придружен реален број $y = f(x)$ од $G$. Бидејќи $x$ се менува независно во $D$ го викаме ***независно***

***променлива*** (***аргумент***), додека $y$ велиме дека е ***зависно променлива*** или ***функција***.

Наместо ознаката $f$ може да се употребат и други букви. Ако разгледуваме различни функции од аргументот $x$, должни сме за нив да употребиме различни букви, а имено $g(x)$, $h(x)$, $F(x)$ и други.

Многу често за означување на функција се користи ознаката што е избрана за име на функцијата. Ако, на пример, со $x$ е означена независно променливата, а со $y$ зависно променливата, функционалната врска ќе се изрази во вид $y = y(x)$.

Ако разгледуваме две или повеќе функции, за нивно означување можеме да употребиме и $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ итн.

*Множеството $D$ се вика* ***дефинициона област*** *или* ***домен на функцијата****, а множеството $G$ се вика* ***множество од вредности на функцијата*** *кое му е придружено на множеството $D$.*

Во примерите **1** и **2**, $D$ е множеството од реалните броеви од интервалот $(0,+\infty)$, а $G$ е множеството $(0,+\infty)$.

Ако се апстрахираме од значењето на независно променливата големина, функциите во овие примери се дефинирани во интервалот $(-\infty,+\infty)$.

Исто така во примерот **3**, имајќи го предвид конкретното значење на променливата $t$–време на паѓање, множеството $D$ е интервалот $\left[0,T\right]$, каде што $T$ е времето потребно телото да падне; $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, каде што $h$ е висина од која телото паѓа. Ако се апстрахираме од конкретното значење, во таков случај функцијата за множеството $D$ го има интервалот $(-\infty,+\infty)$.

Според тоа, *една функција ќе биде определена ако е зададена*:

**1)** *нејзината дефинициона област*;

**2)** *правилото по кое се определуваат вредностите на функцијата за сите вредности на независно променливата.*

## 2. НАЧИНИ НА ЗАДАВАЊЕ ФУНКЦИИ

Правилото според кое едно $y$ од множеството $G$ се поврзува со едно $x$ од множеството $D$ може да се искаже на неколку начини. Обично тоа се искажува текстуално, се задава преку табела, многу често со некоја формула (аналитички) или се искажува графички. Ако правилото кое ја определува функцијата е поставено текстуално, корисно е текстот, ако е можно, да се изрази со формула.

Ќе се задржиме нешто повеќе на табеларниот, аналитичкиот и графичкиот начин на задавање функција.

### 2. 1. Табеларен начин

Наједноставен начина на задавање функција е кога таа се задава со табела. На пример, промената на температурата во текот на денот може да се изрази во следниов вид:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $t$ | $4^0$ | $5^0$ | $4^0$ | $6^0$ | $8^0$ | $11^0$ | $13^0$ |

Во горниот ред на табелата се нанесени часовите, а во долниот ред вредностите на температурата.

Табличниот начин на задавање на функциите се одликува со тоа, што од табелата може лесно да се определат вредностите на функцијата за вредности на аргументот, што се дадени во табелата. Но, од друга страна, овој начин не ни дава можност да ја знаеме вредноста на функцијата за вредности на аргументот кои не се во табелата.

Табеларниот начин се користи во природните и техничките науки, каде што зависноста помеѓу променливите се утврдува експериментално или со набљудување.

### 2. 2. Аналитички начин

Аналитичкиот начин на задавање функции е од големо значење во математичката анализа. Овој начин дава можност еднозначно и со целосна точност да се определи вредноста на функцијата за дадена вредност на аргументот.

Симболичниот запис на функцијата $y = f(x)$ го карактеризира правилото со кое се добиваат вредностите на функцијата за произволно избрани вредности на аргументот. Притоа, се мисли на математичките операции што треба да се извршат над аргументот и во кој редослед, за да се добие вредноста на функцијата.

**Пример 1.** Ако е зададена функцијата $y = \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}$, вредноста на $y$ за дадено $x$ ќе се добие извршувајќи ги следниве операции: степенување на аргументот, собирање со 1 и делење со квадратниот корен од аргументот.

**Пример 2.** Со формулата $y = \dfrac{4\pi x^3}{3}$ аналитички се изразува врската помеѓу волуменот и радиусот на топката. Независно променливата е означена со $x$ (радиус на топката), а вредноста на функцијата со $y$ (волумен на топката). Оваа функција е дефинирана над множеството од позитивните реални броеви, земајќи го предвид значењето на таа функција.

Многу често една функција се задава и со неколку формули (со разни формули во одделни интервали).

**Пример 3.**

$$y = \begin{cases} x^2 & -3 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x \le 1 \\ (x-1)^2 & 1 < x < 10. \end{cases}$$

За вредности на $x$ од интервалот $[-3,0)$, вредноста на функцијата ќе се определува по формулата $y=x^2$. За вредности на $x$ од интервалот $[0,1]$, вредноста на функцијата е рамна на нула. За вредности на $x$ во интервалот $(1,10)$, вредноста на функцијата се определува по формулата $y=(x-1)^2$.

**Пример 4.** За функцијата $y = \dfrac{1}{x-1}$ дефиниционата област е $(-\square\,\infty,1)$ и $(1,+\infty)$. Исклучок прави $x=1$ бидејќи вредноста на функцијата не е определена, (делење со нула не е дефинирано).

**Пример 5.** За функцијата $y = \sqrt{1-x^2}$ областа на дефинираност е интервалот $[-1,1]$, бидејќи за $x>1$, односно $x< -1$ поткореновата големина станува негативна и функцијата нема реални вредности.

*Под **дефинициона област** на елементарни функции, зададени со некоја формула, обично се подразбира множеството од сите реални броеви x, за кои дадената функција има смисла т.е. во процесот на сите неопходни пресметувања по таа формула треба да се добијат само реални броеви.*

**Пример 6.** Функцијата $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ има смисла за $x \neq \pm 1$, а ќе прима реални вредности за $|x|<1$. Според тоа, функцијата е дефинирана на интервалот $(-1,1)$.

Разгледувајќи ја функцијата $y=f(x)$, ако сакаме да ја забележиме нејзината вредност за $x=a$, ќе напишеме $f(a)$.

На пример, за функциите

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad g(x)=\frac{10}{x},\quad h(x)=\sqrt{1-x^2}\,.$$

$f(1)$ е ознака за вредноста на функцијата $f(x)$ за $x=1$; $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

$g(2)$ е ознака за вредноста на функцијата $g(x)$ за $x=2$; $g(2)=5$.

$h(0)$ е ознака за вредноста на функцијата $h(x)$ за $x=0$; $h(0)=1$.

На неколку примери ќе покажеме, ако функцијата е зададена текстуално, како се составува нејзиниот аналитички израз.

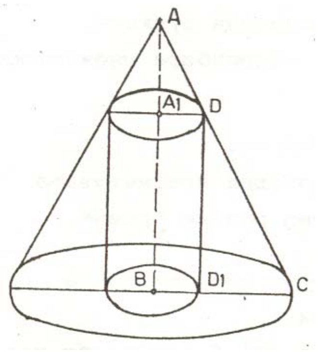
**Пример 7.** *Во конус со висина H и полупречник на основата R се впишани цилиндри. Да се изрази волуменот на цилиндрите во зависнст од полупречникот на основата на цилиндарот.*

Со $x$ ќе го означиме радиусот, а со $y$ висината на еден од цилиндрите. Очигледно е притоа, дека меѓу димензиите на цилиндарот постои врска и дека $x$ се менува од нула до $R$, висината се менува соодветно од $H$ до нула.

Во оваа задача, врската помеѓу $x$ и $y$ се определува од сличноста на триаголниците ABC и $DD_1C$ (црт.3.1). Изразувајќи ја пропорционалноста на страните на двата триаголника, се добива:

$$H:R=y:(R-x),$$

односно



$$y = \frac{H(R-x)}{R}. \qquad (1)$$

Сега сме во можност да го изразиме волуменот на цилиндрите во зависност од $x$, а имено од формулата

$$V = B \cdot H = x^2 \pi y.$$

По заменување на $y$ од равенката (1), се добива следнава врска:

Црт. 3. 1.

$$V = \frac{x^2 \pi H(R-x)}{R}.$$

Во функционалната врска $x$ е независно променлива, а $V$ е ознака за функција.

Во врска со оваа задача, проверете ги следниве задачи:

**1.** Волуменот на цилиндрите во функција од висината $y$ се изразува со релацијата:

$$V = \frac{R^2 \pi}{H^2} y(H-y)^2.$$

**2.** Плоштината на цилиндрите во зависност од полупречникот $x$ се изразува со релацијата:

$$P = \frac{2\pi}{R} x\left[x(R-H) + HR\right].$$

**3.** Плоштината на цилиндрите во зависност од висината $y$ се изразува со релацијата:

$$P = \frac{2\pi R}{H^2}(H-y)\left[RH + y(H-R)\right].$$

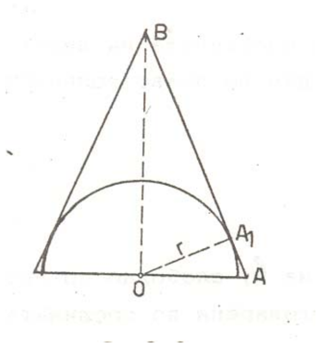
**4.** Обвивката на цилиндарот во зависност од полупречникот $x$ се изразува со релацијата:

$$M = \frac{2\pi H}{R} x(R-x).$$

**Пример 8.** *Околу полукруг со полупречник* $r$ *е опишан рамнокрак триаголник со висина* $x$. *Да се изрази основата на триаголникот како функција од неговата висина.*

Нека основата на триаголникот ја означиме со $y$. Од сличноста на триаголниците BOA и $BA_1O$ (црт.3.2) ја добиваме релацијата меѓу висината $x$ и основата на триаголникот $y$, која гласи:

$$\frac{x}{\frac{y}{2}} = \frac{\overline{BA_1}}{r},$$



Црт. 3. 2.

а од триаголникот $BA_1O$

$$\overline{BA_1} = \sqrt{x^2 - r^2},$$

па значи

$$\frac{y}{2} = \frac{xr}{\sqrt{x^2 - r^2}},$$

т.е.

$$y = \frac{2xr}{\sqrt{x^2 - r^2}}.$$

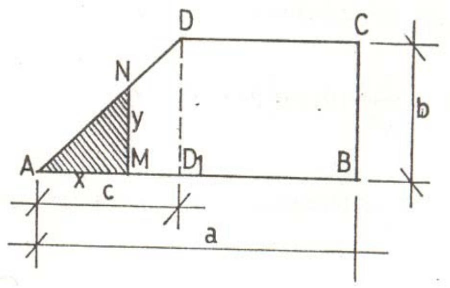
**Пример 9.** *Да се изрази плоштината* $S$ *на ликот* AMN *во функција од* $x = \overline{AM}$ (црт.3.3).

Ќе разликуваме два случаја:

**1.** нека $x < c$.

Плоштината $S$ во случајов е плоштина на триаголникот AMN, па затоа

$$S = \frac{xy}{2}.$$



Црт. 3. 3.

Но, бидејќи $x$ и $y$ се поврзани со врската

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{c},$$

конечно за $S$ се добива:

$$S = \frac{b}{2c}x^2;$$

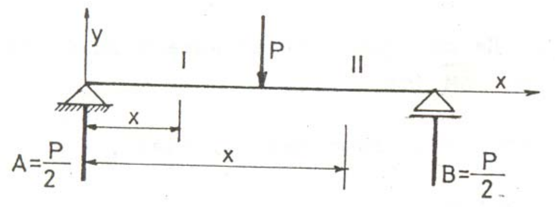
**2.** нека $x > c$.

Плоштината $S$ во случајов е плоштина на ликот формиран од триаголникот $AD_1D$ и дел од правоаголникот со страни $b$ и $x–c$, па затоа

$$S = \frac{cb}{2} + b(x–c).$$

**Пример 10.** *Греда со должина* $\ell$ *слободно потпрена на потпорите* A *и* B (црт.3.4), *е оптоварена во средината со концентрирана сила* $P$. *Да се изрази аналитички нападниот момент за произволен пресек на гредата.*

Координатниот систем го избираме така, што $x$-оската да биде насочена во правец на гредата, координатниот почеток во левиот потпор, а $y$-оската е насочена нагоре. Вредностите на потпорите, со оглед на тоа дека силата дејствува во средината, ќе бидат $A = \frac{P}{2}$, $B = \frac{P}{2}$, (црт.3.4).



Црт. 3. 4.

Нападниот момент ќе го означиме со $M$ (тоа ќе биде име на функцијата). Според дефиницијата, нападниот момент во избран пресек на гредата е рамен на сумата на моментите на силите што дејствуваат лево од пресекот. Ќе разликуваме два случаја:

**I.** Нека пресекот е лево од концентрираната сила на растојание $x$ од левиот потпор (од координатниот почеток), $(0 < x < \frac{\ell}{2})$.

Според дефиницијата,

$$M = Ax = \frac{P}{2}x;$$

**II.** Нека пресекот е десно од концентрираната сила на растојание $x$ од левиот потпор ($\frac{\ell}{2}<x<\ell$). Со оглед на тоа што лево од пресекот се две сили ( $A$ и $P$), ќе биде:

$$M = Ax - P(x-\frac{\ell}{2}) = \frac{P}{2}x - Px + \frac{P\ell}{2},$$

$$M = -\frac{P}{2}x + \frac{P\ell}{2}.$$

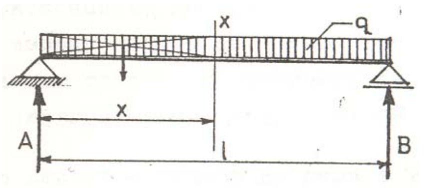
**Пример 11.** *Греда со должина $\ell$ слободно потпрена на два краја е оптоварена со рамномерно распределен товар со интензитет* $q\ kg/m$ (црт.3.5).

*Да се изрази аналитички нападниот момент во произволен пресек од гредата.*

И овде координатниот систем го избираме како во претходниот пример.

Вкупното оптоварување на гредата изнесува $q\ell$ и поради симетрија, секој потпор ќе прими по половина од оптоварувањето, така што ќе биде:

$$A = \frac{q\ell}{2}, \quad B = \frac{q\ell}{2}.$$



Црт. 3. 5.

Нападниот момент ќе го означиме со $M$. Ќе избереме произволен пресек X на растојание $x$ од левиот потпор. Задачата се состои во определување на врската помеѓу $M$ и $x$, т.е. во определување на $M$ во функција од $x$. За таа цел за пресекот X ќе ја определиме сумата на моментите на силите што дејствуваат лево од пресекот. Бидејќи лево дејствуваат силите $A$ и $qx$, се добива:

$$M = Ax - qx\frac{x}{2} = \frac{q\ell}{2}x - \frac{qx^2}{2},$$

$$M = \frac{qx}{2}(\ell - x).$$

Да спомeнеме за силата $qx$, замислено е дека е концентрирана во пресекот на дијагоналите (тоа е растојанието $\frac{x}{2}$). Со оваа врска се изразува нападниот момент на гредата за кој и да било пресек. Интервалот на менувањето на $x$ е од $0$ до $\ell$.

### 2. 3. Графички начин

Во физиката и техниката функциите често се задаваат со график, при што понекогаш графикот е единственото достапно средство за задавање на функцијата. Тоа се добива при автоматско запишување при изменување на една големина во зависност од менувањето на друга големина. Со таков начин на задавање на функција се среќаваме кај барографот кој ја исцртува зависноста на атмосферскиот притисок во функција од времето, кај термографот кој го исцртува графикот на температурата во функција од времето.

Предност на графичкиот начин на задавање е неговата нагледност, што е многу важно во изучувањето на функциите, а недостаток е тоа што за одредена вредност на променливата може да се прочита само приближната вредност на функцијата.

## 3. ГРАФИК НА ФУНКЦИЈА

Нека е даден Декартов правоаголен координатен систем во рамнина. На $x$-оската ќе нанесуваме елементи на множеството $D$ над кое е дефинирана функцијата, а на $y$-оската елементи на множеството $G$. Бидејќи е во прашање функција, тогаш постои правило по кое на секој елемент $x_1$ од множеството $D$ му е придружен еден елемент $f(x_1)=y_1$ од множеството $G$.

Сметајќи го парот $(x_1, y_1)$ како координати на една точка, во координатниот систем се претставува таа точка. За друга вредност $x_2$ од множеството $D$, според истото правило, се добива вредност $y_2$ од множеството $G$, т.е. се добива нова точка $(x_2, y_2)$ во координатниот систем.

Продолжувајќи за множеството вредности $x_3, x_4, \dots, x_n$ со пресметување на соодветните вредности $y_3, y_4, \dots, y_n$ и нанесувајќи ги паровите $(x_3, y_3), (x_4, y_4), \dots, (x_n, y_n)$, во координатниот систем се добива множество точки, кои кога ќе се поврзат го формираат графикот на функцијата.

*Множеството од сите точки* $(x, f(x))$, *кога* $x$ *ги прима сите вредности од дефиниционата област на функцијата* $f(x)$, *го викаме **график на функцијата**.*

*Во општ случај **график на функцијата е крива линија** (во посебен случај може да биде права).*

*За равенката* $y = f(x)$ *велиме дека претставува **равенка на крива**.*

При цртање график на една функција треба да се придржуваме на следново:

**1.** да се определи дефиниционата област, ако не е зададена со задавањето на функцијата, т.е. да се определи множеството $D$ над кое е реална функцијата;

**2.** да се направи табела од вредности на функцијата за една низа произволно избрани вредности на аргументот $x$;

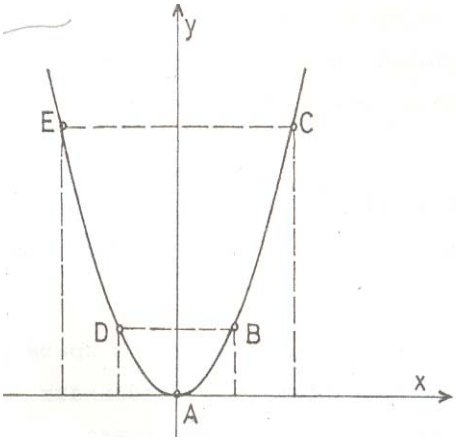
**3.** паровите од избраните и пресметани вредности соодветно да се нанесат во Декартовиот систем и да се поврзат. Корисно е притоа да се определат точките во кои кривата ги сече координатните оски. Тие точки ги добиваме за $x=0$ (пресек со $y$-оската) и од условот вредноста на функцијата да биде нула, $y=0$ (пресек со $x$-оската).

**Пример 1.** *Да се нацрта графикот на функцијата* $y = x^2$.

Ќе формираме табела

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

Врз основа на врската помеѓу функцијата и аргументот, паровите вредности (0,0), (1,1), (2,4), (−1,1), (−2,4) итн. кога ќе се нанесат во координатниот систем ги определуваат точките A, B, C, D, E, итн.



Црт. 3.6.

Поврзувајќи ги овие точки, се добива графикот на функцијата $y = x^2$ (Црт.3.6).

Од примерот се гледа дека графикот на една функција може да биде непрекината линија, но секогаш не мора да е така.

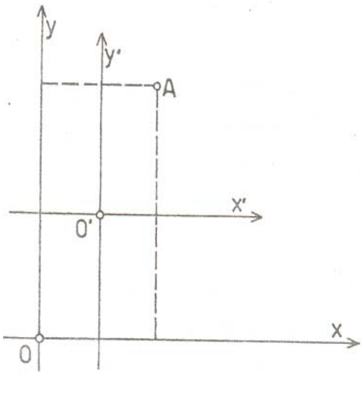
Графикот е многу добро нагледно средство за запознавање со функцијата, затоа секогаш ќе се стремиме одделни функции да ги претставуваме графички.

## 3. 1. Скицирање графици на функции

За скицирање графици на функции може да ни послужи трансформацијата на координатен систем, транслација.

Знаејќи го графикот на некоја функција може да се нацрта графикот на многу други посложени функции по геометриски пат, без да се составува таблица на вредности на функцијата. На овој начин, врз основа на графикот на една функција $y = f(x)$, многу лесно се цртаат графиците на функциите: $y = f(x) + a$, $y=f(x+a)$, $y = A f(x)$, $y = f(ax)$, $y = \mathrm{A} f(x-a) + b$ итн.

Нека е избран системот $x\mathrm{O}y$ и нека точката $\mathrm{A}(x, y)$ е определена во однос на тој систем.



Црт. 3. 7.

Ќе воведеме друг систем $x'\mathrm{O}'y'$, поставен така што оските $x'$ и $y'$ да бидат паралелни соодветно со оските $x$ и $y$. Координатниот почеток $\mathrm{O}'$ на овој систем ќе биде определен во однос на првиот систем со $\mathrm{O}'(a,b)$. Положбата на вториот координатен систем (системот $x'\mathrm{O}'y'$ ) е еднозначно определена при овие услови само со задавањето на координатите на координатниот почеток $\mathrm{O}'$.

Точката А во однос на вториот координатен систем има координати $x'$ и $y'$, имено А$(x', y')$.

Од цртежот 3.7 е очигледна врската помеѓу координатите $x$ и $y$ односно $x'$ и $y'$ на истата точка во однос на двата система, а имено:

$$x = x' + a$$

$$y = y' + b,$$

односно

$$x' = x - a$$

$$y' = y - b.$$

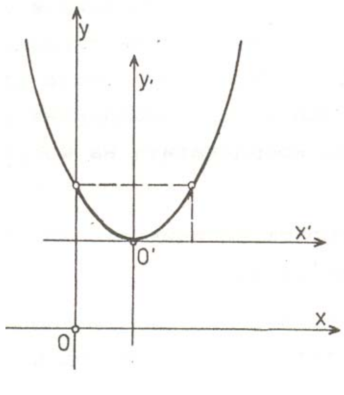
Со овие врски е можно да се определат координатите на точка во однос на првиот систем и обратно, при што се подразбира да бидат познати $a$ и $b$. Освен тоа, со овие врски сме во можност, ако ја знаваме равенката на една крива $F_1(x, y) = 0$ во однос на првиот систем да ја определиме равенката на таа иста крива во однос на вториот систем. Тоа се постигнува со заменување на $x$ и $y$ од наведените врски во равенката $F_1(x, y) = 0$, што доведува до равенката $F_1(x'+a, y'+b) = 0$, т.е. $F_2(x', y') = 0$.

**Пример 1.** *Да се скицира кривата со равенка* $y = (x-1)^2 + 2$.

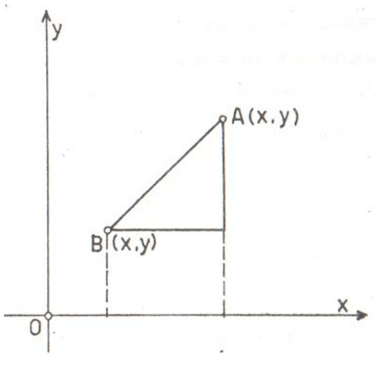
По воведување на смената

$$x - 1 = x', \quad y - 2 = y',$$

се добива равенката $y' = x'^2$, а тоа е познатата парабола од втор ред. Новиот систем $x'\,O'\,y'$ е со почеток согласно со трансформационите формули во точката $O'(1,2)$, црт.3.8.



Црт. 3. 8.



Црт. 3. 9.

За да ја упростиме постапката, да претпоставиме дека и двата система се доведени до поклопување. Тогаш точката А($x$, $y$) и точката В($x'$, $y'$), ако се дефинирани со врските:

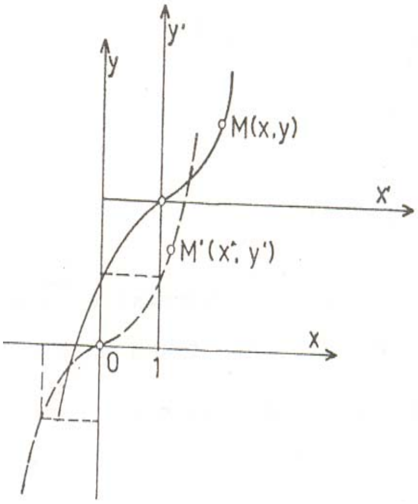
$$x = x' + a; \quad y = y' + b,$$

ќе бидат една во однос на друга транслаторно поместени за $a$ единици во однос на $x$–оската и $b$ единици во однос на $y$–оската. Аналогно на тоа, кривата $F_1(x, y)=0$ во однос однос на кривата $F_2(x', y')=0$ за истите врски ќе бидат една во однос на друга транслаторно поместени за $a$, односно $b$ единици во однос на $x$ и $y$–оска соодветно (сл.3.9.).

Овој факт корисно ќе ни послужи за скицирање на некои видови функции.

**Пример 2.** *Да се скицира графикот на функцијата*

$$y = (x–1)^3 + 2, \qquad y – 2 = (x–1)^3.$$



Црт. 3. 10.

Со цел да ја откриеме равенката на оваа крива во згодно избран координатен систем, ќе замениме

$$x–1=x', \quad y – 2 = y'.$$

По замената се добива:

$$y' = x'^3.$$

Тоа е равенка на кубна парабола, нацртана во координатен систем (со цртички). Графикот на функцијата ќе се добие кога оваа крива согласно со релациите

$$x = x' + 1, \qquad y = y' + 2$$

транслаторно ќе ја поместиме во правец на $x$-оската за една единица, а во правец на $y$-оската за две единици (црт.3.10).

*При скицирање на графици се служиме со некои методи, како* ***метод на собирање на ординати***, ***метод на множење ординати*** и др.

Во следниов пример ќе го користиме методот на собирање ординати.

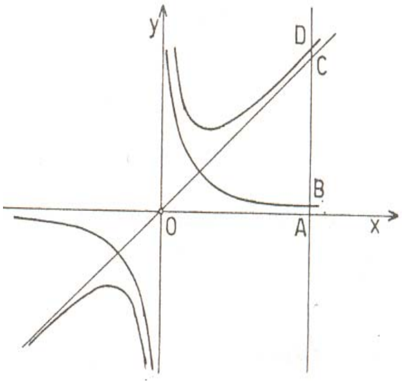
**Пример 3.** *Да се скицира графикот на функцијата* $y = x + \frac{1}{x}$, *користејќи го методот на собирање ординати.*

Ќе ги нацртаме кривите $y = x$ и $y = \frac{1}{x}$. За произволно $x$ повлекуваме права паралелна со $y$-оска. Отсечката $\overline{\mathrm{AC}}$ е ордината на функцијата $y = x$ за избрано $x$, а отсечката $\overline{\mathrm{AB}}$ е ордината на функцијата $y = \frac{1}{x}$ за истата вредност на $x$ (црт.3.11). На правата ќе ја нанесеме сумата на отсечките $\overline{\mathrm{AB}}$ и $\overline{\mathrm{AC}}$ и ја добиваме точката D. Точката D е една точка од кривата

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Постапката ќе ја повториме и за други вредности на $x$ (ќе повлекуваме други прави). Низата точки што ги добиваме на овој начин, кога ќе се поврзат, ја даваат кривата

$$y = x + \frac{1}{x}.$$



Црт. 3. 11.

## Задачи за вежбање

**1.** Во полукруг со полупречник $r$ е впишан правоаголник со висина $x$. Да се изрази:

**1)** плоштината на правоаголникот како функција од неговата висина;

**2)** периметарот на правоаголникот како функција од неговата висина.

Одг.: **1)** $P(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$ , **2)** $L(x) = 2x + 4\sqrt{r^2 - x^2}$ .

**2.** Во триаголник со основа $a$ и висина $h$ е впишан правоаголник со висина $x$. Да се изрази:

**1)** плоштината на правоаголникот како функција од неговата висина;

**2)** периметарот на правоаголникот како функција од неговата висина.

Одг.: **1)** $P(x) = \frac{a}{h}\, x(h - x)$, **2)** $L(x) = \frac{2}{h}(ah + xh - ax)$.

**3.** Даден е волуменот $V$ на конус. Да се изрази плоштината на конусот како функција од неговата висина.

Одг.: $P(x) = \dfrac{1}{x}\left[3V + \sqrt{3V\left(x^3\pi + 3V\right)}\ \right].$

**4.** Во топка со полупречник $R$ е впишана пирамида со квадратна основа и висина $x$. Да се изрази:

**1)** волуменот на пирамидата како функција од нејзината висина;

**2)** плоштината на пирамидата како функција од нејзината висина.

Одг.: **1)** $V(x) = \dfrac{2}{3}x^2(2R-x)$, **2)** $P(x) = 4Rx-2x^2 + 2x\sqrt{4R^2 - x^2}$ .

**5.** Да се провери дека долу наведените функции навистина се дефинирани во назначените интервали.

**1)** $y = \dfrac{1-x}{x^2 - 5x + 6}$, $(-\infty, 2) \cup (2,3) \cup (3,+\infty)$.

**2)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $(-\infty, +\infty)$.

**3)** $y = \sqrt{x-5}$ , $[5, +\infty)$.

**4)** $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, $(-\infty,1] \cup [3, +\infty)$.

**5)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$, $(-3,1)$

**6.** Да се покаже дека:

**1)** ако $f(x) = x^2-3x+2$, $f(x+1) = x^2-x$;

**2)** ако $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{x}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{3x^2+2x+1}{x}$;

**3)** ако $f(x) = \dfrac{x^2+3}{5x}$, $f(x^2) = \dfrac{x^4+3}{5x^2}$;

**4)** ако $f(x) = x^2-2$, $f\left(\dfrac{1}{x}+x\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;

**5)** ако $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1+\sqrt{1+x^2}$ ;

**б)** ако $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)^2}$, $\qquad f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = x^2.$

**7.** Дадена е функцијата $f(x) = x^2 - 2x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}$. Да се покаже дека

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

## 4. НЕКОИ ОПШТИ ПОИМИ И СВОЈСТВА ЗА ФУНКЦИЈА

Ќе изнесеме неколку поими и својства за функција кои таа ги има во нејзината дефинициона област.

### 4. 1. Нула на функција

*Секој реален број* $x_0$ *кој ја задоволува равенката* $f(x)=0$ т.е $f(x_0) = 0$, *се вика* ***нула на функцијата*** $f(x)$.

Ако функцијата се прикаже графички, тогаш нејзините нули ќе бидат претставени со пресечни точки на нејзиниот график и апсцисната оска.

**Пример.** *Да се определат нулите на функцијата*

$$y = (x-2)\cos x\,.$$

Од равенката $(x-2)\cos x=0$ нулите на функцијата се

$$x = 2, \quad x = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \qquad k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\ .$$

### 4. 2. Парна и непарна функција

***Функцијата*** $f(x)$ ***е парна*** *ако е дефинирана на симетричната област* $(-a, a)$ *и ако е*

$$f(-x) = f(x).$$

***Графикот на парната функција е симетричен во однос на*** $y$***-оската***.

**Пример.** Функцијата $f(x) = x^4$ е парна, бидејќи го исполнува условот

$$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$$

над целиот интервал на кој е дефинирана $(-\infty, +\infty)$.

**2.** ***Функцијата*** $f(x)$ ***е непарна*** *ако е дефинирана на симетричната област* $(-a, a)$ *и ако*

$$f(-x) = -f(x).$$

***Графикот на непарната функција е симетричен во однос на координатниот почеток.***

**Пример.** Функцијата $f(x) = x^3$ е непарна, бидејќи го исполнува условот $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ над целиот интервал на кој е дефинирана $(-\infty, +\infty)$.

## 4. 3. Ограниченост и екстреми

Нека функцијата $f(x)$ има дефинициона област $D$.

*За реалниот број* $\lambda$ *велиме дека е* ***мајорант за функцијата*** $f(x)$ ако за секој $x \in D$, $f(x) \le \lambda$.

***Функцијата*** $f(x)$ ***е мајорирана*** *ако постои барем еден мајорант.*

*За реалниот број* $\mu$ *велиме дека е* ***минорант за функцијата*** $f(x)$, *ако е* $\mu \le f(x)$ *за секој* $x \in D$.

***Функцијата*** $f(x)$ ***е минорирана***, *ако за неа постои барем еден минорант.*

Ако функцијата $f(x)$ е мајорирана функција, тогаш множеството од вредности на $f(x)$ е мајорирано множество од реални броеви, па според тоа постои *најмал мајорант кој го викаме* ***супремум*** за функцијата $f(x)$ и го означувамесо $\sup f(x)$, т.е. ако $\sup f(x) = M$, тогаш $f(x) \le M$ за секој $x \in D$ и ако $f(x) \le \lambda$ за секој $x \in D$, тогаш $M \le \lambda$.

*Ако постои елемент* $x^* \in D$ *таков што* $f(x^*) = \sup f(x)$, *тогаш за* $f(x^*)$ *велиме дека е* ***најголема вредност на функцијата*** $f(x)$ ***на*** $D$.

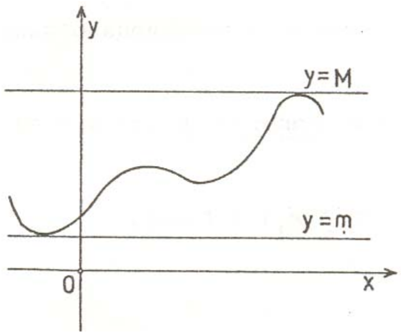
Аналогно се воведуваат поимите за инфимум и најмала вредност на функцијата $f(x)$. Имено, ако $f(x)$ е минорирана функција, тогаш множеството вредности на функцијата $f(x)$ како минорирано множество од реални броеви има *најголем минорант кој го викаме* ***инфимум за*** $f(x)$ и го означуваме со $\inf f(x)$, т.е. ако $\inf f(x)=m$, тогаш $m \leq f(x)$ за секој $x \in D$ и ако $\mu \leq f(x)$ за секој $x \in D$, тогаш $\mu \leq m$.

*Функцијата е* ***ограничена*** *ако е минорирана и мајорирана.*

Графикот на ограничената функција е меѓу правите $y=m$ и $y=M$ (црт.3.12).

Забележуваме дека функцијата $f(x)$ е ограничена ако постои позитивен број $K$ таков што $|f(x)| < K$ за секој $x \in D$, $K = \max\{|m|, |M|\}$.

*Ако постои елемент* $x^{**} \in D$ *таков што* $f(x^{**}) = \inf f(x)$, *тогаш бројот* $f(x^{**})$ *го викаме* ***најмала вредност на функцијата*** $f(x)$ *на* $D$.



Црт. 3. 12.

*Најмалата и најголемата вредност на функцијата со заедничко име се викаат* ***екстремни вредности на функцијата.***

**Пример.** Функцијата $f(x)=x^2$ има најмала вредност нула, но не е мајорирана на интервалот $(-\infty,+\infty)$, додека на интервалот $[2,5]$ е минорирана и мајорирана, т.е. ограничена. Најмала вредност на интервалот $[2,5]$ е $4$, а најголема $25$.

Најмалата вредност $4$ и најголемата вредност $25$ на функцијата над интервалот $[2,5]$ за функцијата $y=x^2$ се викаат екстреми на функцијата во тој интервал, зошто во разгледувањето се ограничивме на дел од дефинициона област.

Нека $D$ е дефинициона област на функцијата $f(x)$ и нека $c \in D$. Ако постои реален број $\delta>0$ таков што $f(c)$ е најголема вредност на $f(x)$ во множеството $D_1 = (c-d, c+d) \cap D$, т.е.

$$f(x) \leq f(c) \qquad (\forall x \in D_1)$$

тогаш велиме дека $f(c)$ е ***локален максимум на функцијата*** $f(x)$ .

Нека $D$ е дефинициона област на функцијата $f(x)$ и нека $c \in D$. Ако постои реален број $\delta > 0$ таков што $f(c)$ е најмалата вредност на $f(x)$ во множеството $D_1 = (c-d, c+d) \cap D$, т.е.

$$f(x) > f(c) \qquad (\forall x \in D_1)$$

тогаш велиме дека $f(c)$ е ***локален минимум на функцијата*** $f(x)$ .

*Локален максимум и локален минимум се викаат со заедничко име* ***локални екстреми****.*

## 4. 4. Монотоност

Функцијата $f(x)$ ја разгледуваме во дефиниционата област $D$ (интервал отворен или затворен).

*За* ***функцијата*** $f(x)$ *велиме дека* ***монотоно расте*** *во интервалот* $(a,b)$ *ако за секој*

$$x_1, x_2 \in (a,b), \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

т.е.

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0,$$

а ако следува

$$f(x_1) > f(x_2),$$

т.е.

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0,$$

*за* ***функцијата*** $f(x)$ *велиме дека* ***монотоно опаѓа*** *во интервалот* $(a,b)$.

Ако пак за кои и да било вредности $x_1, x_2 \in (a,b)$ од

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

т.е.

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$$

велиме дека ***функцијата*** во интервалот $(a,b)$ ***не опаѓа***, а ако следува

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

т.е.

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$$

***функцијата*** во тој интервал ***не расте***.

*За функцијата* $f(x)$ *велиме дека е монотона во интервал* (отворен или затворен) *ако таа не опаѓа* (*монотоно расте*) *или не расте* (*монотоно опаѓа*).

**Пример.** Функцијата $y = x^2$ монотоно расте во интервалот $[0,+\infty)$, бидејќи

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 > 0$$

а во интервалот $(-\infty, 0\,]$ функцијата опаѓа бидејќи

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 < 0$$

Оваа функција не е монотона на целата област на дефинираност, но е монотона на делови од таа област.

Ако функцијата $f(x)$ во интервалот $[a,b]$ е дефинирана и монотона, тогаш во тој интервал таа е ограничена, и тоа ако не опаѓа $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(a)$, а $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(b)$, а ако не расте $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(b)$, а $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(a)$.

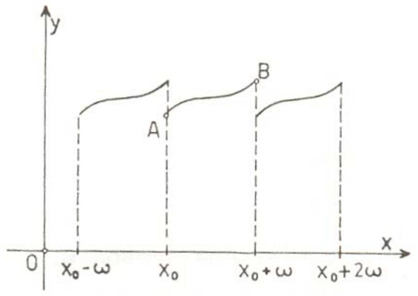
## 4. 5. Периодичност

*За функцијата* $f(x)$ *велиме дека е* ***периодична*** *ако постои број* $\omega \neq 0$ *таков што*

$$f(x+\omega) = f(x).$$

Бројот $\omega$ се вика *период на функцијата* $f(x)$.

Ако ја знаеме периодичната функција на интервал со должина $\omega$, на пример $(x_0, x_0+\omega)$, тогаш ја знаеме и за секој $x$, бидејќи понатаму нејзините вредности се повторуваат. Ова значи дека целиот график на функцијата $f(x)$ ќе се добие ако негов дел од точката А до точката В се поместува налево и надесно во правец на $x$-оската (црт.3.13.).



Црт. 3. 13

Ако функцијата $f(x)$ е периодична функција со период ω, тогаш

$$f(x+k\omega) = f(x)$$

за $k=\pm1, \pm2, \pm3, \ \dots$ .

Навистина, ако ставиме $x+\omega=x'$, тогаш $x+2\omega=x'+\omega$, па

$$f\,(x+2\omega) = f\,(x'+\omega) = f\,(x') =$$
$$= f\,(x+\omega) = f\,(x),$$

т.е. бројот $2\omega$ е период на функцијата $f(x)$. Исто така ако ставиме $x-\omega = x''$, добиваме:

$$f(x-\omega) = f(x'') = f(x''+\omega) = f(x-\omega+\omega) = f(x),$$

т.е. бројот $-\omega$ е период на функцијата $f(x)$.

На ист начин може да се покаже дека периоди на функцијата се и броевите $-2\omega$, $\pm 3\omega$ , $\pm 4\omega$ , итн. т.е. дека е

$$f(x+k\omega) = f(x) \quad \text{за} \quad k=\pm1, \pm2, \pm3, \ \dots \ .$$

Според тоа, периодичната функција $f(x)$ има бесконечно многу периоди.

**Пример 1.** *Тригонометриските функции $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$ и $ctg x$ се периодични функции, т.е.*

$$\sin\,(x+2k\pi) = \sin x, \quad \cos\,(x+2k\pi) = \cos x, \quad tg\,(x+k\pi) = tg\, x,$$

$$ctg\,(x+k\pi) = ctg\, x, \qquad (k=\pm1, \pm2, \pm3, \ \dots \ .).$$

*Броевите*

$$\pm2\pi, \ \pm2\cdot2\pi, \ \pm3\cdot2\pi, \ \dots$$

*се периоди на функциите $\sin x$ и $\cos x$, а броевите*

$$\pm\pi, \ \pm2\cdot\pi, \ \pm3\cdot\pi, \ \dots$$

*се периоди на функциите $tg\, x$ и $ctg\, x$.*

***Најмалиот број*** $\omega \neq 0$ *за кој*

$$f(x+\omega) = f(x)$$

*се вика* ***основен период.***

*Функциите* $\sin x$ *и* $\cos x$ *имаат основен период* $2\pi$, *а* $\operatorname{tg} x$ *и* $\operatorname{ctg} x$ *имаат основен период* $\pi$.

**Теорема:** *Ако функцијата* $y=f(x)$ *има период* $\omega$, *тогаш функцијата* $y=f(ax)$ *има период* $\frac{\omega}{a}$ ($a$ *реален број*).

**Доказ.** Нека функцијата $y = f(ax)$ има период $q$, тогаш

$$f(a(x+q)) = f(ax+aq) = f(ax).$$

Ако ставиме $ax = x'$, тогаш

$$f(x'+aq) = f(x') = f(x'+\omega)\ ,$$

и бидејќи функцијата $f(x)$ има период $\omega$, следува:

$$aq = \omega, \quad \text{т.е.} \quad q = \frac{\omega}{a}.$$

Значи,

$$f(a(x+\frac{\omega}{a})) = f(ax+\omega) = f(ax).$$

## 4. 6. Имплицитно зададени функции

Нека е дадена равенката

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Се разгледуваат само такви парови $(x, y)$ (ако постојат) кои го задоволуваат условот (1).

Нека постои таков интервал $(a, b)$ што за секој $x_0 \in (a, b)$ да постои во крајна мерка едно $y$, што ја задоволува равенката $F(x_0,y)=0$. Да го означиме едно од тие $y$ со $y_0$ и да му го придружиме елементот $x_0 \in (a, b)$. Како резултат на тоа се добива функција $f$ определена на интервалот $(a, b)$ и таква што

$$F(x_0, f(x_0)) = 0 \quad \text{за} \quad \forall\, x_0 \in (a, b). \tag{2}$$

Во тој случај велиме дека функцијата $f$ е зададена имплицитно со равенката (2). Една и иста равенка од видот (2) воопшто не е една функција, но множество од функции.

*Функциите зададени со* (2) *се викаат* ***функции зададени имплицитно*** (*скриен вид*), за разлика од функциите зададени со формули, решени по променливата $y$, т.е. во вид $y=f(x)$ за кои се вика дека се зададени во ***експлицитен*** (*јавен*) ***вид***.

Терминот имплицитна функција не го одразува карактерот на функционалната зависност, но само начинот на нејзиното задавање. Една и иста функција, ако е зададена експлицитно може да се зададе и имплицитно, обратното не мора да важи.

**Пример.** Функциите

$$f_1(x) = +\sqrt{1-x^2}\ , \qquad f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}\ ,$$

можат да се зададат и имплицитно со равенката

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

која го вклучува множеството функции зададени со неа.

## 4. 7. Сложена функција

Нека се дадени две функции $y = F(u)$ и $u = f(x)$, при што областа на дефинираност на $F(u)$ е содржана во областа на вредности на функцијата $f(x)$, тогаш за секој $x$ од дефиниционата област на функцијата $f(x)$ му соодветствува $y$, такво што $y=F(u)$, каде што $u=f(x)$. Таа функција, што е определена со односот $y=F(f(x))$ се вика ***сложена функција*** или ***посредно дадена функција***.

Обично променливата $x$ се вика ***основен аргумент***, додека променливата $u$ е ***посреден аргумент.***

**Пример 1.** *Нека* $y = \sin u$ *каде што* $u = \log x$.

Тогаш $y$ е тригонометриска функција од променливата $u$, која, од своја страна, е (логаритамска) функција од аргументот $x$. Според тоа, $y$ е функција од $x$ и се изразува со формулата

$$y = \sin \log x.$$

**Пример 2.** *Нека* $y=tgu$ *каде што* $u=\sqrt{v}$, *а* $v=x^2+2$.

Тогаш $y$ е тригонометриска функција од променлива $u$, која од своја страна, е степенска функција од $v$, а таа пак е функција од $x$. Според тоа, $y$ е функција од $x$ и се изразува со формулата

$$y=tg\sqrt{x^2+2}\ .$$

**Пример 3.** *Нека е дадена функцијата* $y=log^2(2x+1)$

Оваа функција ќе се разгледува како

$$y=f(u),\quad u=\varphi(v),\quad v=\psi(x),\ \text{т.е.}\ y=u^2,\quad u=logv,\quad v=2x+1;$$

$$f(\varphi(\psi(x)))=log^2(2x+1).$$

Дадената функција зависи од $x$ преку две посредни променливи.

## 4. 8. Инверзна функција

Нека е зададена функцијата

$$y=f(x) \tag{1}$$

во областа $D$ и $G$ е областа на вредностите на функцијата. Од дефиницијата за функција следува дека на секоја точка од множеството $D$ è соодветствува една единствена точка од множеството $G$. Ако притоа, на секоја точка од множеството $G$ è одговара исто таква единствена точка на множеството $D$, тогаш се вика дека пресликувањето е заемно еднозначно. При тоа пресликување, на различни точки од множеството $D$ им соодветствуваат различни точки од множеството $G$.

На пример, функцијата $y=x^3$ заемно еднозначно ја пресликува $x$-оската во $y$-оската, затоа што на секоја вредност за $x$ одговара единствена вредност за $y$ и обратно, на секоја вредност на $y$ è одговара единствена вредност на $x$, $x=\sqrt[3]{y}$ .

Функцијата $y=x^2$ не остварува заемно еднозначно пресликување меѓу $x$-оската (дефинициона област $D$) и интервалот $[0,+\infty)$ (областа на вредности на функцијата $G$), затоа што на секоја вредност на $y>0$ è одговараат две вредности за $x$; $x=+\sqrt{y}$ и $x=-\sqrt{y}$ .

Ако функцијата $y=f(x)$ остварува заемно еднозначно пресликување на множеството $D$ во множеството $G$, тогаш според кажаното, на секоја вредност на $y$ од $G$ ѝ соодветствува единствена вредност $x$ од множеството $D$. Затоа, променливата $x$ може да се разгледува како функција од $y$:

$$x = \varphi (y) \tag{2}$$

чија област на дефинираност е $G$, а област на вредности е $D$.

При преодот од функцијата (1) на функцијата (2) аргументот и функцијата како да си ги промениле своите улоги; $y$ стана независно променлива, а $x$ функција. Во овој случај велиме дека $x$ е ***инверзна функција*** на функцијата $y$ и симболично пишуваме:

$$x = f^{-1}(y).$$

Очигледно е дека ако (2) е инверзна функција на функцијата (1), тогаш и функцијата (1) е инверзна на функцијата (2).

**Пример 1.** За функцијата

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$$

(дефинирана за сите реални вредности на $x$, освен за $x=1$) инверзната функција ја добиваме ако дадената равенка ја решиме по $x$, $x=\dfrac{y+1}{y-2}$, (определена за сите реални вредности на $y$, освен за $y = 2$).

**Пример 2.** Ќе ја разгледаме функцијата

$$y = x^2,$$

(дефинирана за сите реални вредности на $x$, $D = (-\infty,+\infty)$, и множество на вредности $G = [0,+\infty)$.

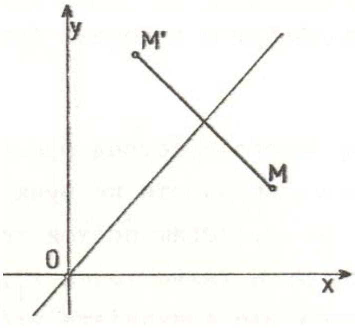
Бидејќи на секоја вредност на $y\neq 0$ ѝ одговараат по две вредности за $x\in(-\infty,+\infty)$ за дадената функција разгледувана на интервалот $(-\infty,+\infty)$, не постои инверзна функција. Меѓутоа, ако таа функција се разгледува на интервалот $(-\infty,0)$ (или на интервалот $[0,+\infty)$, тогаш таа ќе има инверзна функција $x= -\sqrt{y}$ ( или $x= +\sqrt{y}$ ), затоа што во овој случај на секоја вредност за $y$ од интервалот $[0,+\infty)$ одговара само една вредност на $x$ од $(-\infty,0)$ (или од $[0,+\infty)$). На пример, за $y_0=9$ треба да се земе само $x_0= -3$ (или $x_0= 3$).

Функциите (1) и (2) имаат ист график во еден ист координатен систем, но за функцијата $y=f(x)$ оска на независно променливата (аргументот) е $x$-оската, а за функцијата $x = \varphi(y)$ $y$-оската.

Ако сакаме да ги нацртаме графиците на тие функции, така што и во двата случаја $x$–оската да биде оска на аргументите, аргументот и во инверзната функција ќе го означиме со $x$, а функцијата со $y$, т.е. $y = f^{-1}(x)$.

На пример, инверзната функција на функцијата $y=x^3$ е функцијата $y = \sqrt[3]{x}$ .

Ако точката М($a$, $b$) припаѓа на графикот на функцијата $y=f(x)$, тогаш според дефиницијата на инверзна функција, точката М′ ($b$, $a$) ќе припаѓа на графикот на функцијата $y = f^{-1}(x)$. Затоа, за да се конструира графикот на инверзната функција, доволно е да укажеме на начинот за конструирање на точката М′ ($b$, $a$) кога е дадена точката М($a$, $b$). Ќе покажеме дека точките М и М′ се симетрични точки по однос на симералата на првиот и третиот квадрант $y=x$, (црт.3.14).



Црт. 3. 14.

Коефициентот на правецот на правата ММ′ е $k = \dfrac{a-b}{b-a} = -1$, а коефициентот на правецот на правата $y=x$ е $k' = 1$. Затоа правата ММ′ е нормална на правата $y=x$, $(k \cdot k' = -1)$.

Координатите на средината на отсечката ММ′ се:

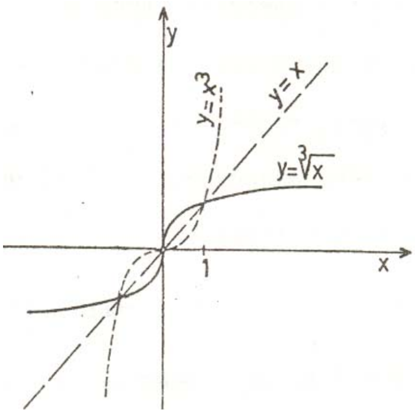
$$x_c = \frac{a+b}{2}, \quad y_c = \frac{a+b}{2}.$$

Од еднаквоста $x_c = y_c$ следува дека средината на таа отсечка лежи на правата $y = x$.

Значи точките M и M′ лежат на една нормала, на правата $y=x$, од различни страни и на еднакво растојание од неа, т.е. тие се симетрични во однос на симетралата на првиот и третиот квадрант.

Оттука, од графикот на дадената функција $y=f(x)$, за да го нацртаме графикот на нејзината инверзна функција $y = f^{-1}(x)$, доволно е да се нацрта крива, симетрична со графикот на функцијата $y=f(x)$ по однос на симералата на првиот и третиот квадрант.

Кратко можеме да кажеме: *ако функциите* $y=f(x)$ *и* $y=f^{-1}(x)$ *се две функции инверзни една на друга, тогаш нивните графици се симетрични по однос на симетралата на првиот и третиот квадрант во Декартовиот правоаголен координатен систем.*



Црт. 3. 15.

На црт.3.15 се прикажани графиците на инверзните функции

$$y = x^3 \text{ и } y = \sqrt[3]{x} .$$

Видовме дека не секоја функција има инверзна функција.

Еден критериум за постоење на инверзна функција на дадена функција е даден со следнава теорема.

**Теорема.** *Секоја строго монотона функција* $y=f(x)$ *во дадена област* $D$ *има во некоја област* $G$ *инверзна функција, која е , исто така, монотона.*

⌈ **Доказ.** Нека $y=f(x)$ е строго монотона функција и нека со $G$ го означиме множеството вредности на функцијата. Ако $y_0$ е која и да било точка од $G$, тогаш постои точка $x_0$ од $D$, таква што $f(x_0) = y_0$, но друга таква точка $x_1$, за која $f(x_1)=y_0$ во $D$, не постои, затоа што функцијата $y=f(x)$ е строго монотона, т.е. $f(x_1) \neq f(x_0)$, ако $x_1 \neq x_0$. (На пример, ако $y=f(x)$ монотоно расте, тогаш за $x_1 > x_0$ и $f(x_1) > f(x_0)$ , а за $x_1 < x_0$ и $f(x_1) < f(x_0)$).

По таков начин, на секоја вредност $y_0$ од $G$, ѝ одговара единствена вредност $x_0$ од $D$ (така што $f(x_0)=y_0$), т.е. на областа $G$ е определена функцијата $x=\varphi(y)$, инверзна по однос на дадената функција.

Ќе докажеме дека функцијата $x = \varphi(y)$ е монотона во областа $G$ (и тоа монотоно расте ако $f(x)$ монотоно расте или монотоно опаѓа ако $f(x)$ монотоно опаѓа).

Нека функцијата $f(x)$ монотоно расте во својата дефинициона област. Ќе земеме две различни вредности на $y$ во $G$, $y_1$ и $y_2$, тогаш во областа $D$ им одговараат две вредности за $x$, $x_1$ и $x_2$ такви што $f(x_1) = y_1$ и $f(x_2) = y_2$ од каде $f^{-1}(y_1) = x_1$ и $f^{-1}(y_2) = x_2$. Нека е $y_2 > y_1$, тогаш не може да биде $x_2 < x_1$; од неравенството $x_2 < x_1$, би следувало дека $f(x_2)< f(x_1)$, т.е. $y_2 < y_1$, од монотоноста на функцијата $y=f(x)$, а од равенството $x_2=x_1$ би следувало дека и $f(x_2)= f(x_1)$, т.е. $y_2=y_1$. Во двата случаја имаме противречност со условот. Затоа за $y_2 > y_1$ ќе биде $x_2 > x_1$, т.е. $f^{-1}(y_2) > f^{-1}(y_1)$, а тоа значи дека функцијата $f^{-1}(y)$ монотоно расте (исто како функцијата $y = f(x)$).

Доказот е сличен и за функцијата која монотоно опаѓа. ⌋

Ако дадената функција $y=f(x)$ не е монотона во разгледуваниот интервал, тогаш инверзната функција не е еднозначна.

На пример, за функцијата $y=x^2$ можеме да кажеме дека нејзината инверзна функција е многузначна, а функциите $y= +\sqrt{x}$ и $y= -\sqrt{x}$ ќе велиме дека се нејзини еднозначни гранки.

Понатаму кога ќе зборуваме за заемно инверзни функции, ќе подразбираме дека тие функции се монотони во нивните дефинициони области.

Ако дадената функција не е монотона, тогаш, како во дадениот пример, областа на дефинираност на таа функција ја разбиваме на интервали на монотоност и во секој од тие интервали ја земаме соодветната еднозначна гранка на инверзната функција.

# 5. ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

Овде ќе разгледаме некои функции кои често се сретнуваат во математичката анализа.

## 5. 1. Полиномни или цели рационални функции

Функцијата од облик

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 , \qquad (1)$$

каде што $a_0$, $a_1$, … , $a_n$ се константни реални броеви, а $n$ природен број, се вика *полином* или *цела рационална функција.*

Броевите $a_0$, $a_1$, … , $a_n$ се викаат *коефициенти на полиномот.* Највисокиот степен на променливата $x$ во полиномот се вика *степен на полиномот. Ако* $a_n \neq 0$, за *полиномот* (1) велиме дека е *од* $n$*-ти степен.*

Дефиниционата област на секој полином е множеството $R$ на реалните броеви.

**$1^0$ Функција константа.** За $n$=0 имаме полином со степен нула: $y = a_0$ каде $a_0$ е број. Оваа функција има константна вредност за секој $x$. Графикот е права паралелна со $x$-оската.

**$2^0$ Линеарна функција.** За $n$=1 имаме полином до прв степен, кој најчесто се запишува во вид

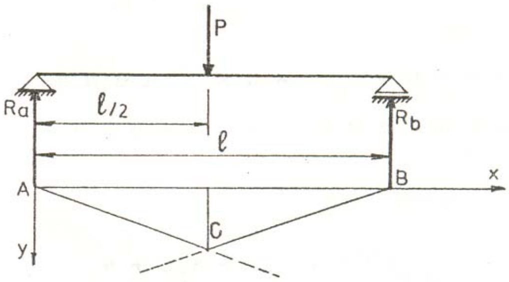
$$y = ax + b,$$

кој се вика *линеарна функција* по променливата $x$. Графикот на линеарната функција претставува права линија чија положба зависи од тоа какви се коефициентите $a$ и $b$.

**Пример 1.** *Да се покаже графички нападниот момент на греда оптоварена со концентрирана сила* $P$ *во средината на гредата ( од* **пример 10, т.2.2.)**

Нападниот момент за вредности на $x$ од интервалот $(0,\frac{\ell}{2})$ е изразен со линеарната функција $M=\frac{P}{2}x$, па според тоа тој ќе биде претставен со дел од правата што минува низ точките А $(0, 0)$ и С$(\frac{\ell}{2},\frac{P\ell}{4})$, (црт.3.16). За вредности на $x$ од интервалот $(\frac{\ell}{2},\ell)$, нападниот момент е изразен со линеарната функција

$$M = -\frac{P}{2}x + \frac{P}{2}\ell .$$



Црт. 3. 16.

Тој ќе биде претставен со дел од правата што минува низ точките C($\frac{\ell}{2}, \frac{P\ell}{4}$) и B($\ell$,0).

**3° Квадратна функција.** За $n$=2 имаме полином од втор степен, кој вообичаено се запишува

$$y = ax^2 + bx + c$$

и се вика *квадратна функција* по однос на $x$. Графикот на оваа функција е парабола. Таа е една од функциите што многу често се користи во применетите науки.

Функцијата $y = ax^2 + bx + c$ ќе ја трансформираме во каноничен вид

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0. \tag{2}$$

За таа цел ќе го изнесеме $a$ пред заграда

$$y = a\,(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}).$$

По додавање и одземање на изразот $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, со цел да формираме израз што претставува бином на квадрат, добиваме:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right),$$

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right],$$

односно

$$y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Споредувајќи со равенката (2) заклучуваме дека

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Графикот на оваа функција е парабола со теме во точката Т$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$.

Ако се замени

$$x + \frac{b}{2a} = x', \qquad y - \frac{4ac-b^2}{4a} = y'$$

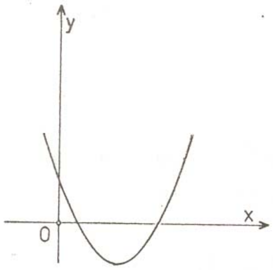
се добива:

$$y' = a\,x'^2.$$

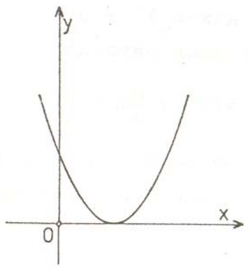
Кога $a>0$, тогаш графикот на функцијата ја сече $x$-оската во две точки за $\frac{4ac-b^2}{4a}<0$, ја допира во една точка за $\frac{4ac-b^2}{4a}=0$ и нема заеднички точки за $\frac{4ac-b^2}{4a}>0$.

Функцијата $y = ax^2 + bx + c$ во интервалот $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ монотоно опаѓа, а во интервалот $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ монотоно расте. Таа прима најмала вредност за $x= -\frac{b}{2a}$, (црт.3.17, 3.18 и 3.19).

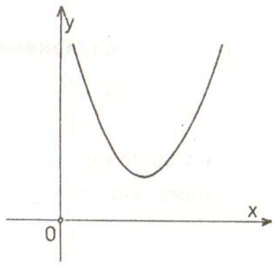
Кога $a < 0$, тогаш графикот на функцијата ја сече $x$-оската во две точки за $\frac{4ac-b^2}{4a}>0$, ја допира во една точка за $\frac{4ac-b^2}{4a}=0$ и нема заеднички точки со $x$-оската за $\frac{4ac-b^2}{4a}<0$.



Црт. 3. 17.

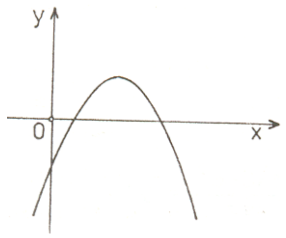


Црт. 3. 18.

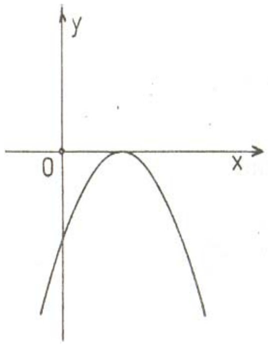


Црт. 3. 19.

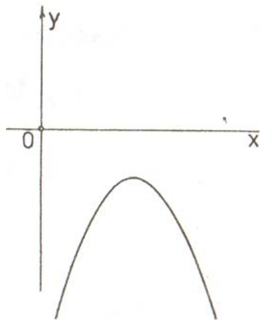
Во овој случај функцијата монотоно расте во интервалот $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$, а монотоно опаѓа во интервалот $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$. Таа прима најголема вредност за $x = -\frac{b}{2a}$, (црт.3.20, 3.21 и 3.22).



Црт.3. 20.



Црт. 3. 21

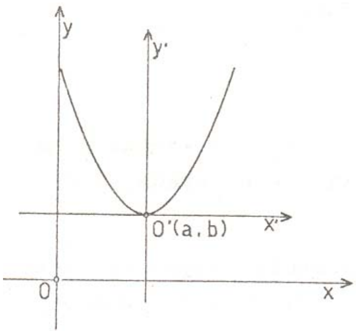


Црт. 3. 22

Овде ќе го дадеме и заклучокот за знакот на функцијата:

Ако функцијата $y = ax^2 + bx + c$ нема нули т.е. не постојат реални броеви $x$ за кои $y$=0, тогаш знакот на функцијата е ист со знакот на $a$ за секој $x \in (-\infty, +\infty)$, ако пак таа има една нула, $x = x_0$ тогаш функцијата има ист знак со знакот на $a$ за секој $x \neq x_0$. Во случај кога $x_1$ и $x_2$ $(x_1 \neq x_2)$ се нули на функцијата, тогаш знакот на $y$ е ист со знакот на $a$ за $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, а спротивен со знакот на $a$ за $x \in (x_1, x_2)$.

**Пример 1.** *Да се нацрта графикот на параболата зададена со равенката* $y = 2x^2 - 4x + 4$.



Црт. 3. 23.

Да ја доведеме равенката на параболата на каноничен вид:

$$y = 2(x^2 - 2x + 2)$$

$$y = 2[(x^2 - 2x + 1) + 1]$$

$$y = 2[(x-1)^2 + 1]$$

$$y = 2(x-1)^2 + 2,$$

од каде што $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, т.е темето на параболата е во точката Т(1,2).

Со смената

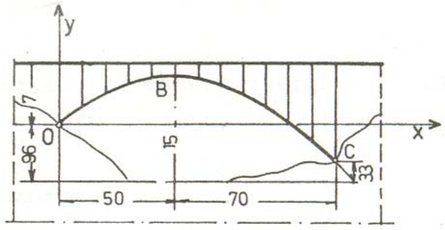
$$x - 1 = x' \quad \text{и} \quad y - 2 = y'$$

се добива $y' = 2x'^2$, што значи дека во однос на новиот координатен систем $x'O'y'$, каде што $O' \equiv T$, ќе цртаме парабола $y' = 2x'^2$, (црт.3.23).

Многу често се применува обратната задача, а имено нека е позната положбата на параболата во однос на системот, а е потребно да се состави нејзината равенка. Обично во овие случаи се познати една, две или три точки низ кои поминува параболата. Одговорот на ваков вид задачи се сведува на определување на коефициентите $a$, $b$ и $c$ од општата равенка.

**Пример 2.** *Долниот појас на еден мост* (црт.3.24) *преку една река е пропишан во форма на парабола. Дадена е положбата на петите, стрелата во средината на реката и положбата на коловозната конструкција во однос на левиот потпор. Потребно е да се определат должините на вертикалните столбови.*

Ќе биде потребно, пред сè, да се определи равенката на параболата преку која ќе биде можно да се определат должините на столбовите. Изборот на координатниот систем е наполно произвилен.



Црт. 3. 24

Наједноставно е при оваа задача координатниот систем да се смести во левиот потпор, а $x$-оската да биде поставена паралелно со коловозната конструкција. Правецот на $y$-оската да е насочен нагоре.

Од цртежот уочуваме дека параболата минува низ точките $A(0{,}0)$, $B(50;5{,}4)$ и $C(120;-6{,}3)$, што е доволно да се состави нејзината равенка.

Ако во општиот вид на равенката на параболата $y=ax^2+bx+c$ ги замениме соодветно координатите на точките, ги добиваме следните услови

$$0 = c$$

$$5{,}4 = 2500a + 50b + c$$

$$-6{,}3 = 14400a + 120b + c.$$

Од решението на системот ги добиваме вредностите на коефициентите $a$, $b$ и $c$ кои соодветно се $a = -2{,}2929\cdot 10^{-3}$, $b = 0{,}22264$ и $c = 0$.

Според тоа, равенката на бараната парабола е

$$y = 0{,}22264\,x - 2{,}2929\cdot 10^{-3}\,x^2.$$

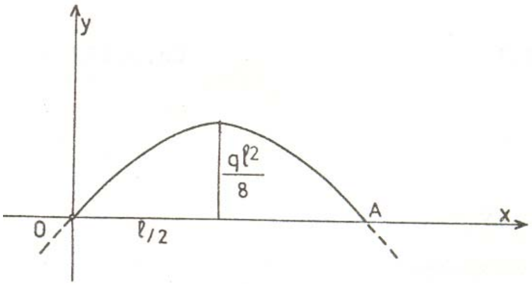
Заменувајќи во равенката: $x_1=0$, $x_2=10$, $x_3=20$, ... , $x_{13}=120$ и формирајќи ги разликите: $7-y_1$, $7-y_2$, ... , $7-y_{13}$, каде што $y_i$ е вредноста на функцијата во $i$-тата точка и за должините на столбовите добиваме соодветно: 7; 5,00229; 3,46636; 2,384410; 1,76304; 1,61025; 1,89604; 2,65041; 3,86336; 5,53489; 7,66500; 10,25369; 13,30096.

**Пример 3.** *Да се прикаже графички нападниот момент на греда оптоварена со рамномерно распределен товар по должината на гредата* ( **пример 11**, **т.2.2**).

Нападниот момент по целата должина на гредата е изразен со квадратната фунција

$$M = \frac{q\ell}{2}x - \frac{q}{2}x^2,$$

па според тоа, тој ќе биде претставен со парабола од втор ред. За да се нацрта параболата, ќе ги определиме координатите на темето на параболата. Од $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ ( во случајов $a = -\dfrac{q}{2}$, $b = \dfrac{q\ell}{2}$, $c=0$ ), се добива $x_0 = -\dfrac{\ell}{2}$. Од $y_0 = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$, се добива $y_0 = \dfrac{q\ell^2}{8}$.



Црт. 3. 25.

Параболата минува низ точките O(0,0) (за $x$=0, $M$=0), и A($\ell$,0) (за $x$=$\ell$, $M$=0). Графикот е прикажан на црт.3.25.

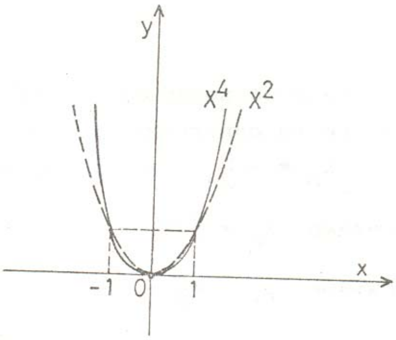
## 5. 2. Степенска функција

*Функцијата* $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in R)$ *се вика* ***степенска функција.***

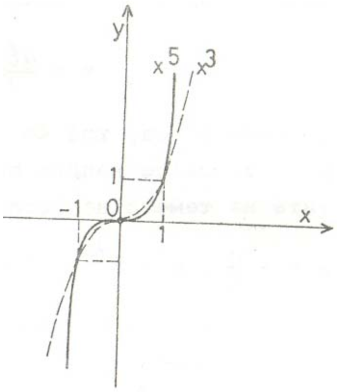
**1⁰** $\alpha$ е природен број $n$, т.е.

$$y = x^{n}.$$

Оваа функција е дефинирана во интервалот $(-\infty, +\infty)$ и има нула во точката $x$=0. Таа е парна за $n$=2$k$ ($k$=1,2, ...) и непарна за $n$=2$k$+1. На црт.3.26 и црт.3.27 се дадени графиците за некои вредности на $n$.



Црт. 3. 26.



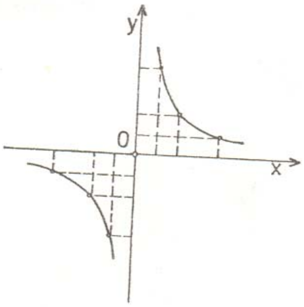
Црт. 3. 27.

**2⁰** За $\alpha = -n$, ($\alpha$–негативен цел број) степенската функцијата е од вид

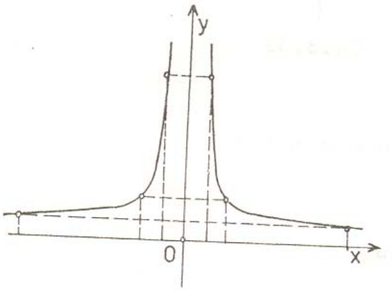
$$y = x^{-n}.$$

Оваа функција е дефинирана за сите вредности на $x$ освен за $x$=0. Таа е парна за $n$=2$k$ и непарна за $n$=2$k$+1, ($k$=1,2, ...) .

На црт.3.28 е претставен графикот на функцијата $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$. Графикот на оваа функција се вика хипербола од прв степен.



Црт. 3. 28.



Црт. 3. 29.

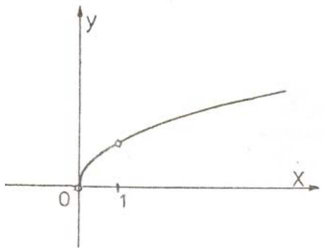
Очигледно е при оваа крива дека со наголемување на аргументот, растојанието меѓу кривата и $x$-оската тежи кон нула. Во таков случај велиме дека $x$-оската е асимптота на хиперболата. Од истата причина овде и $y$-оската е асимптота на кривата.

На црт.3.29 е претставен графикот на функцијата $y = x^{-2}$ т.е. $y = \frac{1}{x^2}$. Графикот се вика хипербола од втор степен.

**3⁰** Нека $\alpha = \frac{1}{n}$, ( $n$ природен број) т.е. $y = x^{\frac{1}{n}}$.

Оваа функција е дефинирана во интервалот $[0,+\infty)$ ако $n$=2$k$ и во интервалот $(-\infty,+\infty)$ ако $n$=2$k$+1, ($k$=1,2, ...). Таа има нула во точката $x$=0.

На црт.3.30 е даден графикот на функцијата $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.



Црт. 3. 30.

**4⁰** Нека $\alpha = \frac{p}{q}$ т.е.

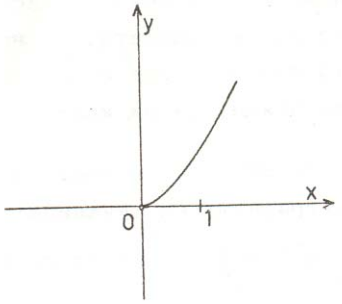
$$y = x^{\frac{p}{q}},$$

каде $p$ и $q$ се релативно прости броеви. Ако $q$ е парен број функцијата е дефинирана во интервалот $[0,+\infty)$, а ако $q$ е непарен број, тогаш функцијата е дефинирана во интервалот $(-\infty,+\infty)$.

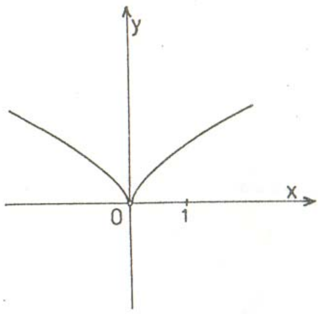
На црт.3.31 и црт.3.32 се претставени графиците на функциите

$$y = x^{\frac{3}{2}}, \qquad y = x^{\frac{2}{3}}$$

соодветно.



Црт. 3. 31.



Сл. 3. 32.

## 5. 3. Дробно-линеарна функција

Дробно-линеарната функција е функција од видот

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{1}$$

каде што $a$, $b$, $c$ и $d$ се константи. Таа е дефинирана за секој $x$ освен за $x = -\frac{d}{c}$.

Ако $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, тогаш таа ќе биде константа, па затоа ќе претпоставиме дека

$$ad-bc\neq 0\ .$$

Да ја трансформираме равенката (1), извршувајќи го делењето

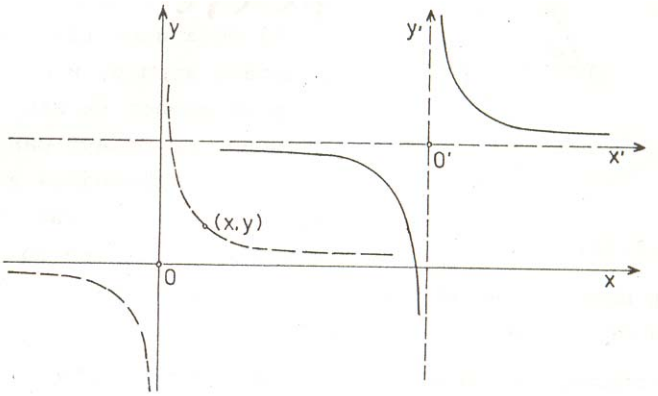
$$(ax+b):(\,cx+d) = \frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c}}{c(x+\frac{d}{c})}$$

$$y = \frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}} \qquad (2)$$

Ставајќи $a' = \frac{bc-ad}{c^2}$ и воведувајќи ја смената

$$x+\frac{d}{c}=x', \qquad y-\frac{a}{c}=y'$$

равенката (2) добива вид $y' = -\frac{a'}{x'}$, што претставува рамнострана хипербола во однос на системот $x'$O'$y'$, каде што O'$(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$ (црт.3.33).



Црт. 3. 33

## 5. 4. Тригонометриски функции

Под тоа име се опфатени функциите

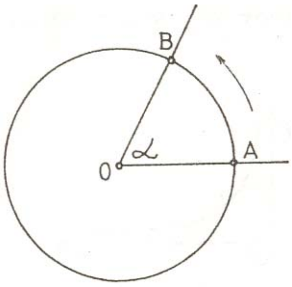
$$y=sinx, y=cosx, y=tgx, \; y=ctgx, \; y=secx, y=cosecx.$$

Кај сите нив се искажува врската помеѓу даден агол и вредноста на соодветната функција.

Пред да се задржиме пооделно на секоја од овие функции, искажувајќи ги нивните својства и графици, ќе се задржиме на начините за мерењето на аглите и ќе ги дефинираме тригонометриските функции за произволен агол.

### $1^0$ *Мерење агли*

Најчесто применувана мера за мерење агли е добро позната мера – ***степен***. По дефиниција, *полниот агол има* 360 *степени* (се означува со $360\,^0$), т.е. *еден степен е големина што одговара на* 360 - *тиот дел од полниот агол. Степенот се дели на* 60 *минути* (60´), *а секоја минута се дели на* 60 *секунди* (60’’).



Црт. 3. 34.

Во вишата математика, многу често за мерење на аглите се употребува друга мера, која се вика ***радијан***. За да ја објасниме таа мера ќе нацртаме агол α, и околу темето на аголот ќе нацртаме кружница со радиус рамен на 1 (црт.3.34), *Должината на лакот што му соодветствува на аголот* α *ќе ја мериме во насока обратна од насоката на движењето на стрелките на часовникот, почнувајќи од точката* **А**.

Очигледно е дека големината на аголот α е во директен соднос со должината на лакот што му припаѓа при услов радиусот да биде рамен на единица (ако $R\neq1$ големината на аголот е односот $\ell/R$). Од таа причина големината на аголот се изразува со големината на соодветниот лак што му припаѓа, така што, аголот е голем онолку, колку што е должината на лакот AB. *Аголот, на кој должината на лакот што му припаѓа е рамна на* 1, *се зема за единица мера и се вика* ***радијан***. Се означува со $\alpha^R$.

При оваа избрана единица за мерење агли, полниот агол има $2\pi$ радијани, бидејќи должината на лакот што му припаѓа е $\ell=2\pi$, за $R=1$. Рамниот агол има $\pi$ радијани, а правиот агол $\frac{\pi}{2}$ радијани.

Во приложената табела се зададени вредностите на некои агли, изразени во степени и радијани за чие составување не постојат, согласно со дефиницијата, никакви тешкотии.

| $\alpha^0$ | $0^0$ | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ | $90^0$ | $120^0$ | $135^0$ | $150^0$ | $180^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha^R$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |

За изразување на еден произволен агол, изразен во степени, преку радијани и обратно, ќе биде потребно да се даде врска што постои помеѓу овие две мери.

Односот помеѓу аголот $\alpha$ и полниот агол, ако тие се изразени во степени, ќе биде $\frac{\alpha^0}{360^0}$. Тој ист однос, ако тие се мерат во радијани, ќе биде $\frac{\alpha^R}{2\pi}$. Со изедначување на овие односи и скратување, се добива релацијата:

$$\frac{\alpha^0}{180^0}=\frac{\alpha^R}{\pi};$$

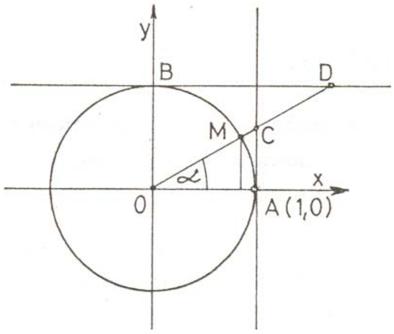
која ни овозможува изразување на аголот во степени ако тој е зададен во радијани и обратно.

За $\alpha^R=1$ (агол од 1 радијан) се добива $\alpha^0=\frac{180^0}{\pi}$, што значи дека аголот од еден радијан има $57^0\dots$ .

Наспроти тоа, ако се замени $\alpha^0=1^0$ (агол од еден степен), се добива $\alpha^R=\frac{\pi}{180^0}=0{,}017$, што значи дека аголот од еден степен има 0,017 радијани.

## $2^0$ *Изменување на тригонометриските функции*

За да го искажеме изменувањето на тригонометриските функции ќе земеме единична кружница со центар во координатниот почеток на правоаголен координатен систем (црт.3.35). Таа кружница се вика ***тригонометриска кружница.***



Црт. 3. 35.

На кружницата земаме една точка М($x$,$y$). Големината на аголот $\alpha=\angle$МОА ја мериме со должината на лакот што му одговара, во радијани. Мерејќи го аголот $\alpha$ при движење на точката М во насока обратна од насоката на движење на стрелките од часовникот, $\alpha$ ќе се менува од 0 до $+\infty$, а при движење на точката М во обратна насока ќе ги прима соодветните негативни вредности. Бидејќи $R$=1, според дефиницијата во тригонометријата, *со апсцисата на точката* М *се изразува вредноста на косинусот на аголот* $\alpha$, *а со ординатата на точката* М *вредноста на синусот на аголот* $\alpha$.

Промената на синусот (неговата вредност и знак) се гледа од цртежот, ако се претпостави дека точката М се поместува по кружницата од почетната положба во точката А ($\alpha$=0) па сѐ до $\alpha=2\pi$, следејќи го менувањето на ординатите на точката М.

Аналогно на тоа, следејќи ја промената на апсцисата на точката М, од цртежот се гледа промената на косинусот.

На кружницата да повлечеме тангенти во точките А(1,0) и В(0,1) и да ги означиме пресеците на кракот ОМ од аголот $\alpha$ со тангентите низ точките А и В соодветно со С и D.

Од дефиницијата за тангенс на остар агол следува дека ординатата на точката С е тангенс од аголот $\alpha$. Соодветно за котангенс следува дека апсцисата на точката D е котангенс од аголот $\alpha$.

Следејќи ја промената на ординатата на точката С, кога точката М се движи по кружницата, се гледа промената на функцијата тангенс.

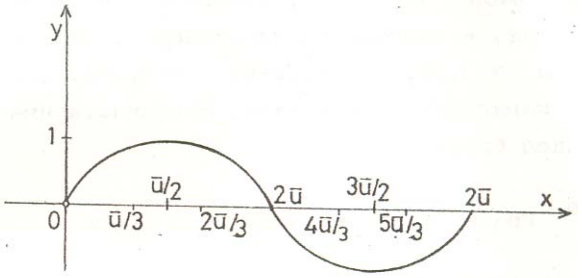
Аналогно, следејќи ја промената на апсцисата на точката D, кога точката M се движи по кружницата, се гледа промената на функцијата котангенс.

### $3^0$ *График на функцијата* $y = \sin x$

Независно променливата $x$ е агол, а зависно променливата $y$ е вредноста на синусот за дадениот агол. Графикот на функцијата $y=\sin x$ е прикажан на цртежот 3.36.

Функцијата е дефинирана за секој реален број (во интервалот $(-\infty,+\infty)$). Множеството вредности на функцијата е интервалот $[-1,1]$.

Функцијата е непарна, бидејќи $\sin(-x)= -\sin x$ и нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток. Таа има нули за $x=k\pi$; $y_{max}=1$, за $x=(4k+1)\frac{\pi}{2}$; $y_{min}= -1$, за $x=(4k-1)\frac{\pi}{2}$, каде што $k$ е цел број.



црт. 3. 36.

Функцијата $y = \sin x$ го задоволува условот за периодичност, а имено $\sin(x+2\pi) = \sin x$ или воопшто $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ за $k=0, \pm1, \pm2,\ldots$ , за $x\in(-\infty,+\infty)$. Според тоа, графикот на функцијата $y=\sin x$ во секој интервал $(2k\pi,2(k+1)\pi)$, $k=0, \pm1, \pm2,\ldots$ , е ист каков што е во интервалот од 0 до $2\pi$. Значи, најмалиот (основен) период е $2\pi$, а кој и да било период е $2k\pi$.

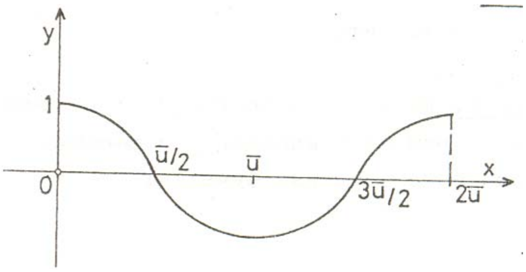
*Графикот на функцијата* $y = \sin x$ *се вика* ***синусоида***.

## $4^0$ *График на функцијат̄а* $y = \cos x$

Независно променливата $x$ е агол, а зависно променливата $y$ е вредност на косинусот за даден агол. Графикот на оваа функција е нацртан на цртежот 3.37. Оваа функција е исто така, дефинирана на интервалот $(-\infty,+\infty)$. Множеството вредности на функцијата е интервалот $[-1,1]$. Функцијата е парна бидејќи $cos(-x) = cosx$ и графикот ѐ е симетричен во однос на $y$-оската.Таа има нули за $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$; $y_{max}=1$ за $x=2k\pi$; $y_{min}= -1$ за $x=(2k+1)\pi$, каде што $k$ е цел број.

Функцијата е периодична со *основен п̄ериод* $2\pi$ и кој и да било период $2k\pi$.

*Графикот̄ на функцијат̄а $y = cosx$ се вика* ***косинусоида****.*



црт. 3. 37.

## $5^0$ *График на функцијат̄а* $y = tg\,x$

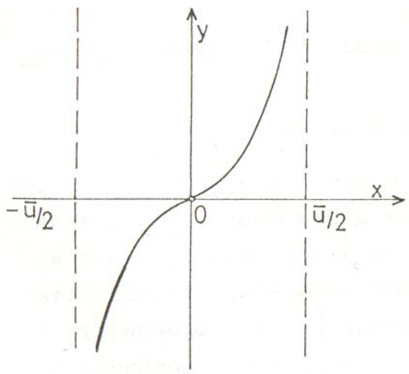
Функцијата $y=tgx$ е дефинирана во интервалите $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k=0, \pm1, \pm2,\dots$ . Множеството вредности на функцијата е интервалот $(-\infty,+\infty)$. Функцијата е непарна бидејќи $tg(-x)= -tgx$, и периодична со период $\pi$. Нејзиниот график е прикажан на црт.3.38. За $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2,\dots$ кривата има асимптоти паралелни со $y$-оската. Функцијата има нули за $x=k\pi$, каде што $k$ е цел број.

*Графикот̄ на функцијат̄а $y=tgx$ се вика* ***т̄анг̄енсоида****.*

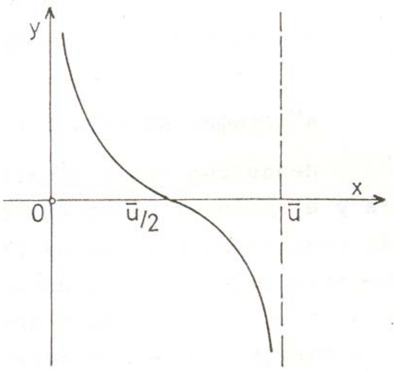
### $6^0$ *График на функцијата* $y = ctg\,x$

Функцијата е дефинирана во интервалите $(k\pi,(k+1)\pi)$ за $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ , а за $x=k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ таа има асимптоти паралелни со $y$-оската. Множеството вредности на функцијата е интервалот $(-\infty,+\infty)$. Функцијата е периодична со период π и е непарна, бидејќи $ctg(-x)= -ctgx$. Графикот на функцијата е прикажан на црт.3.39. Функцијата има нули за $x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ , каде што $k$ е цел број.

*Графикот на функцијата* $y=ctgx$ *се вика* ***котангенсоида***.



Црт. 3. 38.



Црт. 3. 39.

Користејќи ги графиците на тригонометриските функции, со помош на транслација и деформација може да се скицираат графиците на посложени тригонометриски функции, како на пример, $y = Asin(ax+b)$ итн.

**Пример 1.** *Користејќи го графикот на функцијата* $y=sinx$ *и* $y=cosx$ *со помош на транслација и деформација, да се скицираат графиците на следниве функции:*

**1)** $y = sin2x$;

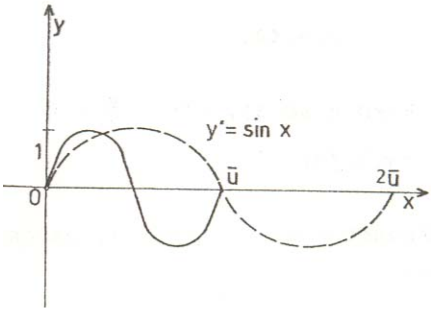
**2)** $y = cos\dfrac{x}{3}$;

**3)** $y = 2\,sin(x+1)$;

**4)** $y = -2\,cos(x-1)$.

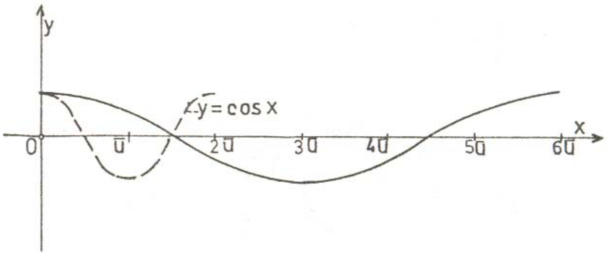
**1)** Со воведување на смената $2x=x'$, $y=y'$, функцијата $y = sin2x$ се трансформира во $y'=sinx'$, чиј график е познат.

Од трансформационите равенки се добива дека $x=\frac{x'}{2}$, а $y=y'$, што значи дека вредноста на аргументот $x'$ на секоја точка треба да се преполови, а ординатата да остане непроменета, (црт. 3.40).



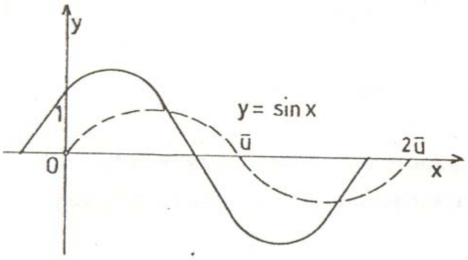
Црт. 3. 40.

**2)** Со смената $x' = \frac{x}{3}$ и $y' = y$ добиваме $x=3\,x'$, а $y=y'$, што значи дека аргументот $x\,'$ треба да се зголеми три пати, а ординатата да остане непроменета, за да го добиеме графикот на функцијата $y = cos\frac{x}{3}$, (црт3.41).



Црт. 3. 41.

**3)** Со трансформационите равенки $y'=\frac{y}{2}$ и $x+1=x'$ се добива графикот на функцијата $y=2sin(x+1)$, при што $y=2y'$, $x=x'-1$ (црт.3.42).



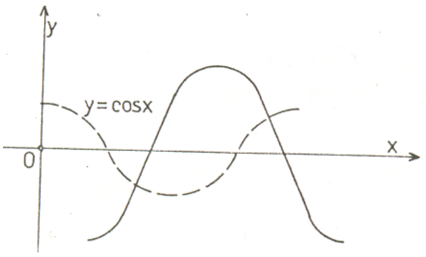
Црт. 3. 42.

**4)** Аналогно како и во **3)**,

$$y' = -\frac{y}{2}, \quad x' = x-1, \text{ т.е.}$$

$$y = -2y', \quad x' = x' + 1$$

(црт.3. 43).



Црт. 3. 43

**Пример 2.** *Да се нацртаат графиците на функциите*:

**1)** $y = sec\, x$;

**2)** $y = \ cosec\, x$.

1) $y = secx = \dfrac{1}{\cos x}$. Земајќи ги трансформационите равенки $y' = \dfrac{1}{y}$ и $x' = x$, добиваме дека треба да ја разгледаме функцијата $y' = cosx'$, од која треба да бараме реципрочна вредност од нејзинате ординати, бидејќи $y = \dfrac{1}{y'}$, а $x = x'$.

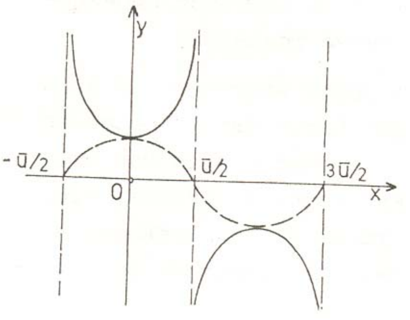
При пресметување реципрочна вредност од ординатите, треба да имаме предвид дека реципрочната вредност од 1 е непроменета, додека реципрочната вредност од броеви поголеми по апсолутна вредност од 1, се броеви по апсолутна вредност помали од 1, и обратно, реципрочната вредност од броеви помали по апсолутна вредност од 1 се броеви по апсолутна вредност поголеми од 1.

Користејќи го сево ова, графикот на функцијата $y = secx$ е прикажан на црт. 3.44.

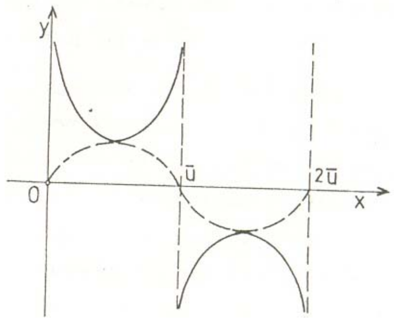
Од цртежот се гледа дека вредностите на функцијата се во интервалите $(-\infty,-1]$, $[1,+\infty\ )$; дека функцијата има асимптоти паралелни со $y$-оската за $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; дека е дефинирана за секој $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и дека е парна.

**2)** Аналогни размислувања доведуваат до графикот на функцијата $y = cosecx = \dfrac{1}{\sin x}$ (црт.3.45).

Има асимптоти паралелни со $y$-оската за $x=k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$ .; дефинирана е за секој $x\neq k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2,\dots$ . и е непарна.



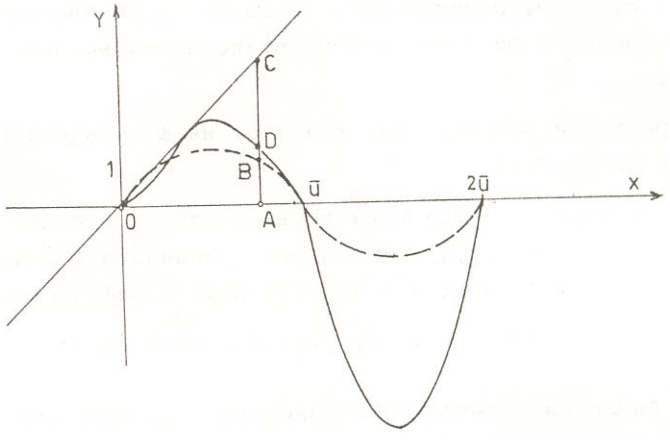
Црт. 3. 44.



Црт. 3. 45.

**Пример 3.** *Да се скицира графикот на функцијата* $y=x\sin x$, *користејќи го методот на* ***множење ординати***.

Ќе ги нацртаме кривите $y = x$ и $y = \sin x$. За произволно $x\in[0,2\pi]$ повлекуваме права паралелна со $y$-оската.



Црт. 3. 46.

Отсечката $\overline{\text{AC}}$ е ордината на функцијата $y=x$ за избраното $x$, а отсечката $\overline{\text{AB}}$ е ордината на функцијата $y=\sin x$ за истата вредност на $x$ (црт.3.46). На правата ќе го нанесеме производот на отсечките $\overline{\text{AB}}$ и $\overline{\text{AC}}$ и ќе ја добиеме точката D.

Постапката се повторува и за други вредности на $x$, но најчесто се повторува во точки во кои барем едната ордината е $0$ или $1$ и $-1$. Тогаш производот соодветно е нула или ординатата што е различна од $\pm1$ (водејќи сметка за знакот, т.е. дали се множи со $+1$ или со $-1$). Низата точки што ги добиваме на овој начин кога ќе се поврзат го даваат графикот на функцијата $y = x\sin x$.

На сличен начин може да се скицираат графици со метод на делење ординати, водејќи сметка дека делење со нула не е можно. Со овој метод ќе се сретнеме понатаму.

### Задачи за вежбање

**1.** Да се скицира графикот на следниве функции:

**1)** $y = 1+3\sin 2x$;

**2)** $y = -4\cos(2x+3)$;

**3)** $y = 4-3\cos\dfrac{2-x}{3}$;

**4)** $y = 2\sin(x+1) - 1$.

**2.** Користејќи го графикот на функциите $y=2\cos x$ и $y=1+\cos x$, да се нацртаат графиците на функциите:

$$y = \frac{1}{2\cos x} \quad и \quad y = \frac{1}{1+\cos x}\ .$$

## 5. 5. Циклометриски функции

Овие функции се инверзни на тригонометриските функции.

**1⁰** Како што веќе нагласивме при разгледувањето на тригонометриските функции, со функцијата $y=\sin x$ се задава врската помеѓу даден агол (лак) $x$ и вредноста $y$ на синусот за тој агол (лак). Инверзна на оваа функција е функцијата $\sin y=x$, а имено за дадено $x$ (вредноста на синусот), се добива $y$ (агол, лак, чиј синус е зададен).

На пример, за $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, се добива $\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. го имаме тврдењето дека синус на некој агол е рамен на $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Одредувањето на $y$ се сведува на одговор на прашањето за која вредност на аголот (лакот) синусот е рамен на $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Одговор е $y=\dfrac{\pi}{3}$, но и $\pi-\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{3}+2\pi$ итн.

Ако за независно променливата $x$ се избере вредноста 1, од релацијата $\sin y=x$, односно $\sin y=1$, се добива дека вредноста на функцијата е $y=\dfrac{\pi}{2}$ (агол, лак, чиј синус е рамен на 1, е $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$).

За експлицитно изразување на функцијата $\sin y = x$ воведена е ознаката $y = \mathrm{Arcsin}\, x$ ( се чита: $y$ е рамно на аркус синус $x$), при што $x$ е независно променлива (вредност на синусот), а $y$ е зависно променлива (агол, лак, чиј синус се задава).

Со оваа симболика, двата примера би се изразиле во следниов вид:

$y=\mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2}$ што значи: синусот на еден агол е рамен на $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Определи го аголот (лакот) $y$ чиј синус е $\frac{\sqrt{3}}{2}$, што дава $y=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ и $y=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ за $k=0, \pm1, \pm2,\dots$ .

$y=\mathrm{Arcsin}\ 1$, со значење: аголот чиј синус е 1 е $y=\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi$, за $k=0, \pm1, \pm2,\dots$ .

Графикот на функцијата $y = \mathrm{Arcsin}x$ ќе го нацртаме користејќи се со графикот на функцијата $y=\sin x$, врз основа на симетричноста на графиците на инверзните функции по однос на симетралата на I и III квадрант (црт.3.47).

Функцијата $y = \mathrm{Arcsin}x$ е дефинирана над множеството $[-1,1]$, што е условено од множеството на вредностите на функцијата $y=\sin x$. Функцијата е многузначна, бидејќи на секоја вредност на синусот ѝ одговараат неограничено многу агли (кружни лаци). Геометриски тоа значи, права паралелна со $y$-оската во која и да било точка од интервалот на дефинираност има со графикот бескрајно многу пресечни точки. Ако претпоставиме дека $x=x_0$, вредностите на функцијата ќе бидат: $y=y_0+2k\pi$ и $y=(2k+1)\pi-y_0$, каде што $k=0, \pm1, \pm2,\dots$ .

*Меѓу сите вредности на функцијата* $y = \mathrm{Arcsin}x$ *ќе ги издвоиме оние кои припаѓаат на интервалот* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *т.е.*

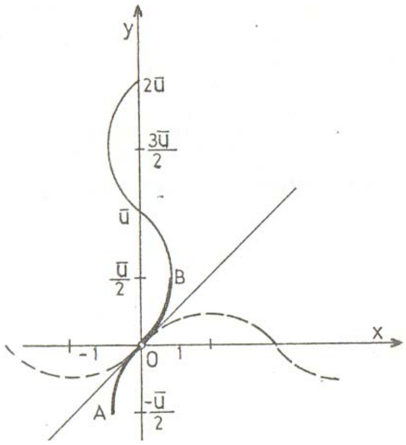
$$-\frac{\pi}{2} \leq \mathrm{Arcsin}x \leq \frac{\pi}{2}$$

*и ќе ги означиме со* $\arcsin x$.

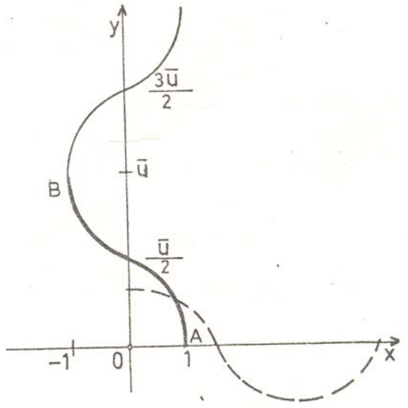
*Функцијата* $y=\arcsin x$ *се вика* ***главна вредност на функцијата*** $y = \mathrm{Arcsin}x$.

Графикот на функцијата $y = arcsinx$ ќе биде лакот АВ од синусоидата по должината на ординатната оска. Оваа функција во интервалот $[-1,1]$ монотоно расте. Таа е инверзна функција на функцијата

$$y = sinx, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$



Црт. 3. 47.



Црт. 3. 48.

**2⁰** Следната циклометриска функција е функцијата $y=Arccosx$. Оваа функција имплицитно е изразена со врската $cosy=x$. Независно променливата $x$ е вредност на косинусот, а зависно променливата $y$, аголот (лакот), чиј косинус се задава со променливата $x$.

На пример, во функцијата $y=Arccos\frac{1}{2}$ се задава вредноста на косинусот $x=\frac{1}{2}$. Вредноста на функцијата е $y=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ и $y=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ (бидејќи аголот чиј косинус е рамен на $\frac{1}{2}$ е $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ и $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ).

Според тоа, ако претпоставиме дека $x=x_0$ ќе биде:

$$Arccos\, x_0 = y_0+2k\pi \text{ и } Arccos\, x_0 = -y_0+2k\pi, \qquad (1)$$

каде што $k=0, \pm1, \pm2,\ldots$ , а $x\in[-1,1]$, бидејќи

$$cos(y_0+2k\pi)= cos(-y_0+2k\pi).$$

Релацијата (1) укажува дека функцијата $y=Arccosx$ е многузначна функција, бидејќи на секоја вредност на косинусот му припаѓаат неограничено многу кружни лаци (односно неограничено многу агли).

*Меѓу сите вредности на функцијата $y=Arccosx$, се разгледуваат само оние вредности што се наоѓаат во интервалот* $[0,\pi]$ т.е.

$$0 \leq Arccos\,x \leq \pi$$

и ги означуваме со $y=arccosx$.

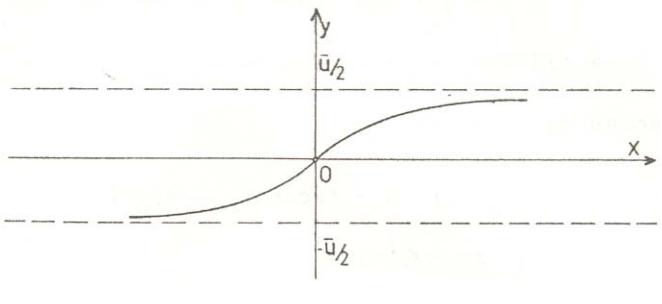
*Функцијата $y=arccosx$ се вика* ***главна вредност на функцијата*** *$y=Arccos\,x$.*

Графикот на функцијата $y=Arccosx$ се добива со помош на графикот на функцијата $y=cosx$. Се црта косинусоида, симетрична со кривата $y=cosx$ во однос на симетралата на I и III квадрант (црт.3.48). Графикот на функцијата $y=arccosx$ ќе биде лакот AB од косинусоидата по должината на ординатната оска. Оваа функција монотоно опаѓа во интервалот $[-1,1]$. Таа е инверзна функција на функцијата

$$y = cos\,x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

**$3^0$** Функцијата $y=Arctgx$ е дефинирана во интервалот $(-\infty,+\infty)$ и е многузначна, бидејќи $Arctgx_0 = y_0 + k\pi$. За главна вредност на оваа функција се земаат оние вредности од многузначната функција што се во интервалот $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. На црт.3.49 е нацртан лакот што одговара само на главната вредност на функцијата $y=Arctgx$ , т.е. $y=arctgx$. Таа функција е монотоно растечка во интервалот $(-\infty,+\infty)$ и инверзна е на функцијата

$$y=tgx, \; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

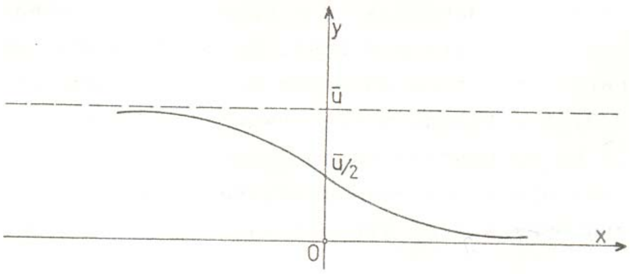


Црт. 3. 49.

**$4^0$** Функцијата $y=Arcctgx$ е дефинирана во интервалот $(-\infty,+\infty)$ и е многузначна, бидејќи $Arcctgx_0 = y_0+k\pi$. За главна вредност на оваа функција се земаат само оние вредности од многузначната функција $y=Arcctgx$ што се во интервалот $(0,\pi)$.

На цртежот 3.50 е нацртан само графикот на главната вредност на функцијата $y=Arcctgx$, т.е. графикот на функцијата $y=arcctgx$. Оваа функција е монотоно опаѓачка во интервалот $(-\infty,+\infty)$ и инверзна е на функцијата

$$y=ctgx,\ 0<x<\pi.$$



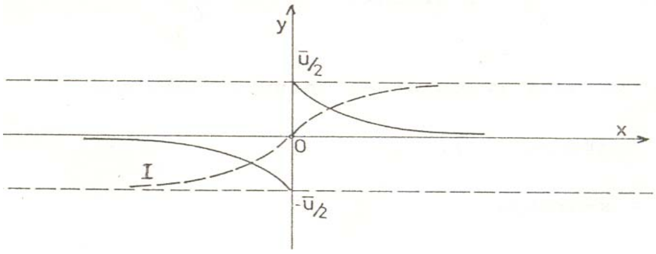
Црт. 3. 50.

Врските што постојат помеѓу циклометриските функции често се користат во решавањето на конкретни задачи. Овде ќе наведеме само две, без доказ.

$$arctgx = arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad arcsinx = arctg\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Пример 1** *Да се нацрта графикот на функцијата* $y=arctg\dfrac{1}{x}$.

Со трансформационите равенки $x' =\dfrac{1}{x}$ и $y'=y$, дадената функција се трансформира во функцијата $y'=arctgx'$ (кривата означена со I). Преку формулате $x=\dfrac{1}{x'}$ и $y=y'$ се добива кривата $y=arctg\dfrac{1}{x}$ со тоа што на секоја точка од кривата I се определуваат точки со реципрочна вредност на апсцисата и непроменета вредност на ординатата (црт. 3.51).



Сл. 3.51.

## Задачи за вежбање

**1** Да се определи дефиниционата област на следниве функции:

| | |
|---|---|
| **1)** $y = arcsin\,(x-2)$; | Одг.: **1)** $x\in[1,3]$; |
| **2)** $y = arccos\,(1-2x)$; | **2)** $x\in[0,1]$; |
| **3)** $y = arccos\,\dfrac{1-2x}{4}$; | **3)** $x\in\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right]$; |
| **4)** $y = arcsin\,\sqrt{2x}$; | **4)** $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$; |
| **5)** $y = arcsin\dfrac{x-3}{2x+1}$. | **5)** $x\in(-\infty,-4]\cup\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right)$. |

**2.** Покажи ја точноста на следниве врски:

**1)** $arcsinx + arccosx = \dfrac{\pi}{2}$;

**2)** $arcsinx = arccos\sqrt{1-x^2}$;

**3)** $arccos\,(1-2x^2) = 2\,arcsinx$;

**4)** $arctg\,\dfrac{2x}{1-x^2} = 2\,arctgx$.

**3.** Да се скицира графикот на следниве функции:

**1)** $y = arcsin(x-1)$;

**2)** $y = x - arctgx$;

**3)** $y = arcsin\dfrac{1}{x-1}$;

**4)** $y = arctg\,(x-1)$;

**5)** $y = arccos\,\dfrac{1}{x}$;

**6)** $y = arcsin(sinx)$.

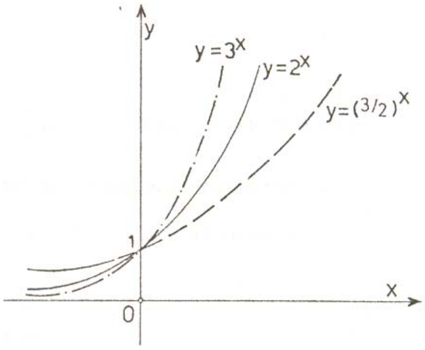
## 5.6. Експоненцијална функција

*Функцијата од вид* $y=a^x$ $(a>0)$ *се вика* ***експоненцијална функција****. Променливата* $x$ *се вика* ***независно променлива****, константата* $a$ *е* ***основа на експоненцијалната функција****.* Таа е дефинирана над множеството на реалните броеви.

Графикот на функцијата е зависен од основата на функцијата и се разликува во зависност од тоа дали е константата $a>1$ или $0<a<1$, затоа ќе ги разгледаме одделно двата случаја:

**$1^0$** $a>1$.

Нека, например, $a=2$. Функцијата $y=2^x$ има график кој е нацртан на црт. 3.52.



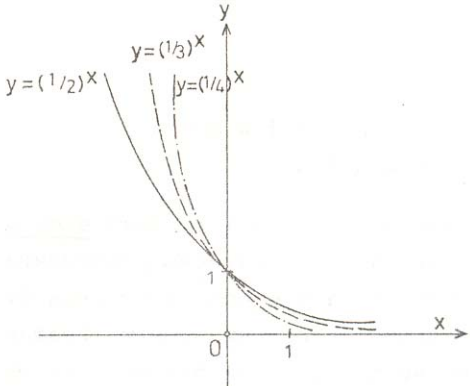
Црт. 3. 52.

Функцијата монотоно расте. Негативниот дел на $x$-оската е асимптота на кривата. На цртежот се прикажани уште и графиците на функциите $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ и $y=3^x$. Очигледно е дека сите криви при $a>1$, независно од вредноста на основата, минуваат низ точката $(0,1)$, што е карактеристично за оваа функција;

**$2^0$** $0<a<1$.

Нека, на пример, $a=\frac{1}{2}$. Графикот на функцијата $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ е прикажан на црт. 3.53.

На цртежот се прикажани и графиците на експоненцијалните функции $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$). Кривите исто така минуваат низ карактеристичната точка (0,1).



Црт. 3. 53.

На цртежите 3.52 и 3.53 е очигледна симетријата што постои помеѓу графиците на функциите $y=a^x$ и $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ во однос на $y$-оската. Таа симетрија следува од фактот што $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$.

Експоненцијалната функција се сретнува и во следниве видови:

$$y = a^{bx}, \quad y = a^{bx+c}, \quad y = a^{bx} + d.$$

Многу често за основа на експоненцијалната функција се зема ирационалниот број $e$, т.е. се разгледува експоненцијалната функција $y=e^x$. Примената на бројот $e$ за основа на експоненцијалната функција е толку честа што кога се задава експоненцијална функција не се споменува основата, подразбирајќи дека тоа е бројот $e$.

Поради честата употреба, за експоненцијалната функција се подготвени табели во кои за зададена вредност на $x$, може да се прочита соодветната вредност на функцијата.

## Задачи за вежбање

**1.** Да се скицираат графиците на следниве експоненцијални функции:

**1)** $y = -2^x$;

**2)** $y = 2^{-x}$;

**3)** $y = 2^x + 3$;

**4)** $y = 2^{x+1} - 3$.

**2.** Дадена е функцијата $f(x) = 2^{x-2} - 4$. Да се определи дефиниционата област на функциите $f(x)$ и $\frac{1}{f(x)}$ и да се скицираат нивните графици со помош на графикот на функцијата $y = 2^x$.

## 5.7. Хиперболични функции

Четирите функции: $y=shx$ (*синус хиперболичен*), $y=chx$, (*косинус хиперболичен*), $y=thx$ (*тангенс хиперболичен*) и $y=cthx$ (*котангенс хиперболичен*), ја чинат групата *хиперболични функции*. Овие функции се дефинирани преку експоненцијалната функција со следниве релации:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Графиците на овие функции се скицираат со помош на графиците на функциите $y = e^x$ и $y = e^{-x}$, врз основа на врските што ги изразуваат вредностите на овие функции.

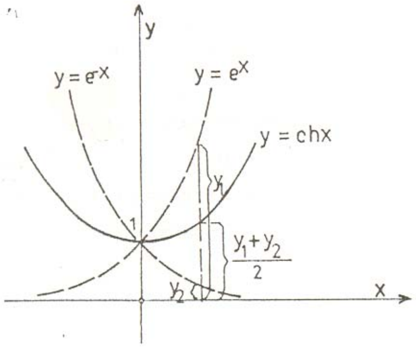
На црт. 3.54 е прикажан графикот на функцијата $y=chx$. Графикот на оваа функција е нацртан на тој начин, што за произволна вредност на апсцисата се собрани вредностите на ординатите на помошните функции $y= e^x$ и $y= e^{-x}$ и поделени со 2. Функцијата е дефинирана во интервалот $(-\infty,+\infty)$, парна е бидејќи $ch(-x)= chx$. Парноста на функцијата лесно се покажува од релацијата

$$ch(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = chx.$$

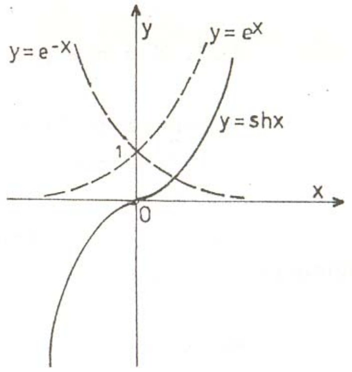
На црт. 3.55 е прикажан графикот на функцијата $y=shx$.

Функцијата $y=shx$ е дефинирана во интервалот $(-\infty,+\infty)$ и за разлика од $y=chx$, оваа функција е непарна, бидејќи

$$sh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = -shx.$$



Црт. 3. 54.



Црт. 3. 55.

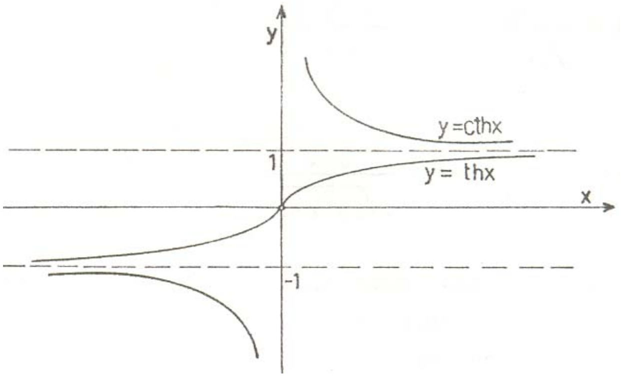
Функцијата $y=thx$ е дефинирана во интервалот $(-\infty,+\infty)$. Непарна е бидејќи

$$th(-x) = \frac{sh(-x)}{chx(-x)} = -\,thx.$$

Функцијата $y=cthx$ е дефинирана за секој $x\neq 0$ и непарна е бидејќи

$$cth(-x) = \frac{ch(-x)}{shx(-x)} = -\,cthx.$$

Графиците на функциите $y=thx$ и $y=cthx$ ќе се добијат користејќи го методот за скицирање на графици со помош на *методот делење на ординати* (црт. 3.56).



Сл. 3.56.

Помеѓу хиперболичните функции постојат врски (идентитети) слични на врските помеѓу тригонометриските функции. Ќе наведеме само некои од нив:

$$ch^2x - sh^2x = 1,$$

$$sh2x = 2\,shx\,chx, \quad \text{бидејќи} \quad sh2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2},$$

$$ch2x = ch^2x + sh^2x, \qquad ch2x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2},$$

$$ch2x = 2ch^2x - 1 = 1 + 2sh^2x,$$

$$th2x = \frac{2thx}{1+th^2x}, \qquad cth2x = \frac{cth^2x+1}{2cthx},$$

$$shx = \frac{thx}{\sqrt{1-th^2x}}, \qquad chx = \frac{1}{\sqrt{1-th^2x}},$$

$$thx = \frac{shx}{\sqrt{1+sh^2x}} = \frac{\sqrt{ch^2x-1}}{chx},$$

$$cthx = \frac{\sqrt{1+sh^2x}}{shx} = \frac{chx}{\sqrt{ch^2x-1}}\ .$$

Лесно се докажуваат овие врски ако хиперболичните функции се изразат преку експоненцијалната функција, по дефиницијата што е дадена погоре.

## 5. 8. Логаритамска функција

*Логаритамската функција е инверзна функција на експоненцијалната функција.* За разлика од експоненцијалната функција $y=a^x$, при која за избрана вредност на аргументот $x$ (степенскиот показател) се определува вредноста на степенот $a^x$, кај логаритамската функција што се изразува во вид $a^y=x$ ($a$-основа на функцијата) за избрана вредност на степенот се определува вредноста на степенскиот показател.

Нека е зададена логаритамската функција $2^y=x$ (основа на степенот е 2) и вредноста на степенот $x=16$. Вредноста на функцијата $y$ се определува од релацијата $2^y=16$. Се бара со кој степенски показател треба да се степенува основата на степенот 2 за да се добие вредност на степенот 16. Одговор е дека $y = 4$, бидејќи $2^4 = 16$.

Или, да претпоставиме дека е зададена логаритамска функција за основа 10, т.е. $10^y = x$.

За $x=1000$, се добива $y = 3$;

За $x=100000$, се добива $y = 5$;

За $=\frac{1}{100}$, се добива $y = -2$;

И во двата примера определувањето вредноста на функцијата се сведува на определување на степенскиот показател при зададена вредност на степенот (за однапред земена вредност на основата), што е позната математичка операција која се вика логаритмирање. Независно променливата $x$ е еден број (нумерус), а зависно променливата $y$ е логаритам на тој број (при дадена основа).

Фактот дека $y$ е логаритам на бројот $x$ за основа $a$, односно функцијата $a^y= x$ во експлицитен вид се изразува во вид

$$y = log_a x,$$

се чита: $y$ е логаритам од $x$ за основа $a$.

Според тоа, врските $a^y = x$ и $y = log_a x$ се идентични.

Од последниве две врски следува идентитетот

$$a^{log_a x} \equiv x\,.$$

Ако за аргументот се земе вредност $\frac{1}{x}$, добиваме нова идентична врска:

$$a^{-log_a x} = \frac{1}{x}$$

и по општо:

$$a^{log_a f(x)} = f(x).$$

Со овие идентитети често ќе се користиме при решавањето диференцијални равенки.

Горе наведените примери по укажаниот експлицитен вид на логаритамската функција може да се изразат во следниов вид:

$$y = log_2 16, \quad y = 4,$$

што значи логаритам од 16 за основа 2 е 4.

Потоа:

$$y = log_{10} 1000 = 3;$$

$$y = log_{10} 100000 = 5;$$

$$y = log_{10} \frac{1}{100} = -2.$$

За определување на логаритмите се составени така наречени логаритамски таблици кои ги има повеќе и по кои за секој број може да се прочита вредноста на логаритамот. Постојат логаритамски таблици за логаритми за основа 10 и за логаритми за основа Неперов број $e$ =2,71828… .

*Логаритмите на броевите за основа* 10 *се викаат* ***декадни логаритми****, а логаритмите за основа бројот е се викаат* ***Неперови (природни) логаритми****.*

Вообичаено е кога основата $a$=10, логаритамската функција да се пишува без назначување на основата во вид $y$=$logx$, а кога основата е бројот $e$, логаритамската функција се пишува во вид $y$=$lnx$.

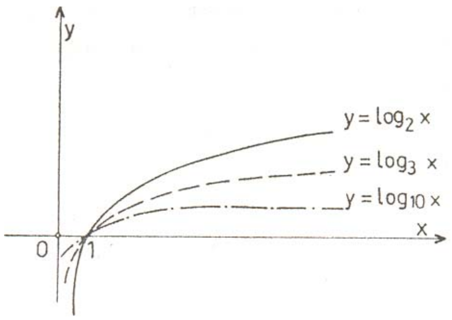
Во сите други случаи логаритамската основа се пишува.

Графикот на логаритамската функција се добива врз основа на графикот на функцијата $y$=$a^x$, ако користиме дека графиците на две заемно инверзни функции се симетрични во однос на правата $y$=$x$.

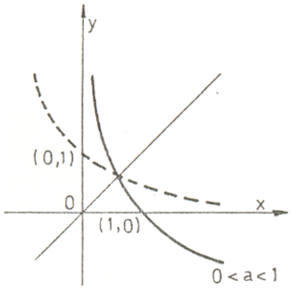
Логаритамската функција е дефинирана над множеството на позитивните реални броеви $(0,+\infty)$.

Ако $a>1$, тогаш функцијата $y=log_a x$ монотоно расте во интервалот $(0,+\infty)$, (црт.3.57). Функцијата има нула во точката $x=1$. Кога $x\in(0,1)$, тогаш $log_a x<0$, а кога $x\in(1,+\infty)$ тогаш $log_a x>0$.

Ако $0<a<1$, тогаш функцијата $y=log_a x$ во интервалот $(0,+\infty)$ монотоно опаѓа (црт.3.58). Нулата на функцијата е во точката $x=1$. Кога $x\in(0,1)$, тогаш $log_a x>0$, а кога $x\in(1,+\infty)$ тогаш $log_a x<0$.



Црт. 3. 57.



Црт. 3. 58.

### $1^0$ *Врска помеѓу природните и декадните логаритми*

Природните и декадните логаритми се поврзани помеѓу себе со формулите:

$$log\,x = M\ ln\,x, \qquad ln\,x = \frac{1}{M}\ log\,x.$$

*Бројот М се вика* ***модул за преминување од природни на декадни логаритми*** *и неговата вредност е* $M$=0,434294 $(\frac{1}{M}=2{,}302585)$.

Наведените релации лесно ќе ги докажеме и ќе го одредиме значењето на константата $M$, ако земеме две логаритамски функции (едната за основа $a=e$, а другата за основа $a=10$), а имено

$$y_1 = ln\,x; \qquad y_2=log\,x.$$

Првата равенка ќе ја решиме по $x$: $x=e^{y_1}$ и ќе ја замениме во втората равенка, по што се добива:

$$y_2 = log(e^{y_1}) = y_1\, log_{10}e$$

односно

$$log\,x = ln\,x\; log_{10}e.$$

Заменувајќи $log_{10}e=M$, се добива формулата

$$log\,x = M\,lnx,$$

при што константата $M$, е, очигледно, логаритам на бројот $e$ за основа 10.

Оваа релација овозможува лесно определување на логаритамот на некој број за основа 10, ако се знае логаритамот на тој број за основа $e$. Ваков премин често е неопходен при користење на електронските системи.

## Задачи за вежбање

**1.** Да се определи дефиниционата област на функциите:

| | |
|---|---|
| **1)** $y = log(x+3)$; | Одг.: **1)** $(-3,+\infty)$; |
| **2)** $y = log(2x^2-10x+12)$; | **2)** $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$; |
| **3)** $y = \sqrt{log(5-x)}$; | **3)** $(-\infty,4]$; |
| **4)** $y = \dfrac{1}{log(1-x)} + \sqrt{x+2}$; | **4)** $[-2,0)\cup(0,1)$; |
| **5)** $y = arcsin(1-x) + log(logx)$. | **5)** $(1,2]$. |

**2.** Да се скицира графикот на функциите:

**1)** $y = log_2(x+1)$; **2)** $y = 1+ log_4(x-2)$;

**3)** $y = log_2(-x)$; **4)** $y = \dfrac{1}{log_2(x+1)}$;

**5)** $y = (log_x 2)^2$. (Упатство: $log_a b = \dfrac{1}{log_b a}$).

# 6. КЛАСИФИКАЦИЈА НА ФУНКЦИИ

*Функциите*:

**1)** *степенска* $y = x^{\alpha}$, $(\alpha \in \mathrm{R})$,

**2)** *експоненцијална* $y = a^{x}$, $(a>0, a \neq 1)$,

**3)** *логаритамска* $y = log_{a}x$, $(a>0, a \neq 1)$,

**4)** *тригонометриските функции*: $y = sin\, x$, $y = cos\, x$, $y = tgx$, $y = ctgx$,

**5)** *циклометриските функции*: $y = arcsin\, x$, $y = arccos\, x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$ *и*

*функцијата* $y = C$ *се викаат* ***основни елементарни функции***.

*Елементарни функции во поширока смисла* се основните елементарни функции и функциите кои можат да се добијат од нив со помош на аритметички операции (собирање, вадење, множење и делење), како и формирање сложени функции од нив, со примена на тие операции конечен број пати.

**Пример 1.** Функцијата

$$y = \sqrt{x^2 \cos x + \log tg\, x}$$

е елементарна функција, бидејќи се добива од основните елементарни функции со последователна примена на следниве операции:

$1^0$ степенската функција $x^2$ е помножена со тригонометриската функција $cosx$;

$2^0$ од логаритамската функција $logx$ и тригонометриската функција $tgx$ е формирана сложена функција $log\, tgx$;

$3^0$ двете добиени функции се собираат;

$4^0$ од добиената функција и функцијата $\sqrt{x}$ е формирана дадената сложена функција.

**Пример 2.** Нека променливата $x \in (1, +\infty)$, а променливата $y$ се изразува со формулата

$$y = x^{x},$$

тогаш $y$ е елементарна функција од $x$. Таа монотоно расте во целиот интервал на менување на $x$ и добива вредности од $(1, +\infty)$.

Променливата $x$ од своја страна е еднозначна функција од $y$, но се покажува дека е невозможно да се изрази преку $y$ со помош на конечен број од горе споменатите операции. Затоа $x$ не е елементарна функција од променливата $y$.

Елементарните функции обично се делат на *алгебарски и трансцендентни.*

**1. Алгебарски функции.** Секоја функција $y(x)$ која е имплицитно зададена со равенката

$$P_n(x)\,y^n + P_{n-1}(x)\,y^{n-1} + \dots + P_1(x)\,y + P_0(x) = 0,$$

каде што $n$ е ненегативен цел број, а $P_i\,(x)$, $(i = 0,1, \dots ,n)$ се полиноми од $x$, при што $P_n(x) \equiv 0$ и полиномот на левата страна не се разложува на реални множители од понизок степен се вика алгебарска функција.

*Алгебарските функции се делат на рационални и ирационални.*

*Рационалните се делат на цели (полиномни) функции и дробно-рационални функции*

**1. 1. Полиномни функции.** *Функциите кои се зададени со формулите од видот*

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1 + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$$

*се викаат **полиномни функции**.*

Дефиниционата област на овие функции е множеството на сите реални броеви, т.е $x \in (-\infty,+\infty)$. *Ако* $a_n \neq 0$, *тогаш бројот* $n$ *се вика **степен на** дадениот **полином**. Полиномот од прв степен се вика **линеарна функција**;*

**1. 2. Дробно-рационални функции.** *Тоа се функции кои се задаваат во вид*

$$y = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

*каде што* $P_m(x)$ *и* $Q_n(x)$ *се полиноми.*

Дефинициона област е множеството $(-\infty,+\infty)\backslash A$, каде што $A$ е множеството од нулите на именителот;

**1. 3. Ирационални функции.** *Тоа се оние функции при кои променливата се степенува со рационален број*;

На пример, $y = 1 + x^{\frac{3}{2}}$

**2. Трансцендентни функции**. *Елементарни функции што не се алгебарски се викаат трансцендентни функции.*

На пример, тригонометриските, циклометриските, експоненцијална и логаритамска функција се трансцендентни функции.

## 7. ФУНКЦИИ ДАДЕНИ ВО ПАРАМЕТАРСКИ ВИД

Често пати една функција наместо да се изрази во директна врска помеѓу независно променливата и функцијата во вид $y=f(x)$ или $F(x,y)=0$ може да се изрази со параметарски равенки, изразувајќи ја врската во зависност од некоја трета променлива, наречена ***параметар***.

Симболички една функција, изразена параметарски, се запишува во следниов вид:

$$x = \varphi\ (t),$$

$$y = \psi\ (t).$$

Карактеристично е овде, што не постои директна врска помеѓу $x$ и $y$, а напротив двете променливи $x$ и $y$ се изразени во зависност од една трета големина, во случајов означена со $t$. Изборот на параметарот зависи од задачата што се решава. Можен е поголем избор на параметри и од изборот на параметарот една иста функција може да биде изразена со различни параметарски равенки.

Ваков начин на изразување на функцијата често се користи во механиката (обично параметарот е време), а често и кога при познато геометриско својство на точките на кривата треба да се состави равенката на кривата. Што се однесува до корисата на ваквиот начин на изразување на функциите, ќе споменеме дека при решавањето одреден број задачи многу е попрактично функцијата да биде изразена со параметарски равенки, а понекогаш речиси е невозможно задачата да се реши, ако не се изрази во параметарски вид.

**Пример 1.** *Зададена е функцијата*

$$x = a\cos t,$$

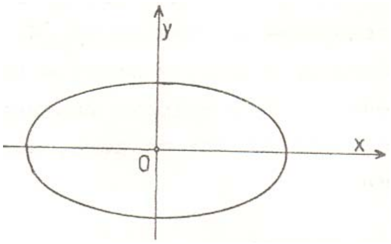
$$y = b\sin t.$$

Ова е наједноставен пример на функција зададена со параметарски равенки. Графикот на функцијата ќе се нацрта врз основа на табелата што ќе се состави на тој начин, што за произволно избрани вредности на параметарот ќе се пресметаат соодветните вредности на $x$ и $y$.

Се добива следнава табела:

| $t$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $a$ | $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $-\frac{a\sqrt{2}}{2}$ | $-a$ | $-\frac{a\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ | $a$ |
| $y$ | $0$ | $\frac{b\sqrt{2}}{2}$ | $b$ | $\frac{b\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $-\frac{b\sqrt{2}}{2}$ | $-b$ | $-\frac{b\sqrt{2}}{2}$ | $0$ |

Паровите вредности за $x$ и $y$ нанесени во координатен систем и поврзани ја даваат кривата (во случајов елипса со полуоски $a$ и $b$) (црт.3.59).



Црт. 3. 59.

Често пати е потребно една крива, зададена со равенка во експлицитен вид или имплицитен вид, да се изрази со параметарски равенки или обратно. Ќе покажеме како тоа се постигнува на разгледуваниов пример.

Ако сакаме функцијата

$$x = a\cos t,$$

$$y = b\sin t,$$

да се изрази во директна врска помеѓу независно променливата $x$ и функцијата $y$, ќе се изврши елиминација на параметарот $t$.

Во конкретниов случај елиминацијата ќе се изврши на следниов начин:

$$\frac{x}{a} = cos\, t, \qquad \frac{y}{b} = sin\, t,$$

а по квадрирање на равенките

$$\frac{x^2}{a^2} = cos^2 t, \qquad \frac{y^2}{b^2} = sin^2 t$$

и собирање, се добива:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Обратно, нека елипсата е зададена со равенката

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ако земеме $x=acost$, по заменување во равенката на елипсата добиваме дека $y=bsint$. Според тоа, *параметарските равенки на елипсата* се:

$$x = a\, cos\, t,$$

$$y = b\, sin\, t.$$

Но, овој вид параметарски равенки на елипсата не е единствен.

Ако избереме $x=t$, по заменување во имплицитната равенка на елипсата се добива

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2}\ .$$

Според тоа, параметарските равенки на елипсата може да се изразат и во следниов вид:

$$x = t,$$

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2}$$

и на уште многу други начини. Но, да споменеме дека не сите видови параметарски равенки на елипсата се погодни за користење во решавањето задачи поврзани со елипса.

Ќе наведеме уште неколку криви зададени со параметарски равенки, кои ќе ги користиме почесто.

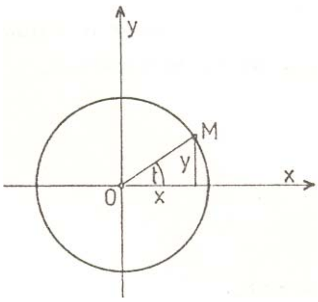
Равенките

$$x = r\cos t,$$

$$y = r\sin t$$

се *параметарски равенки на централната кружница со радиус* $r$.

Во ова можеме многу едноставно да се увериме. Ако на кружницата избереме една точка М (црт.3.60) со апсциса $x$ и ордината $y$, тогаш во зависност од големината на централниот агол (ќе го означиме со $t$) $x$ и $y$ ќе се изразат со формулите:



Црт. 3. 60.

$$x = r\cos t,$$

$$y = r\sin t.$$

Всушност, апсцисата и ординатата на точката М се изразени во зависност од параметарот, што е битно за една крива да се изрази со параметарски равенки.

Параметарот $t$ во случајов е централниот агол. За секоја вредност на $t$ се добива една точка на кружницата.

За промена на параметарот $t$ од $0$ до $2\pi$ ќе се опише целата кружница.

Равенката на хиперболата, која најчесто се изразува во имплицитна форма (црт.3.61)

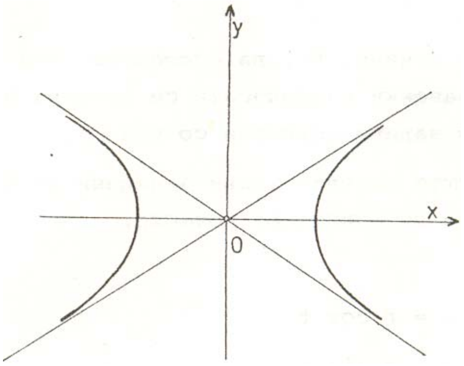
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

може да се изрази со параметарски равенки во следниов вид:

$$x = a\,ch\,t,$$

$$y = b\,sh\,t.$$

Може лесно да се констатира дека за секоја вредност на параметарот $t$ соодветствува, според овие врски, една точка на хиперболата. Но, ние ќе се увериме наједноставно ако извршиме елиминација на параметарот $t$ со цел да ја добиеме равенката на хиперболата во имплицитен вид.



Црт. 3. 61

Од равенките

$$x = a\,ch\,t,$$

$$y = b\,sh\,t$$

добиваме:

$$\frac{x}{a} = ch\,t, \qquad \frac{y}{b} = sh\,t.$$

По квадрирање

$$\frac{x^2}{a^2} = ch^2\,t, \qquad \frac{y^2}{b^2} = sh^2 t$$

и вадење

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = ch^2\,t - sh^2 t$$

се добива:

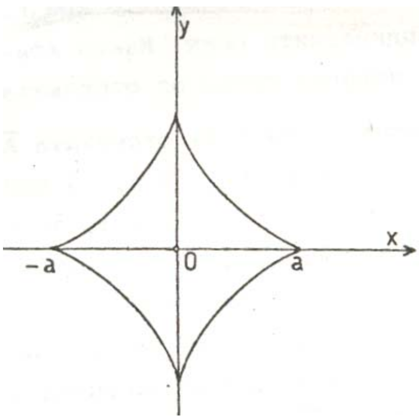
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{бидејќи} \qquad ch^2\,t - sh^2 t = 1.$$

За $a = b$, равенките

$$x = a\,ch\,t, \qquad y = a\,sh\,t.$$

се параметарски равенки на рамностраната хипербола позната со равенката во имплицитен вид

$$x^2 - y^2 = a^2.$$



Црт. 3. 62.

Со равенките:

$$x = a\ cos^3t,$$

$$y = a\ sin^3t$$

се изразува кривата наречена *астроида*, чиј график е претставен на црт.3.62.

Оваа крива често се изразува и со равенка во имплицитна вид. Со слична постапка, по елиминација на параметарот $t$ од равенките

$$x = a\ cos^3t,$$

$$y = a\ sin^3t,$$

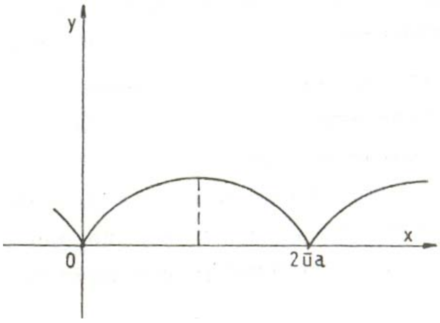
се добива равенката на астроидата во имплицитен вид:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Кривата наречена *циклоида* (графикот е претставен на црт.3.63) се задава со равенките:

$$x = a\ (t–sint),$$

$$y = a\ (1–cost).$$



Црт. 3. 63.

Првиот лак на циклоидата ќе се оформи за вредности на параметарот од $t = 0$ до $t = 2\pi$.

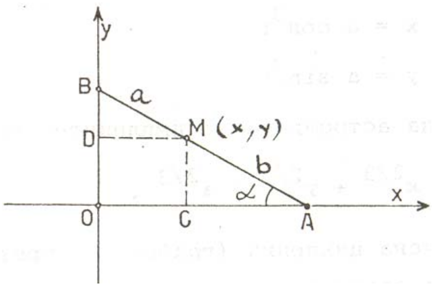
На неколку примери ќе покажеме како се составуваат параметарските равенки на некои геометриски места на точки.

**Пример 1.** *Во правоаголен координатен систем се движи отсечката* $\overline{AB}$ *со должина* $\ell$ *така што нејзините крајни точки се лизгаат секогаш по координатните оски. Каква крива опишува при тоа движење една произволна точка од отсечката?*

Ќе избереме една произволна точка M на отсечката $\overline{AB}$ . Нека растојанието на точката M до точката B е $a$, а растојанието до точката A е $b$ (црт.3.64). Кога отсечката $\overline{AB}$ се поместува (притоа A е секогаш на $x$-оската, а B секогаш на $y$-оската) точката M опишува една крива.

Наша цел е да ја определиме равенката на оваа крива. Од условите на задачата веднаш ни се познати две точки низ кои поминува бараната крива. Точката $(a{,}0)$ кога отсечката $\overline{AB}$ е во хоризонтална положба (се поклопува со $x$-оската) и точката $(0{,}b)$ кога отсечката ќе биде во вертикална положба (се поклопува со $y$-оската).

Равенката на таа крива ќе ја изразиме со параметарски равенки, па затоа ќе треба и апсцисата и ординатата на точката M да се изразат во зависност од еден параметар.



Црт. 3. 64.

За параметар ќе избереме големина, со промената на која се изразува движењето на отсечката $\overline{AB}$. Конкретно, овде за параметар може да се избере аголот $\alpha$. Кога $\alpha$ се ненува од 0 до $\frac{\pi}{2}$ се постигнува движењето на отсечката дадено во условот на задачата. Исто така, би можело, за параметар да се избере растојанието $r$ од координатниот почеток до точката A.

Ако се менува растојанието $r$ од $0$ до $\ell$, се постигнува истото што и кога аголот $\alpha$ се ненува од 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Ќе се решиме параметарот да биде аголот $\alpha$ и ќе се потрудиме да ги изразиме $x$ и $y$ во зависност од $\alpha$.

Од триаголникот MBD, следува $x = a\cos\alpha$ .

Од триаголникот MCA, следува $y = b\sin\alpha$ .

Според тоа, равенката на кривата што ја опишува точката M гласи:

$$x = a\cos\alpha ,$$
$$y = b\sin\alpha .$$

Ако се решиме параметар да ни биде $r$ (растојанието од координатниот почеток до точката A), равенката на кривата ќе ја добиеме во вид:

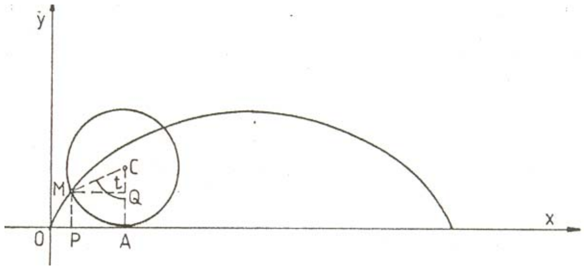
$$x = \frac{ar}{\ell},$$

$$y = \frac{b}{\ell}\sqrt{\ell^2 - r^2} .$$

Овие врски ги добиваме изразувајќи ја пропорционалноста на страните што следува од сличноста на триаголникот BDM и триаголникот BOA, а триаголникот MCA е сличен со триаголникот BOA.

**Пример 2.** *Да се напишат параметарските равенки на циклоидата, опишана од точка на кружница со радиус* $a$*, која се тркала по една права.*

Нека со M означиме фиксна точка од дадената кружница, која во почетниот момент се наоѓа во координатниот почеток, а за $x$-оска ќе ја земеме правата по која се тркала кружницата (црт.3.65).



Црт. 3. 65.

Централниот агол MCA = $t$ ќе го земеме за параметар при тоа движење, па следува:

$$\overline{OA} = AM = at.$$

За координатите $x$ и $y$ на точката M се добива:

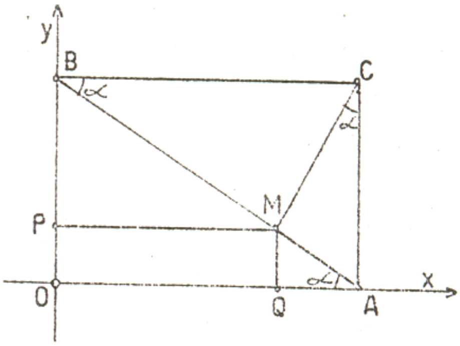
$$x = \overline{OA} - \overline{PA} = \overline{OA} - \overline{MQ} = at - a\sin t,$$

$$y = \overline{CA} - \overline{CQ} = a - a\cos t.$$

Според тоа, параметарските равенки се:

$$x = a(t - sint), \qquad y = a(1 - cost).$$

**Пример 3.** *Краевите на отсечката* $\overline{AB}$ *се лизгаат по оските во Декартовиот координатен систем. Правите AC и BC се паралелни на координатните оски и се сечат во точката C. Од точката C се спушта нормала* $\overline{CM}$ *на отсечката* $\overline{AB}$. *Да се најде равенката на геометриското место (кривата) на точката* M *при севозможна положба на отсечката* $\overline{AB}$ (црт.3.66).



Црт. 3. 66.

Нека со $m$ и $n$ ја обележиме должината на отсечките $\overline{BM}$ и $\overline{MA}$ соодветно.

Земајќи го аголот α, агол помеѓу отсечката $\overline{AB}$ и $x$-оската, за параметар и користејќи ги соодветните односи кај триаголниците, добиваме:

од $\Delta BPM$: $x = m\cos\alpha$;

од $\Delta MQA$: $y = n\sin\alpha$;

од $\Delta BMC$: $m = \overline{BC}\cos\alpha$;

од $\Delta CMA$: $n = \overline{AC}\sin\alpha$;

од $\Delta BAC$: $\overline{BC} = a\cos\alpha$, $\overline{AC} = a\sin\alpha$.

Понатаму следува:

$$m = \overline{BC}\cos\alpha = a\cos\alpha \cdot \cos\alpha = a\cos^2\alpha,$$

$$x = m\cos\alpha = a\cos^2\alpha \cdot \cos\alpha = a\cos^3\alpha$$

и аналогно на тоа се добива: $y = a\sin^3\alpha$ .

Според тоа, параметарските равенки на бараното геометриско место се:

$$x = a\,cos^3\,\alpha,$$

$$y = a\,sin^3\,\alpha\,.$$

## 8. ПОЛАРЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ

Во досегашните излагања за определување положбата на точка во рамнина и за прикажување на функциите се користевме со Декартовиот координатен систем. Постојат и други координатни системи со иста намена, но најчесто покрај Декартовиот координатен систем се користи, во нешто помал обем, ***поларниот координатен систем***.

Ќе избереме една хоризонтална права и точка на неа. *Правата се вика* ***поларна оска****, а точката* ***пол*** или ***координатен почеток***. Положбата на една точка во рамнина и во однос на поларниот координатен систем се определува со два броја, како и во однос на Декартовиот координатен систем, но секако со друго значење. За да ги дефинираме двата броја, ќе избереме една точка M во рамнината. Од полот до точката M ќе повлечеме една отсечка $\overline{OM}$ (се обележува со $\rho$). *Отсечката* $\overline{OM}$ *се вика* ***радиус вектор на точката*** M. Овој вектор со поларната оска образува агол $\varphi$. *Аголот* $\varphi$ *се вика* ***поларен агол***. Поларниот агол се мери во позитивна насока (насока обратна од насоката на движење на стрелките на часовникот) од поларната оска. Очигледно е дека броевите $\rho$ и $\varphi$ еднозначно ја определуваат положбата на точката M во однос на поларниот координатен систем. Затоа, се земаат за координати на точката M и се означува $M(\rho,\varphi)$, аналогно на означувањето на координати на точка определена во однос на Декартовиот координатен систем (црт.3.67).

Ако се ограничиме само на позитивни вредности на координатите $\rho$ и $\varphi$ (што при дефинирањето на поларниот координатен систем не е секогаш така), интервалот на менувањето на аголот $\varphi$ за да се опфати која било точка од рамнината во однос на поларниот систем ќе биде $[0,2\pi]$, а интервалот за $\rho$ ќе биде $[0,+\infty)$.

Врската помеѓу променливите $\rho$ и $\varphi$, изразена текстуално, табеларно или во аналитички вид $\rho=\rho(\varphi)$ претставува функција во поларни координати.

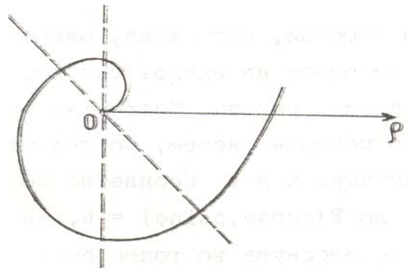
Графикот на функцијата ќе се нацрта, ако претходно (кога кривата е изразена аналитички) се формира табела за произволно избрани вредности на $\varphi$ и соодветните вредности на $\rho$ пресметани по формулата $\rho=\rho(\varphi)$, соодветните парови се претставaт во поларниот координатен систем и се поврзат.

Ќе споменеме дека врска од ист облик помеѓу две променливи во однос на Декартовиот или поларниот координатен систем претставува битно различна крива.

Врската $\rho = r$ во однос на поларниот координатен систем претставува кружница со радиус $r$ и центар во полот.

Аналогна врска, $y=b$, во однос на Декартовиот координатен систем претставува права паралелна со $x$- оската.

Врската $\rho = \varphi$ во однос на поларниот координатен систем ја претставува кривата (црт.3.67) позната под името ***Архимедова спирала***. Аналогната врска $y = x$ во однос на Декартовиот координатен систем претставува симетрала на првиот и третиот квадрант. Графикот на функцијата $\rho=cos\varphi$ во однос на поларниот координатен систем претставува кружница со центар во точката $(\frac{1}{2},0)$ и радиус $r = \frac{1}{2}$.



Црт. 3. 67.

Функцијата $y=cosx$, што фактички претставува иста функционална врска, во Декартовиот координатен систем ја претставува тригонометриската функција - косинусоида.

Во кој систем ќе се интерпретира една функционална врска, зависи од проблемот што се проучува. Често пати се наложува потреба, во решавањето на една задача, поставена во однос на Декартов координатен систем, да се пренесе во поларен координатен систем.

На пример, за една точка дадена со координати во Декартов координатен систем да се определат нејзините координати во поларен координатен систем, равенката на една крива зададена во Декартов координатен систем да се изрази во поларен координатен систем итн.

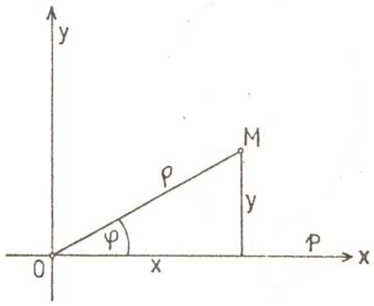
За да може да го направиме тоа, ќе укажеме на врските што постојат помеѓу поларниот и Декартовиот координатен систем. Возможни се различни соодноси во изборот на положбата на едниот систем во однос на другиот, но ние ќе се задржиме на соодносот што често се користи, полот да се совпаѓа со координатниот почеток, а поларната оска со позитивниот дел на $x$-оската.

Во оваа заемна положба на системите (црт.3.68) постојат врските:

$$x = \rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

од кои можеме лесно да ги определиме Декартовите координати на една точка, ако се познати поларните координати, а обратните врски



Црт. 3. 68.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,$$

$$\varphi = arc\ tg\ \frac{y}{x},$$

овозможуваат да се определат поларните координати, ако се познати Декартовите координати.

Со овие врски е можно, исто така, равенката на некоја крива, зададена во однос на едниот систем, да се трансформира во однос на другиот систем. Често таа трансформација се врши од Декартов во поларен координатен систем, со тоа што во функцијата $F(x,y)=0$ се заменува $x=\rho \cos\varphi$ и $y=\rho \sin\varphi$, што доведува до $F(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$, односно $f(\rho,\varphi)$. Со оваа трансформација од еден систем во друг во голем број случаи се олеснува цртањето на некои криви, што во однос на Декартовиот систем имаат комплицирана равенка.

**Пример 1.** *Да се скицира графикот на функциите*:

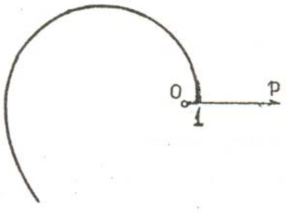
$$1)\ \rho = e^{\varphi}, \qquad 2)\ \rho = a(1-cos\varphi).$$

Давајќи произволни вредности за φ и пресметувајќи ги соодветните вредности за ρ, ги добиваме следниве табели:

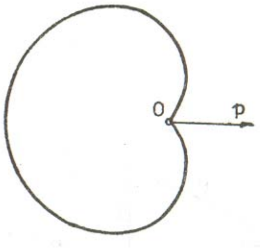
**1)** За $\rho = e^{\varphi}$ ја составуваме табелата:

| $\varphi$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | 0,3 | 1 | 2,7 | 19,7 |

Графикот на функцијата е прикажан на црт.3.69 и се вика ***логаритамска спирала***.



Црт. 3. 69.



Црт. 3. 70.

2) За $\rho = a\ (1-cos\varphi)$ ја составуваме табелата

| $\varphi$ | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | $0$ | $\frac{a}{2}$ | $a$ | $\frac{3a}{2}$ | $2a$ | $\frac{3a}{2}$ | $a$ | $\frac{a}{2}$ | $0$ |

Графикот на функцијата е прикажан на црт. 3.70 и се вика ***кардиоида***.

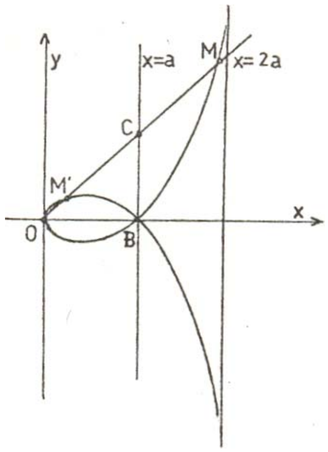
**Пример 2.** *Низ координатниот почеток* O *е повлечена полуправа. Од двете страни на пресечната точка* C, *што се добива како пресек на полуправата и правата* $x=a$, *се нанесува должината* $\overline{CB}$, *каде што,* $B(a,0)$ *и се добиваат точките* M *и* M'.

*Кога полуправата се врти околу координатниот почеток O, тие точки опишуваат една крива која се вика* ***строфоида*** (црт.3.71). *Да се напише нејзината равенка во поларни координати.*

За поларните координати на точките M и M', имаме:

$$\rho = \overline{OC} \pm \overline{BC}\,.$$

Но



Црт. 3.71.

$$\overline{OC} = \frac{a}{cos\,\varphi}, \quad \overline{BC} = a\,tg\,\varphi,$$

според тоа равенката на кривата во поларни координати е

$$\rho = \frac{a(1 \pm sin\,\varphi)}{cos\,\varphi}.$$

## Задачи за вежбање

**1.** Да се скицираат графиците на следниве функции:

**1)** $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$;

**2)** $\rho = a$;

**3)** $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$;

**4)** $\rho = a\,sin\,3\varphi$;

**5)** $\rho = a\,sin\,2\varphi$;

**6)** $\rho = a\,cos\,3\varphi$;

**7)** $\rho^2 = a^2\,cos\,2\varphi$.

**2.** Да се трансформираат во поларни координати равенките:

| | |
|---|---|
| **1)** $(x^2+y^2)^2 = a^2\,(x^2-y^2)$; | Одг.: **1)** $\rho^2 = a^2\,cos\,2\varphi$; |
| **2)** $x^2 - y^2 = a^2$; | **2)** $\rho^2\,cos\,2\varphi = a^2$; |
| **3)** $x^2 + y^2 = ax$; | **3)** $\rho = a\,cos\varphi$ |
| **4)** $y = x$; | **4)** $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ и $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$; |
| **5)** $(x^2+y^2-ax)^2 = a^2\,(x^2+y^2)$; | **5)** $\rho = a\,(1+cos\varphi)$. |

# ГЛАВА IV

# ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА ФУНКЦИЈА НЕПРЕКИНАТОСТ НА ФУНКЦИЈА

## 1. ДЕФИНИЦИЈА ЗА ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЈА

Нека функцијата $y = f(x)$ е дефинирана во околината на дадена точка $x_0$ (во таа точка функцијата може, а и не мора да биде дефинирана).

***Бројот** $A$ **е гранична вредност на функцијата** $y = f(x)$, **кога независно променливата** $x$ **тежи кон** $x_0$, **ако за секој произволен реален број** $\varepsilon > 0$ **постои реален број** $\delta > 0$ (кој зависи од $\varepsilon$) **таков што***

$$| f(x) - A| < \varepsilon$$

***за секој** $x \neq x_0$, **кога** $|x - x_0| < \delta$. Тоа симболично се запишува*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

или

$$f(x) \to A \quad \text{кога } x \to x_0.$$

Бројот $\delta$ зависи од $\varepsilon$, така што тој се намалува кога $\varepsilon$ се намалува, т.е. $\delta \to 0$ кога $\varepsilon \to 0$. Можеме да кажеме дека $f(x)$ произволно малку ќе се разликува од $A$ кога $x$ доволно малку ќе се разликува од $x_0$.

Неравенствата

$$| f(x) - A| < \varepsilon, \qquad |x - x_0| < \delta \quad (x \neq x_0)$$

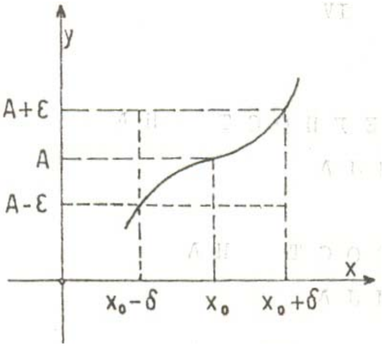
можат да се напишат во вид :

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \qquad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta.$$

Геометриската интерпретација се гледа од цртежот 4.1, т.е. дел од кривата чии точки ги задоволуваат неравенствата се наоѓа во правоаголникот ограничен со правите

$$x = x_0 - \delta, \quad x = x_0 + \delta$$

$$y = A - \varepsilon, \quad y = A + \varepsilon.$$



Црт. 4. 1.

Потребно е да се подвлече дека променливата $x$ конвергира кон бројот $x_0$ на произволен начин. За која и да било низа $(x_n)$ која конвергира кон $x_0$, секоја соодветна низа $(f(x_n))$ конвергира кон истиот број $A$, тогаш велиме функцијата $y = f(x)$ има граница $A$ во точката $x_0$. Во спротивно, ако секоја од соодветните низи $(f(x_n))$ не конвергира кон истиот број $A$, кога $x$ на произвилен начин клони кон $x_0$, за функцијата велиме дека нема гранична вредност во точката $x_0$.

**Пример 1.** *Да се покаже дека функцијата* $y=2x+1$ *има граница* $A=3$, *кога* $x\to 1$.

Од претпоставката дека функцијата има граница 3, по изборот на $\varepsilon > 0$, следува:

$$|(2x+1) - 3| < \varepsilon,$$

$$2|x-1| < \varepsilon,$$

$$|x-1| < \frac{\varepsilon}{2},$$

па значи: $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Во овој случај граничната вредност на функцијата се совпаѓа со вредноста на функцијата во таа точка $f(1) = 3$.

**Пример 2.** *Функцијата*

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

*кога* $x\to 1$ *има граница* 5, *а вредноста на функцијата за* $x=1$ *е* $f(1)=1$, *т.е. вредноста на функцијата во точката* $x=1$ *не се совпаѓа со граничната вредност на функцијата во таа точка.*

Нека функцијата $f(x)$ е дефинирана во интервалот $(a,x_0)$. *За бројот A велиме дека е* ***гранична вредност на функцијата*** $f(x)$ ***од лево во точката*** $x_0$, *ако за секој реален позитивен број* $\varepsilon$ *може да се најде реален позитивен број* $\delta$ *таков што*

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad \text{кога} \quad x\in(x_0-\delta,\, x_0).$$

Симболично тогаш пишуваме:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A \qquad \text{или} \qquad f(x_0-0)=A.$$

Нека функцијата $f(x)$ е дефинирана во интервалот $(x_0,b)$. *За бројот A велиме дека е* ***граница на функцијата*** $f(x)$ ***во точката*** $x_0$ ***оддесно***, *ако за секој реален позитивен број* $\varepsilon$, *може да се најде позитивен реален број* $\delta$, *таков што*

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad \text{кога} \quad x\in(x_0,\, x_0-\delta).$$

Тогаш симболично пишуваме:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A \qquad \text{или} \qquad f(x_0+0)=A.$$

Ако е

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A,$$

тогаш пишуваме

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

## 2. ВИДОВИ ГРАНИЦИ НА ФУНКЦИИ

Дефинираме граница на функција кога $A$ и $x_0$ се конечни броеви.

Ќе разгледаме неколку посебни случаи на гранична вредност на функцијата $f(x)$.

## 2. 1. Граница на функцијата е $A$ кога аргументот се стреми кон бескрајност

*За* ***функцијата*** *$y=f(x)$ велиме дека има* ***гранична вредност*** *$A$ кога $x\to\infty$, ако за секој произволен реален позитивен број $\varepsilon>0$, постои позитивен број $K$ таков што*

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad \text{за} \quad |x|>K,$$

*тогаш пишуваме:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

*или*

$$f(x)\to A \qquad \text{кога} \quad x\to\infty.$$

***Функцијата*** *$y=f(x)$ има* ***гранична вредност*** *$A$, кога $x\to+\infty$, ако за секој реален позитивен број $\varepsilon$ постои позитивен број $K$ таков што*

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad \text{за} \quad x>K,$$

*т.е.*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

Аналогно, ***функцијата*** *$y=f(x)$ има* ***гранична вредност*** *$A$, кога $x\to-\infty$, ако за секој позитивен реален број $\varepsilon$ постои позитивен број $K$ таков што*

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad \text{за} \quad x<-K,$$

*т.е.*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

Правата $y=A$ е хоризонтална асимптота на кривата $y=f(x)$.

**Пример 3.** *Функцијата*

$$y=\frac{2x}{x-1}$$

*има граница* 2 *кога* $x\to+\infty$ *и* $x\to-\infty$.

Од претпоставката дека функцијата има граница 2, по изборот на ε>0 следува :

$$\left| \frac{2x}{x-1} - 2 \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{2}{x-1} \right| < \varepsilon \quad \text{т.е.} \quad \frac{|x-1|}{2} > \frac{1}{\varepsilon},$$

$$|x-1| > \frac{2}{\varepsilon},$$

од каде што се добива:

$$x > 1+\frac{2}{\varepsilon}, \quad x < -\frac{2}{\varepsilon}+1.$$

На пример, ако $\varepsilon = 10^{-4}$ тогаш

$$x > 1+ 2 \cdot 10^{4} = 1+20000 = 20001, \quad (K = 20001)$$

$$x < 1- 2 \cdot 10^{4} = 1–20000 = -19999. \quad (K = -19\,999)$$

Значи

$$\left| \frac{2x}{x-1} - 2 \right| < 10^{-4} \text{ ако } \quad x > 20001 \quad \text{и} \quad x < -19999.$$

## 2. 2. Границата на функцијата е бескрајност

## кога $x \to x_0$

*Функцијата $y=f(x)$ има граница бескрајност кога $x \to x_0$ ако за секој позитивен број M,* постои *позитивен број δ, таков што*

$$|f(x)| > M, \quad \textit{кога} \quad |x-x_0| < \delta.$$

Тогаш тоа го запишуваме со

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

*Ако за секој позитивен број M (колку и да биде голем) постои позитивен број δ таков што*

$$f(x) > M, \quad \textit{кога} \quad |x-x_0| < \delta,$$

*тогаш велиме функцијата* $y=f\ (x)$ *има граница* $+\infty$, *кога* $x\to x_0$ (црт.4.2), *и тоа го запишуваме со*

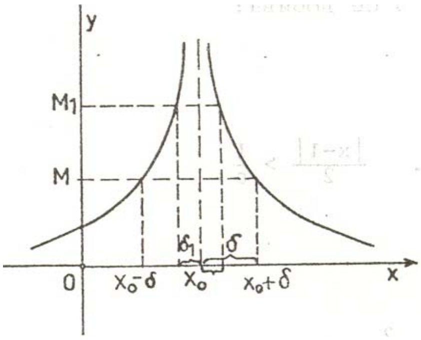
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty .$$

*Ако за секој позитивен број M постои позитивен број* $\delta$ *таков што*

$$f(x) < -M \quad \textit{кога} \quad |x-x_0| < \delta.$$

*тогаш велиме функцијата* $y=f(x$ *има граница* $-\infty$ *кога* $x\to x_0$ *и тоа го запишуваме со*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty .$$



Црт. 4. 2.

*За функцијата што се менува на ваков начин велиме дека е* ***бескрајно голема големина*** *кога* $x\to x_0$. *Правата* $x=x_0$ *е вертикална асимптота на кривата* $y=f(x)$.

**Пример 4.** *Да се покаже дека функцијата*

$$y = \frac{1}{(x-2)^2}$$

*има граница бескрајност, кога* $x\to 2$ .

Нека $M = 10000$, тогаш

$$\left|\frac{1}{(x-2)^2}\right| > 10000,$$

$$\left|\,(x-2)^2\,\right| < 0{,}0001,$$

$$|x-2| < 0{,}01,$$

од каде што следува $\delta = 0{,}01$.

За правата $x=2$ велиме дека е асимптота за функцијата

$$y = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

## 2. 3. Границата на функцијата е нула кога $x \to x_0$ или $x \to \pm\infty$

*Функцијата* $y = f(x)$ *има граница нула кога независно променливата* $x \to x_0$, *ако за произволен реален број* $\varepsilon>0$ *постои реален позитивен број* $\delta$ (*кој зависи од* $\varepsilon$) *таков што*

$$| f(x)| < \varepsilon \quad \text{за} \quad \forall\, x \neq x_0 \quad \text{кога} \quad |x-x_0| < \delta,$$

*а тоа се означува со*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

Соодветно се дефинира границата на функцијата да е нула кога $x \to +\infty$, имено:

*Функцијата* $y = f(x)$ *има граница нула кога* $x \to +\infty$, *ако за произволен реален број* $\varepsilon>0$ *постои позитивен реален број* $K$ *таков што*

$$| f(x)| < \varepsilon \quad \text{за} \quad x > K,$$

а тоа се означува со

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

На ист начин се искажува и дефиницијата за границата на функцијата да е нула кога $x \to \infty$ или $x \to -\infty$.

За кривата $y = f(x)$ $x$-оската е асимптота.

**Пример 5.** *Функцијата* $y = \dfrac{1}{x}$ *има граница нула кога* $x \to \infty$. *Да се докаже.*

Од тоа што функцијата $y = \dfrac{1}{x}$ има граница нула при произволен избор на $\varepsilon$ следува: $\left|\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon$ т.е. $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon} = K.$

За секој $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ е исполнето неравенството $\left|\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon.$

Затоа следува: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ и $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

Правата $y = 0$ е асимптота на кривата.

## 2. 4. Границата на функцијата е бескрајност кога аргументот се стреми кон бескрајност

*Функцијата* $y=f(x)$ *има граница бескрајност кога* $x\to+\infty$ *ако за секој произволен број* $M>0$ *може да се најде произволен број* $K$ *таков што*

$$|f(x)|>M \quad \text{за} \quad x>K,$$

и тогаш пишуваме

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty .$$

Аналогно се дефинираат и другите гранични вредности во бескрајност:

$$f(x)\to\ \infty \qquad \text{кога} \qquad x\to-\infty \quad (x\to\infty),$$

$$f(x)\to-\infty \qquad \text{кога} \qquad x\to+\infty,$$

$$f(x)\to-\infty \qquad \text{кога} \qquad x\to-\infty,$$

$$f(x)\to+\infty \qquad \text{кога} \qquad x\to\pm\infty .$$

Кога функцијата се менува на ваков начин велиме дека е бескрајно голема големина кога $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$ или $x\to\ \infty$.

## 3. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА ГРАНИЦИ НА ФУНКЦИИ

***3.1.*** *Ако функциите* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имаат граници соодветно*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=B,$$

*тогаш*

$$\mathbf{1^0} \quad \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=A\pm B=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x);$$

$$\mathbf{2^0} \quad \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=A\cdot B=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x);$$

$$3^0 \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \qquad (B \neq 0).$$

**Доказ:** Ќе го докажеме само тврдењето под $\mathbf{1^0}$.

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ имаат соодветно граници $A$ и $B$ кога $x \to x_0$ и нека $\varepsilon$ е кој и да било позитивен број, тогаш постојат броевите $\delta_1$ и $\delta_2$ такви што

$$|f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{кога} \qquad |x-x_0| < \delta_1,$$

$$|g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{кога} \qquad |x-x_0| < \delta_2.$$

Ако земеме $\delta = min(\delta_1,\delta_2)$ очигледно е дека

$$|f(x)\pm g(x)-(A\pm B)| < |f(x)-A| + |g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

кога $|x-x_0| < \delta$. *Со тоа докажавме дека гранична вредност од алгебарски збир е алгебарски збир од гранични вредности.*

Ќе докажеме уште едно својство од граници на функции.

**3. 2.** Ако во околината на точката $x_0$ се исполнети неравенствата

$$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x) \tag{1}$$

и

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = \lim_{x\to x_0}\psi(x) = A$$

тогаш

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Навистина, од неравенствата (1) следуваат неравенствата

$$\varphi(x) - A \le f(x) - A \le \psi(x) - A. \tag{2}$$

Од претпоставката

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0}\psi(x) = A$$

за секој $\varepsilon>0$, може да се најде некоја околина на точката $x_0$ во која ќе биде исполнето неравенството

$$|\varphi(x)-A| < \varepsilon.$$

и исто така може да се најде некоја околина на точката $x_0$ во која ќе важи неравенството:

$$|\psi(x)-A| < \varepsilon.$$

Во помалата од најдените околини ќе важи:

$$-\varepsilon < \varphi(x) - A < \varepsilon \quad \text{и} \quad -\varepsilon < \psi(x) - A < \varepsilon,$$

а според тоа и од неравенствата (2) ќе важи:

$$|f(x)-A| < \varepsilon$$

за некоја околина на точката $x_0$ т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

## 4. НЕКОИ ПОВАЖНИ ГРАНИЦИ НА ФУНКЦИИ

Определувањето на границите на функциите за определен вид изменување на аргументот се постигнува со познавање на границите на некои посебни функции, со извршување на некои трансформации, а, главно, врз основа на основните својства на границите, наведени во точка **3.**

Но, веднаш да споменеме дека не постои една универзална постапка по која ќе постапуваме кога е потребно да се определи границата на една функција. Речиси, секој пример претставува проблем сам за себе. Освен тоа, ќе нагласиме дека во определувањето на границите ќе бидат чести случаите кога и основните својства на границите не ќе можат да се користат.

Тоа се сретнува во следниве случаи:

**1)** ако $\lim f(x)=\infty$ и $\lim \varphi(x)=\infty$, тогаш формулата за граница на разлика од две функции не ќе може да се примени, поради тоа што разликата $f(x) - \varphi(x)$ е од неопределен вид $(\infty-\infty)$;

**2)** ако $\lim f(x)=0$ и $\lim\varphi(x)=0$, односно $\lim f(x)=\infty$ и $\lim\varphi(x)=\infty$, формулата за граница на количник од две функции не ќе може да се користи, бидејќи количникот $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ е од неопределен вид $\dfrac{0}{0}$ односно $\dfrac{\infty}{\infty}$;

**3)** формулата за граница на производ од две функции, исто така, не може да се користи ако $\lim f(x)=0$ и $\lim \varphi(x)=\infty$, бидејќи производот $f(x)\cdot\varphi(x)$ е од неопределен вид $0\cdot\infty$. Границите на ваквите функции ќе ги проучиме посебно во глава VI.**т.4**.

Да ги определиме границите на некои функции.

### **4. 1.** *За полиномната функција*

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ \dots\ + a_nx^n\ .$$

според особините во **т.3.** веднаш се добива дека

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ \dots\ + a_nx_0^n = P(x_0).$$

### **4. 2.** *Дробно-рационалната функција*

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

каде што $P(x)$ и $Q(x)$ се полиномни функции, а $Q(x)\neq 0$. Според својството за граница на количник и претходното, се добива дека:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

Ако $x_0$ е $\infty$, тогаш треба да се преуреди изразот

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \ \dots\ + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ \dots\ + b_mx^m}$$

така што, пред заграда во броителот ќе извлечеме $x^n$, а во именителот $x^m$, по што се добива:

$$\lim_{x\to\infty} x^{n-m}\,\frac{\dfrac{a_0}{x^n} + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + \dfrac{a_{n-1}}{x} + a_n}{\dfrac{b_0}{x^m} + \dfrac{b_1}{x^{m-1}} + \dots + \dfrac{b_{m-1}}{x} + b_m}\ .$$

Бидејќи

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{a_0}{x^n} + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{x} + a_n}{\dfrac{b_0}{x^m} + \dfrac{b_1}{x^{m-1}} + \ldots + \dfrac{b_{m-1}}{x} + b_m} = \frac{a_n}{b_m}$$

се добива:

$$\lim_{x\to\infty} x^{n-m} \cdot \frac{a_n}{b_m}.$$

Ќе разгледаме три случаи:

**1)** Ако $n > m$, $\lim_{x\to\infty} x^{n-m} \cdot \frac{a_n}{b_m} = \infty.$ $(n-m) > 0.$

**2)** Ако $n = m$, $\lim_{x\to\infty} x^{n-m} \cdot \frac{a_n}{b_m} = \frac{a_n}{b_m}.$

**3)** Ако $n < m$, $\lim_{x\to\infty} x^{n-m} \cdot \frac{a_n}{b_m} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{n-m}} = 0.$

Во врска со оваа граница ќе дадеме неколку примери.

**Пример 1.** *Да се најде границата на функцијата*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 4x + 5}{3x^2 - 3x + 10}.$$

Ќе го поделиме и броителот и именителот со $x^2$, т.е. со $x$ на највисоката степен што се јавува во функцијата, по што се добива:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{x^2}}{3 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{10}{x^2}} = \frac{1}{3}$$

бидејќи членовите $\frac{4}{x}$, $\frac{5}{x^2}$, $\frac{3}{x}$ и $\frac{10}{x^2}$ кога $x \to \infty$ клонат кон нула.

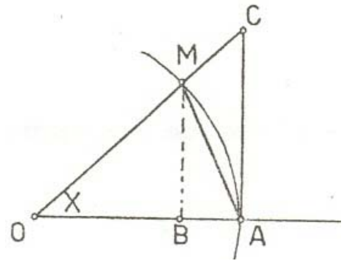
**Пример 2.** *Да се најде границата на функцијата*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

**Пример 3.** *Да се најде границата на функцијата*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{0}=\infty.$$

**4. 3.** ***Функцијата*** $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ не е дефинирана за $x$=0. Ќе покажеме дека таа има гранична вредност во точката $x$=0.



Црт. 4. 3.

Во круг со радиус $R$=1, централниот агол AOM ќе го означиме со $x$, под услов $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Од цртежот 4.3 очигледно е дека плоштината на триаголникот OAM е помала од плоштината на исечокот OAM, а таа е помала од плоштината на триаголникот OAC.

Бидејќи

$$P_{\Delta\mathrm{OAM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{MB}}=\frac{1}{2}\sin x,$$

$$P_{\text{ис.}\mathrm{OAM}}=\frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{OA}}^2\cdot\mathrm{AM}=\frac{1}{2}x,$$

$$P_{\Delta\mathrm{COA}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\,tg\,x,$$

тогаш

$$\sin x<x<tg\,x$$

или

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{1}$$

Неравенството (1) е точно и кога $x < 0$, бидејќи

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x} \quad \text{и} \quad \cos(-x) = \cos x,$$

па заклучуваме дека за $|x| < \frac{\pi}{2}$ точно е неравенството (1).

Од

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

следува (според особината **3.2**):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Во врска со оваа граница, многу лесно се определува границата на следниве функции:

**Пример 1.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

**Пример 2.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \to 0} k \cdot \frac{\sin kx}{kx} =$$

$$= \lim_{x \to 0} k \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{kx} = k \cdot 1 = k.$$

**Пример 3.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot \lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2} = 1\cdot 0 = 0.$$

### 4. 4. Функцијата

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

**има граница** $e$ **кога** $x \to \pm\infty$.

Во **т.5**, гл.II покажавме

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad n \in N.$$

Сега ќе докажеме дека:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad x \in R.$$

Нека низата $(x_k)$ од реални броеви на произволен начин тежи кон $+\infty$ и нека $x$>1, тогаш $x_k$ мора да се наоѓа меѓу два последователни природни броја $n$ и $n$+1, т.е.

$$n < x_k < n+1.$$

Кога $n \to \infty$ и $x_k \to \infty$ . Понатаму

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x_k} < \frac{1}{n},$$

односно

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Од

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

и **теоремата 4** од низи, следува:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad (2)$$

Нека сега $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$ и $x_k < -1$. Ако ставиме $x_k = -y_k$, тогаш

$$\lim_{k\to\infty} y_k = +\infty \qquad y_k > 1.$$

Низата

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = \left(1-\frac{1}{y_k}\right)^{-y_k} = \left(\frac{y_k-1}{y_k}\right)^{-y_k} = \left(\frac{y_k}{y_k-1}\right)^{y_k} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1} \cdot \left(1+\frac{1}{y_k-1}\right) \to e,$$

кога $y_k \to \infty$ . Според тоа,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad (3)$$

**Пример 1.** *Да се определи границата*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Земајќи смена $\dfrac{1}{y} = x$, кога $x \to 0,\ y \to \infty$, се добива:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e.$$

**Пример 2.** *Да се определи границата*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} \qquad (k \in R)$$

Заменувајќи $\frac{x}{k} = y$, кога $x \to \infty$ и $y \to \infty$, па се добива:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = \left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{k} = e^{k}.$$

## 5. ГРАНИЦА НА СЛОЖЕНА ФУНКЦИЈА

Со односите $y=f\,(u)$ и $u=\varphi(x)$ нека е определена во некоја област $D$ сложена функција

$$y = F(x) = f\,(\varphi(x)). \tag{1}$$

**Теорема.** *Ако функцијата* $u=\varphi(x)$ *има гранична вредност во точката* $x_0$

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = u_0\,, \tag{2}$$

*а функцијата* $f(u)$ *во точката* $u_0$ *има граница*

$$A = \lim_{u\to u_0} f(u), \tag{3}$$

*тогаш сложената функција* $f\,(\varphi(x))$ *во точката* $x_0$ *има гранична вредност* $A$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} f\,(\varphi(x)) = A.$$

(Овде $x_0$ е број или еден од симболите $\infty$, $+\infty$, $-\infty$; $A$ и $u_0$ се броеви.)

**Доказ:** Од (3) следува дека за секој $\varepsilon > 0$ може да се најде $\delta' > 0$, таков што за секој $u$ кој го задоволува неравенството

$$\left| u-u_0 \right| < \delta' \qquad (4)$$

е задоволено и неравенството

$$\left|\ f(u)-A\ \right| < \varepsilon. \qquad (5)$$

Од (2) следува дека за укажаното $\delta' > 0$, може да се најде таков број $\delta > 0$, што за секоја вредност на $x \in D$ (со исклучок на $x_0$, бидејќи во таа точка функцијата може да не е дефинирана), која го задоволува условот

$$\left| x-x_0 \right| < \delta$$

да биде задоволено и неравенството

$$\left|\ \varphi(x)-u_0\ \right| < \delta'$$

т.е. неравенството (4), од кое следува неравенството (5), односно:

$$\left|\ f(\varphi(x))-A\ \right| < \varepsilon,$$

а тоа значи дека

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = A = \lim_{u\to u_0} f(u).$$

Теоремата за граница на сложена функција лежи во основата за пресметување на граници со помош на методот на замена (замена на променливата).

**Пример 1.** *Да се најде границата*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}.$$

Нека е

$$F(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}.$$

Да земеме

$$x = \varphi\,(u) = u^{12} \qquad (u \neq 1,\ u > 0),$$

тогаш може да се состави сложената функција

$$f(u) = \mathrm{F}(\varphi\,(u)) = \frac{u^4-1}{u^3-1}\ ,$$

при што за $x = \varphi\,(u)$, постои инверзната функција $u = \psi(x) = \sqrt[12]{x}$ .

Бидејќи постои

$$u_0 = \lim_{x\to 1} \psi(x) = \lim_{x\to 1} \sqrt[12]{x} = 1$$

и

$$A = \lim_{u\to 1} f(u) = \lim_{u\to 1} \frac{u^4-1}{u^3-1} =$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{(u-1)(u^3+u^2+u+1)}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{4}{3},$$

имаме

$$\lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \frac{4}{3}.$$

## 6. СПОРЕДУВАЊЕ НА БЕСКРАЈНО МАЛИТЕ ГОЛЕМИНИ

*Функцијата* $\alpha(x)$ *се вика* ***бескрајно мала големина*** *кога* $x\to x_0$ ($x_0$ е број или еден од симболите $\infty, +\infty, -\infty$), *ако* $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Примери за бескрајно мали големини се функциите:

$y = x^2$, кога $x \to 0$;

$y = \sin x$, кога $x \to 0$;

$y = \frac{1}{x}$, кога $x \to \infty$;

$y = (1-x)^3$, кога $x \to 1$.

Често се јавува потреба да се споредат бескрајно малите големини во однос на брзината на нивното тежење кон нула во околината на дадена точка.

Нека

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} \beta(x) = 0,$$

т.е. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ се бескрајно мали големини кога $x\to x_0$.

*Ако*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k\neq 0 \qquad (k=\text{конст.})$$

*велиме дека* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *кога* $x\to x_0$ (во точката $x_0$) *се* ***бескрајно мали големини од ист ред*** *и пишуваме*:

$$\alpha(x)\approx k\,\beta(x) \qquad \text{кога} \quad x\to x_0.$$

*Ако* $k=1$, *тогаш за* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *велиме дека се* ***еквивалентни бескрајно мали големини*** *кога* $x\to x_0$ *и пишуваме*:

$$\alpha(x)\approx \beta(x) \qquad \text{кога} \quad x\to x_0.$$

**Пример 1:**

**1⁰** $\sin x\approx x$, кога $x\to 0$;

**2⁰** ако $\alpha(x)=\sqrt{1+x}-1,\quad \beta(x)=x,$

тогаш кога $x\to 0$

$$\sqrt{1+x}-1\approx\frac{1}{2}x.$$

*Ако*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$$

*велиме дека* $\alpha(x)$ *е* ***бескрајно мала големина од повисок ред во однос на*** $\beta(x)$ *кога* $x\to x_0$ *или* $\beta(x)$ *е* ***бескрајно мала големина од понизок ред во однос на*** $\alpha(x)$ ***кога*** $x\to x_0$.

*Ако*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty,$$

*велиме дека* $\beta(x)$ *е* ***бескрајно мала големина од повисок ред*** *во однос на* $\alpha(x)$ *кога* $x\to x_0$ *или* $\alpha(x)$ *е* ***бескрајно мала големина од понизок ред*** *во однос на* $\beta(x)$ *кога* $x\to x_0$.

**Пример 2.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{0}{1}=0.$$

Функцијата $\alpha(x) = x^2$ е бескрајно мала од повисок ред во однос на функцијата $\beta(x) = \sin x$.

*Ако односот* $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ *кога* $x \to x_0$ *нема граница, ниту конечна ниту бесконечност, тогаш велиме дека* ***бесконечно малите големини*** $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *се* ***неспоредливи меѓу себе***.

**Теорема 1.** *Збир од две бескрајно мали големини е бескрајно мала големина.*

**Доказ:** Нека $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ се бескрајно мали големини, т.е. за секој реален позитивен број $\varepsilon$ постои реален број $\delta>0$ така што

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{кога } |x - x_0| < \delta.$$

Тогаш

$$|\alpha(x) + \beta(x)| < |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{кога } |x - x_0| < \delta.$$

Со тоа теоремата е докажана.

Истата теорема важи и за конечен број собирци.

**Теорема 2.** *Производ од ограничена функција и бескрајно мала големина е бескрајно мала големина.*

**Доказ:** Нека $\alpha(x)$ е бескрајно мала големина, а $f(x)$ е ограничена функција во интервалот $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$. Од тоа што $\alpha(x)$ е бескрајно мала големина, следува дека

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \qquad \text{за } |x - x_0| < \delta,$$

тогаш

$$|f(x) \cdot \alpha(x)| < |f(x)| \cdot |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M < \varepsilon \quad \text{за } |x - x_0| < \delta.$$

Со тоа теоремата е докажана.

Посебно, ако $f(x) = const = c$,

$$\lim_{x \to x_0} c \cdot \alpha(x) = 0.$$

Од **теоремата 2** следува дека производ од конечен број бескрајно мали големини е бескрајно мала големина.

**Теорема 3.** *Бескрајно малите големини*

$$\alpha(x) \to 0, \qquad \beta(x) \to 0$$

*за да бидат еквивалентни потребно и доволно е нивната разлика*

$$\Delta(x) = \alpha(x) - \beta(x)$$

*да е бескрајно мала големина од повисок ред во однос на* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$.

**Доказ:** Од тоа што $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ се еквивалентни бескрајно мали големини, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

следува:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\Delta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right) = 0,$$

што значи дека $\Delta(x)$ е бескрајно мала големина од повисок ред во споредба со $\beta(x)$ кога $x \to x_0$. Аналогно се докажува дека $\Delta(x)$ е бескрајно мала големина од повисок ред во однос на $\alpha(x)$.

Од условот дека разликата $\Delta(x)$ е бескрајно мала големина од повисок ред во однос на $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\Delta(x)}{\alpha(x)} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\Delta(x)}{\beta(x)} = 0,$$

следува:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\Delta(x)+\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\Delta(x)}{\beta(x)} + 1\right) = 0 + 1 = 1,$$

а тоа значи дека $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ се еквивалентни бескрајно мали големини.

Важна за понатаму е и следнава теорема.

**Теорема 4.** *Ако функцијата* $f(x)$ *има граница* $A$ *кога* $x \to x_0$*, тогаш таа може да се претстави во вид*

$$f(x) = A + \alpha(x), \qquad (1)$$

*каде што* $\alpha(x)$ *е бескрајно мала кога* $x \to x_0$*.*

*Обратно, ако функцијата* $f(x)$ *може да се претстави во вид*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

*каде што* $\alpha(x)$ *е бескрајно мала кога* $x \to x_0$*, тогаш функцијата има граница* $A$ *кога* $x \to x_0$*, т.е.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \qquad (2)$$

Со други зборови односите (1) и (2) се еквивалентни.

**Доказ:** Нека $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, тогаш од дефиницијата за граница на функцијата, ако ε е произволно мал позитивен број, за сите $x$ доволно блиски на $x_0$, што значи дека разликата $f(x) - A$ е бескрајно мала големина која ќе ја означиме со $\alpha(x)$. Според тоа,

$$f(x) - A = \alpha(x) \ , \quad \text{т.е.} \quad f(x) = A + \alpha(x),$$

што требаше да се докаже, а имено *функцијата може да се запише како збир од нејзината граница и една бескрајно мала големина.*

Да го докажме обратното тврдење. Нека $f(x) = A + \alpha(x)$, каде што $\alpha(x)$ е бескрајно мала големина, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Од теоремата за граница на сума следува:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (A + \alpha(x)) = \lim_{x \to x_0} A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A,$$

т.е. граница на функцијата $f(x)$ е $A$.

На ист начин може да се споредуваат и бескрајно големите големини.

Функцијата $A(x)$ е бескрајно голема кога $x \to x_0$, ако $\lim\limits_{x \to x_0} A(x) = \infty$. ( $\lim\limits_{x \to x_0} A(x) = \infty$ означува $\lim\limits_{x \to x_0} |A(x)| = +\infty$ ).

**Теорема 5.** *Ако* $\alpha(x)$ *е бескрајно мала големина кога* $x \to x_0$*, различна од нула во околината на точката* $x_0$*, тогаш* $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ *е бескрајно голема големина во околината на точката* $x_0$*.*

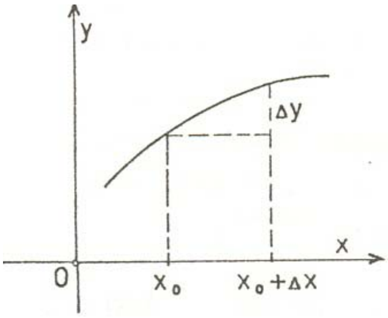
# 7. НЕПРЕКИНАТОСТ НА ФУНКЦИЈА

## 7. 1. Непрекинатост на функција во точка

Да ја разгледаме функцијата $y = f(x)$ дефинирана во точката $x_0$.

Нека променливата $x$ добие нараснување $\Delta x$ ( позитивно или негативно), т.е. $x=x_0+\Delta x$, тогаш функцијата ќе добие соодветно нараснување $\Delta y$ (црт.4.4), кое ќе биде еднакво на разликата од вредностите на функцијата за $x=x_0+\Delta x$ и $x=x_0$, т.е.

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$



Црт. 4. 4.

**Пример 1.** *Да се определи прирастот на аргументот* $x$ *и прирастот на функцијата* $y=x^3$, *ако аргументот* $x$ *се менува од* $-1$ *до* $2$.

Очигледно е дека

$$\Delta x = 2-(-1) = 3$$

и

$$\Delta y = 2^3-(-1)^3 = 9.$$

*Ако функцијата* $f(x)$ *во околината на дадена точка се менува така што да следат произволно мали нараснувања на функцијата за доволно мали нараснувања на независно променливата, што е карактерис-тично за многу процеси, за функцијата се вели дека е* ***непрекината во точка***.

Истата дефиниција можеме да ја искажеме поточно на следниов начин:

*Функцијата* $f(x)$ *е* ***непрекината во точката*** $x_0$ *ако*:

**1⁰** *функцијата е дефинирана во точката* $x_0$,

**2⁰** *нараснувањето на функцијата* $\Delta y$ *во точката* $x_0$ *се стреми кон нула, кога нараснувањето на аргументот се стреми кон нула, т.е.*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right] = 0.$$

**Пример 2.** *Функцијата* $y=x^2$ *е непрекината во точката* $x=x_0$.

Навистина, ако аргументот нарасне за $\Delta x$ функцијата ќе прими нараснување $\Delta y$, т.е.

$$\Delta y = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Очигледно е дека $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ и бидејќи функцијата $y=x^2$ е дефинирана во точката $x=x_0$, следува дека се задоволени двата услова што се наведени, па според тоа, таа е непрекината во точката $x = x_0$.

Од

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

односно

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[ f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0,$$

се добива

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

Ако замениме

$$x = x_0 + \Delta x \qquad (\text{кога } \Delta x \to 0,\ x \to x_0),$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

така што може да се искаже и следнава дефиниција за непрекинатост:

*Функцијата* $f(x)$ *е* ***непрекината во точката*** $x_0$ *ако*:

**1⁰** *функцијата е дефинирана во точката* $x_0$,

**2⁰** *постои граница* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

*и при тоа*,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

*т.е. функцијата е непрекината во дадена точка* $x_0$, *тогаш и само тогаш ако границата на функцијата кога* $x \to x_0$ *е еднаква со вредноста на функцијата во точката* $x_0$.

Со помош на дефиницијата за граница на функцијата во точката $x_0$, дадената дефиниција за непрекинатост е еквивалентна со дефиницијата:

*Функцијата* $f(x)$ *е* ***непрекината во точката*** $x_0$, *ако и само ако* $f(x_0)$ *постои и ако за секој* $\varepsilon>0$ *постои* $\delta>0$ (што зависи од $\varepsilon$) *таков што*

$$|\, f(x)-f(x_0)\,| < \varepsilon \quad \text{кога} \quad |x-x_0| < \delta.$$

Да споменеме уште два поима, што често се сретнуваат: непрекинатост одлево и непрекинатост оддесно.

*Ако функцијата* $f(x)$ *е дефинирана во точката* $x_0$ *и ако*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)= f(x_0),$$

*се вели дека функцијата во точката* $x_0$ *е* ***непрекината оддесно***.

*Ако функцијата* $f(x)$ *е дефинирана во точката* $x_0$ *и ако*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)= f(x_0),$$

*се вели дека функцијата во точката* $x_0$ *е* ***непрекината одлево.***

*Функцијата е непрекината во точката* $x_0$, *ако нејзините гранични вредности (лева и десна) постојат и, притоа,*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)= \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0),$$

*Ако функцијата* $f(x)$ *е непрекината во секоја точка* $x\in(a,b)$, *тогаш велиме дека* ***функцијата*** $f(x)$ ***е непрекината на интервалот*** $(a,b)$.

*Ако функцијата* $f(x)$ *е непрекината во интервалот* $(a,b)$ *и уште непрекината оддесно во* $a$ *и непрекината одлево во* $b$, *тогаш е непрекината на затворениот интервал* $[a,b]$.

Без доказ ќе наведеме: *ако функциите* $f(x)$ *и* $g(x)$ *се непрекинати во точката* $x_0$ *(во интервал), тогаш функциите*:

$$f(x)+g(x),\;\; f(x)-g(x),\;\; f(x)\cdot g(x) \quad \text{и} \quad \frac{f(x)}{g(x)},$$

*кога* $g(x_0)\neq 0$, $g(x)\neq 0$ *во разгледуваната точка (интервал) се* ***непрекинати во точката*** $x_0$ (***разгледуваниот интервал***).

## 7. 2. Точки на прекинатост на функција

*Ако функцијата* $f(x)$ *во точката* $x_0\in(a,b)$ *не е непрекината, велиме дека има* ***прекин во точката*** $x_0$.

Разликуваме два вида точки на прекинатост: точки на прекинатост од прв вид (ред) и точки на прекинатост од втор вид.

*Точката* $x_0$ *за функцијата* $f(x)$ *се вика* ***точка на прекинатост од прв вид****, ако функцијата има лева и десна граница во точката* $x_0$.

**1$^0$** *Ако*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0),$$

*и*

$$f(x_0-0) \neq f(x_0+0),$$

*без оглед дали постои* $f(x_0)$ *или некоја од спомenатите граници е еднаква на вредноста на функцијата во точката* $x=x_0$ *, за овој вид точка велиме дека е* ***точка на прекин со конечен скок*** (црт.4.5).

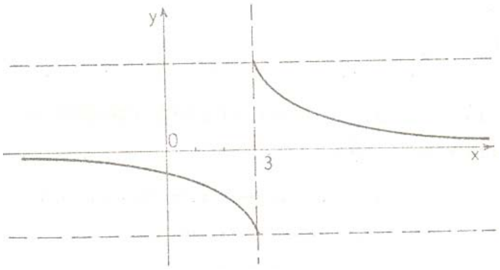
**Пример 1.** *Да покажеме дека за* $x=3$, *функцијата*

$$y = arctg\,\frac{1}{x-3}$$

*има прекин со конечен скок.*

Ако $x\to 3-0$, тогаш

$$\frac{1}{x-3}\to-\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to3-0} y=-\frac{\pi}{2};$$



Црт. 4. 5.

Ако $x\to 3+0$, тогаш

$$\frac{1}{x-3}\to+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to3+0} y=\frac{\pi}{2}.$$

Бидејќи, за $x=3$ функцијата има конечни, но различни лева и десна граница, следува дека $x = 3$ е точка на прекин со конечен скок (црт.4.5).

*Разликата меѓу десвата и левата граница во точката се вика скок*, а во примеров тој е $\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$.

**2⁰** *Ако постојат лева и десна граница и $f(x_0)$ и притоа*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0),$$

*за точката $x_0$ се вика дека е* ***точка со отстранлив прекин***.

**Пример 2.** *Функцијата*

$$y = \frac{x^2-25}{x-5}$$

*во точката $x=5$ има отстранлив прекин.*

Во точката $x=5$ функцијата не е дефинирана. Во други точки дропката може да се скрати со $x-5$, бидејќи $x-5 \neq 0$. Според тоа, при $x\neq 5$, $y=x+5$. Лесно се констатира дека

$$\lim_{x\to 5-0} y = \lim_{x\to 5+0} y = \lim_{\delta\to 0}\frac{(5+\delta)^2-25}{(5+\delta)-5} = \lim_{\delta\to 0}\frac{10\delta+\delta^2}{\delta} = 10.$$

Значи, функцијата има отстранлив прекин. Него ќе го отстраниме ако се услови при $x=5$, $y=10$. По ова може да се смета дека дадената функција е непрекината за сите вредности на $x$, ако се земе дека равенството

$$\frac{x^2-25}{x-5} = x+5$$

е точно за секој $x$, освен за $x=5$. Во тој случај графикот на функцијата ќе биде правата $y=x+5$.

Сите други точки на прекинатост се викаат ***точки на прекинатост од втор вид***. Во нив барем една од граничните вредности на функцијата (лева и десна) не е конечна.

**Пример 3.** *Функцијата*

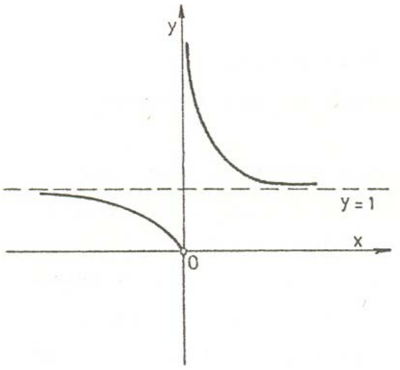
$$y = 2^{\frac{1}{x}}$$

*има прекин од втор вид во точката $x = 0$.*

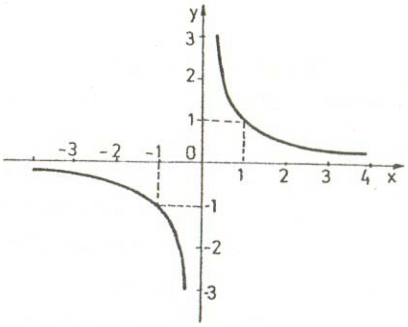
Кога $x \to 0+0$, тогаш $\frac{1}{x} \to +\infty$ па $\lim\limits_{x \to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$,

а кога $x \to 0-0$, тогаш $\frac{1}{x} \to -\infty$ па $\lim\limits_{x \to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$.

Бидејќи разгледуваната функција има една граница $+\infty$ во точката $x=0$, таа точка е точка на прекин од втор ред (црт.4.6).



Црт. 4. 6.



Црт. 4. 7.

**Пример 4.** *Функцијата*

$$y = \frac{1}{x}$$

*е прекината во точката* $x=0$.

Навистина, таа е неопределена за $x=0$. Освен тоа, ако $x$ клони кон нула од лево, $f(0-0) = -\infty$, а ако клони кон $0$ од десно $f(0+0) = +\infty$ (црт.4.7).

## 7. 3. Особини на непрекинати функции

Ќе се запознаеме со некои важни особини на функциите кои што се непрекинати на дадена отсечка $[a,b]$.

**Теорема 1.** *Ако функцијата* $f(x)$ *е непрекината во некоја точка* $x_0$, *тогаш постои таква околина на точката* $x=x_0$, *во која функцијата* $f(x)$ *е ограничена.*

⌈**Доказ:** Нека функцијата $f(x)$ е непрекината во точката $x=x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Да земеме $\varepsilon=1$, тогаш постои такво $\delta>0$, што за сите вредности на $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ важи неравенството

$$|\,f(x)-f(x_0)\,|<1,$$

од каде што следува:

$$|\,f(x)\,|-|\,f(x_0)\,|<1 \quad \text{или} \quad |\,f(x)\,|<|\,f(x_0)\,|+1,$$

т.е.

$$|\,f(x)\,|<M, \quad \text{каде што} \quad M=A+1.$$

Со тоа докажавме дека функцијата е ограничена во околината на точката $x=x_0$.⌋

**Теорема 2.** *Ако функцијата $f(x)$ е непрекината во сегментот $[a,b]$, тогаш таа е ограничена во тој сегмент.*

⌈**Доказ:** Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека $f(x)$ е неограничена функција во сегментот $[a,b]$. Ќе го примениме принципот на вложени сегменти (гл.I, **т.3.5**). Сегментот $[a,b]$ го разделуваме на два еднакви дела, тогаш функцијата $f(x)$ барем на едниот од тие сегменти е неограничена (во спротивно би била ограничена на $[a,b]$). Сегментот на кој функцијата $f(x)$ е неограничена ќе го обележиме со $[a_1,b_1]$. Потоа сегментот $[a_1,b_1]$ ќе го разделиме на два еднакви дела, функцијата $f(x)$ барем на едниот од тие сегменти е неограничена. Сегментот на кој таа е неограничена ќе го обележиме со $[a_2,b_2]$. Продолжувајќи го тој процес неограничено број пати ја добиваме низата:

$$[a,b],\ [a_1,b_1],\ \ldots\ ,[a_n,b_n],\ \ldots$$

од вложени сегменти. На секој од тие сегменти функцијата $f(x)$ е неограничена. Познато ни е од порано дека постои единствена точка $c$ што за секој $n$,

$$a_n\le c\le b_n, \qquad c=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n\ .$$

Функцијата $f(x)$ е непрекината во точката $x=c$ затоа што е непрекината во $[a,b]$, а тогаш таа е ограничена во некоја $\delta$–околина на точката $x=c$ (според претходната теорема).

Од дефиницијата за граница на низа постои таков природен број $n_0$ таков што за секој $n>n_0$,

$$|a_n - c| < \delta \quad \text{и} \quad |b_n - c| < \delta$$

од каде што

$$a_n > c - \delta, \qquad b_n < c + \delta,$$

па

$$a_n \leq c < c+\delta \qquad b_n \geq c > c - \delta$$

така што

$$c - \delta < a_n \leq c \leq b_n < c+\delta$$

т.е.

$$[a_n, b_n] \subset (c-\delta, c+\delta).$$

Така функцијата $f(x)$ која е ограничена на интервалот $(c-\delta, c+\delta)$ на неговиот дел $[a_n, b_n]$ е неограничена (по конструкцијата на тие сегменти), што е невозможно.

Со тоа теоремата е докажана. ⌋

Ако функцијата $f(x)$ не е непрекината на сегментот $[a,b]$, оваа теорема не важи.

**Пример 1.** *Нека е дадена функцијата*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{za} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{za} \quad x = 0, \end{cases}$$

Оваа функција е непрекината на $(0,1)$, но не е непрекината за $x=0$, затоа таа не е ограничена на интервалот $[0,1]$, бидејќи $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$.

**Теорема 3.** (***Ваерштрас***). *Ако $f(x)$ е непрекината во сегментот $[a,b]$, тогаш постојат $\xi$, $\eta \in [a,b]$ такви што $f(\xi)$ е најголемата, а $f(\eta)$ најмалата вредност на функцијата $f(x)$ во $[a,b]$.*

⌈**Доказ:** Од претходната теорема следува дека функцијата $f(x)$ е ограничена во $[a,b]$, т.е. множеството вредности на функцијата во $[a,b]$ е ограничено и има супремум $M$. За сите $x \in [a,b]$, $f(x) \le M$.

Ќе докажеме дека $M$ е една од вредностите на $f(x)$ што таа ја добива во $[a,b]$. Да го претпоставиме обратното т.е. дека функцијата $f(x)$ ниту во една точка во $[a,b]$ не добива вредност $M$. Тогаш функцијата $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ е непрекината во $[a,b]$ бидејќи $M - f(x) > 0$ и именителот не е нула, а според претходната теорема таа е и ограничена, т.е. постои таков број $K$ што за сите $x \in [a,b]$, $\varphi(x) < K$, т.е.

$$\frac{1}{M - f(x)} < K, \text{ а тогаш и } \quad f(x) < M - \frac{1}{K}$$

за секој $x \in [a,b]$, па $M$ не би бил супремум на $f(x)$ (затоа што $M - \dfrac{1}{K} < M$). Така, претпоставката дека во сегментот $[a,b]$ функцијата $f(x)$ не ја добива ниту во една точка вредноста $M$, нѐ доведе до противречност. Затоа следува дека постои барем една точка $\xi \in [a,b]$ таква што $f(\xi) = M$.

Аналогно се докажува дека во $[a,b]$ постои барем една точка $\eta$ во која $f(\eta) = m$. За таа цел ќе ја земеме функцијата $-f(x)$. Таа е непрекината во отсечката $[a,b]$ и од докажаното следува дека во некоја точка $x = \eta$ ја добива својата најголема вредност која ја означуваме со $-m$. Оттука следува дека $f(x)$ во сегментот $[a,b]$ во точката $\eta$ ја добива својата најмала вредност $m$. ⌋

Како и при **теорема 2** важна е претпоставката функцијата $f(x)$ да биде непрекината на сегмент, а не во отворен интервал.

**Пример 2.** Функцијата $f(x) = 3x$ определена во интервалот $(0,1)$, во тој интервал е непрекината и ограничена, меѓутоа во тој интервал таа нема најмала, ниту најголема вредност. За сите вредности на $x \in (0,1)$ вредностите на функцијата $0 < f(x) < 3$, а вредностите 0 и 3 функцијата не може да ги добие затоа што точките $x=0$ и $x=1$ не припаѓаат на интервалот $(0,1)$.

**Теорема 4.** (***Болцано-Коши***). *Ако функцијата* $f(x)$ *е непрекината на сегментот* $[a,b]$ *и на краевите од тој сегмент има вредности со спротивни знаци, тогаш постои барем една точка* $c\in[a,b]$, *таква што* $f(c)=0$.

⌈**Доказ:** Нека $f(a)<0$, $f(b)>0$. Сегментот $[a,b]$ да го поделиме на два еднакви сегмента $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$. Ако се случи да е $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, тогаш теоремата би била веќе докажана, но ако $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$, тогаш или $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$ и сегментот $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ ќе ја има особината на $[a,b]$ ($f(a)<0$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$), или $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$, а тогаш сегментот $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ ќе ја има особината на $[a,b]$, т.е. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$, $f(b)>0$. Со $[a_1,b_1]$ да го означиме оној од двата сегмента за кој $f(a_1)<0$, $f(b_1)>0$. Притоа, $a_1\geq a$; $b_1\leq b$. Потоа, сегментот $[a_1,b_1]$ го делиме на два еднакви дела и со $[a_2,b_2]$ ќе го обележиме оној сегмент кај кој $f(a_2)<0$, $f(b_2)>0$, при што $a_2\geq a_1$; $b_2\leq b_1$. Продолжувајќи ја постапката може да се случи или по конечен број разделувања да најдеме точка во која $f(x)$ има вредност нула и тогаш теоремата би била докажана или тоа делење може да се продолжи до бескрај. Тогаш ќе добиеме две бесконечни низи $(a_n)$ и $(b_n)$ за кои

$$a_1\leq a_2\leq \ldots .\leq a_n\leq \ldots$$

$$b_1\geq b_2\geq \ldots .\geq b_n\geq \ldots ,$$

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n},$$

при што

$$f(a_n)<0, \quad f(b_n)>0.$$

Со тоа добивме низа од вложени сегменти

$$[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \;\ldots\; \supset [a_n,b_n] \supset \ldots ,$$

чија должина тежи кон нула, а тогаш постои само една точка $c$ која припаѓа во сите сегменти

$$a \leq a_n \leq c \leq b_n \leq b,$$

при што

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n .$$

Низите $(a_n)$ и $(b_n)$ имаат иста граница $c$, а бидејќи $f(x)$ е непрекината во $c$, тогаш и низите $f(a_n)$ и $f(b_n)$ конвергираат кон $f(c)$.

Бидејќи за секој $n$, $f(a_n) < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) < 0$, т.е. $f(c) \leq 0$.

Од друга страна за секој $n$, $f(b_n) > 0$, така што $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) > 0$, т.е. $f(c) > 0$. Од $0 \leq f(c) \leq 0$ следува:

$$f(c) = 0, \qquad a < c < b.$$

Со тоа теоремата е докажана. ⌋

**Теорема 5.** *Ако функцијата* $f(x)$ *е непрекината на сегментот* $[a,b]$ *и на краевите од тој сегмент добива вредности* $f(a)=A$ *и* $f(b)=B$ *и* $(A\neq B)$, *тогаш во некоја точка* $c\in[a,b]$ *ја добива и секоја вредност* $C=f(c)$ *која се наоѓа меѓу* $A$ *и* $B$.

⌈**Доказ:** Нека $f(a) < f(b)$ и $C$ нека е кој и да било број $A<C<B$.

Ќе ја составиме помошната функција $\varphi(x)=f(x)-C$. Оваа функција е непрекината во сегментот $[a,b]$ и

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0,$$

$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0,$$

т.е. $\varphi(x)$ на краевите на сегментот има различни знаци. Затоа за неа важи **теоремата 4**, т.е. постои таква точка $c\in[a,b]$ во која $\varphi(x)=0$, т.е. $f(c)-C=0$, или $f(c)=C$.

Со тоа теоремата е докажана. ⌋

**Теорема 6.** *Нека со* $y=f(u)$ *и* $u=\varphi\,(x)$ *е зададена во некоја област* $D$ *сложената функција* $y=F(x)=f\,(\varphi\,(x))$. *Ако* $\varphi(x)$ *е непрекината во точката* $x=x_0\in D$, *а* $f(u)$ *е непрекината во точката* $u_0=\varphi\,(x_0)$, *тогаш сложената функција* $f(\varphi(x))$ *е непрекината во точката* $x=x_0$.

⌈**Доказ:** Според теоремата за граница на сложена функција имаме дека

$$\lim_{x\to x_0} F(x)=\lim_{x\to x_0} f\,(\varphi\,(x))=f\,(\varphi\,(x_0)),$$

т.е. функцијата $F(x)$ е непрекината во точката $x=x_0$. ⌋

**Теорема 7.** *Ако функцијата* $y=f(x)$ *е монотона и непрекината на сегментот* $[a,b]$ *од дефиниционата област* $D$, *тогаш и инверзната функција* $\varphi(x)=f^{-1}(x)$ *постои и непрекината е на множеството* $G$. ($G$*–множество вредности на функцијата* $y=f(x)$.)

⌈**Доказ:** Според **теоремата 4**, за непрекинати функции на сегмент, множеството вредности $G$ на функцијата $y=f\,(x)$ е, исто така, некој сегмент. Од теоремата (за постоење на инверзна функција), функцијата $y=f\,(x)$ има инверзна функција $x=\varphi(y)$, чија дефинициона област е сегментот $G$, а множество вредности на функцијата сегментот $D$. Ќе докажеме дека функцијата $\varphi(x)=f^{-1}(x)$ е непрекината на сегментот $G$.

Избираме произволна точка $y_0\in G$. Ако $\varphi(y_0)=x_0$, тогаш според дефиницијата на инверзна функција $x_0\in D$ и освен тоа $f(x_0)=y_0$.

Нека е $\varepsilon>0$ однапред зададен број. Ќе земеме број $\varepsilon'$ $(0<\varepsilon'<\varepsilon)$, така што околината $(x_0-\varepsilon', x_0-\varepsilon')$ исцело да припаѓа во $D$. (Ако $x_0$ е крајна точка на $D$, се избира тој дел од околината кој исцело припаѓа на $D$).

Бидејќи функцијата $f\,(x)$ е монотона на $D$ и уште ако расте, тогаш

$$f(x_0-\varepsilon')\ <\ f(x_0)\ <\ f(x_0+\varepsilon').$$

Да означиме

$$f(x_0-\varepsilon') = y_0-\delta' = y' \in G, \quad f(x_0+\varepsilon') = y_0+\delta'' = y'' \in G,$$

$$(\delta' > 0,\ \delta'' > 0) : \delta = min\{\delta',\delta''\},$$

тогаш

$$y' = y_0 - \delta' \leq y_0-\delta < y_0 + \delta < y_0 + \delta'' = y''.$$

Бидејќи $y' \in G$ и $y'' \in G$, интервалот $(y', y'') \subset G$, исто така, и интервалот $(y_0-\delta, y_0+\delta) \subset G$. За сите вредности на $y$ од $G$ за кои $y_0-\delta < y < y_0+\delta$ важи и $y' < y < y''$, од каде поради монотоноста на инверзната функција $\varphi(y)$ имаме:

$$\varphi(y') < \varphi(y) < \varphi(y'')$$

односно:

$$x_0-\varepsilon' < x < x_0+\varepsilon'$$

и значи:

$$|x-x_0| < \varepsilon' < \varepsilon$$

или

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)| < \varepsilon.$$

Така за кој и да било број $\varepsilon>0$, секогаш може да се најде број $\delta>0$, така што за сите вредности на $y \in G$, за кои $|y-y_0| < \delta$ е исполнето неравенството

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)| < \varepsilon,$$

а тоа значи дека функцијата $\varphi(y)$ е непрекината во која и да било точка $y_0 \in$ G.

Со тоа теоремата е докажана. ⌋

Со помош на овие теореми може да се докаже следната теорема:

**Теорема 8.** *Секоја елементарна функција е непрекината во секоја точка од нејзината дефинициона област.*

# ⌈8. ПОИМ ЗА РАМНОМЕРНА НЕПРЕКИНАТОСТ НА ФУНКЦИЈА

*Функцијата $f(x)$ е* ***рамномерно непрекината*** *во затворен или отворен интервал ако за секој $\varepsilon>0$ постои број $\delta>0$ таков што за кои и да било точки $x_1$ и $x_2$ од тој интервал, за кои $|x_1-x_2|<\delta$, ќе биде задоволено неравенството $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.*

Ако функцијата $f(x)$ е рамномерно непрекината во еден интервал, тогаш таа е и непрекината во секоја точка од интервалот.

Навистина, земајќи го $x_1=x$, а $x_2=x_0$, од дефиницијата за рамномерна непрекинатост имаме кога $|x-x_0|<\delta$, тогаш $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, што значи дека $f(x)$ е непрекината функција во точката $x=x_0$. Обратното не е точно, што се гледа од следниов пример.

**Пример 1.** Функцијата

$$y=\frac{1}{x}$$

на интервалот (0,1) е непрекината, но не е рамномерно непрекината на тој интервал. Тоа следува оттаму што за кој и да било број $\delta>0$ постојат точки $x_1$ и $x_2$ доволно блиски до нула, чие растојание е помало од $\delta$, а апсолутната вредност на разликата $|f(x_1)-f(x_2)|$ е поголема од секој од напред зададен број.

Нека

$$x_1=\frac{1}{n}, \quad x_2=\frac{2}{n} \quad \text{и} \quad n>3,$$

тогаш

$$x_1, x_2\in(0,1) \quad \text{и} \quad |x_1-x_2|=\frac{1}{n}, \text{ а } |f(x_1)-f(x_2)|=\frac{n}{2}.$$

Ако се земе $n$ доволно големо, тогаш разликата $|x_1-x_2|$ станува по желба мала, но разликата $|f(x_1)-f(x_2)|$ станува неограничено голема.

**Теорема на Кантор.** *Ако функцијата $f(x)$ е непрекината во сегментот $[a,b]$, тогаш таа е рамномерно непрекината на тој сегмент.* ⌋

## Задачи за вежбање

**1.** Да се покаже дека

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-3}{2x+1} = 2.$$

За која вредност на $x$ функцијата се разликува од граничната вредност за помалку од $0{,}001$.

**2.** Да се најдат следниве еднострани граници:

**1)** $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}$; **3)** $\lim\limits_{x\to 1+0}2^{\frac{1}{1-x}}$;

**4)** $\lim\limits_{x\to 1-0}2^{\frac{1}{1-x}}$; **5)** $\lim\limits_{x\to 1+0}\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$.

Одг.: **1)** $+\infty$; **2)** $-\infty$; **3)** 0; **4)** $+\infty$; **5)** $\infty$.

**3.** Да се најдат следниве граници:

**1)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$; Одг.: **1)** 4.

**2)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$; **2)** $-\frac{1}{2}$.

**3)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$; **3)** $n$ $(n\in N)$.

**4)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$; **4)** $\frac{2}{3}$.

**5)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-5}{3x^2+x-2}$; **5)** $\frac{1}{3}$.

| | |
|---|---|
| **6)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$; | Одг.: **6)** 1. |
| **7)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-x-1}{\sqrt{x+1}-1}$; | **7)** $-1$. |
| **8)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$ | **8)** $\dfrac{3}{2}$. |
| **9)** $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt[3]{x}-2}$; | **9)** 2. |
| **10)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{x^2}$; | **10)** $\dfrac{m^2}{2}$. |
| **11)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$; | **11)** 2. |
| **12)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-tg^2x}$; | **12)** $\dfrac{1}{4}$. |
| **13)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$; | **13)** $6\sqrt{2}$. |
| **14)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$; | **14)** $\dfrac{2}{3}$. |
| **15)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$; | **15)** $-e^2$. |
| **16)** $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+3)-\ln x]$; | **16)** 3. |

**17)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-1}{x}$; Одг.: **17)** $-2$

**18)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$; **18)** $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

**4.** Да се споредат следниве бескрајно мали големини:

**1)** $1-\cos x$ и $x$ кога $x\to 0$;

**2)** $\sqrt{x(4-x)}$ и $x$ кога $x\to 0$;

**3)** $\alpha(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ и $\beta(x)=1-\sqrt{x}$ кога $x\to 1$;

**4)** $\alpha(x)=1-\cos^3 x$ и $\beta(x)=\dfrac{3}{2}\sin^2 x$ кога $x\to 0$.

Одг.: **1)** $1-\cos x$ има повисок ред од $x$; **2)** $\sqrt{x(4-x)}$ има понизок ред од $x$; **3)** имаат ист ред; **4)** се еквивалентни.

## ГЛАВА V

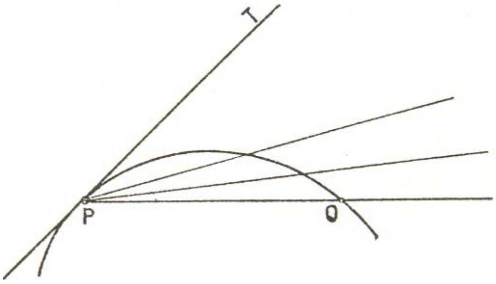
# ИЗВОД НА ФУНКЦИЈА

## 1. ПОИМ ЗА ИЗВОД

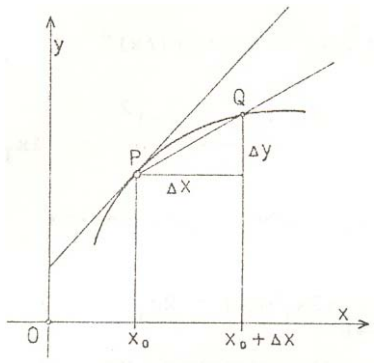
Извод на функцијата е еден од основните поими во вишата математика. Изводот е воведен од потребите што ги наложува практиката за решавање различни задачи што не било можно да се решат во рамките на елементарната математика. Ќе разгледаме две од многуте задачи што нѐ водат кон потребата од воведување на овој поим, а имено задачата за определување на коефициентот на правецот на тангентата кон дадена крива и определување брзината на тело што се движи нерамномерно во даден правец.

Разгледуваме крива (C) што е претставена на црт.5.1 и ја повлекуваме секантата низ точките P и Q. Нека точката P остане во првобитната положба и да претпоставиме дека точката Q се поместува по кривата кон точката P. Јасно дека при тоа секантата ќе заземе различни положби.

*Граничната положба* PT *на секантата* PQ *кога* Q→ P *по должината на кривата се вика* ***тангента на кривата во точката*** P.



Црт. 5. 1.



Црт. 5. 2.

Оваа чисто геометриска дефиниција на тангентата ќе ја преведеме во аналитичка форма. Ќе си поставиме задача да ја определиме равенката на тангентата. За таа цел проблемот ќе го разгледуваме во однос на Декартовиот координатен систем (црт.5.2).

Познато е дека една права наполно е определена ако се знаат една точка и коефициентот на правецот на правата. Тогаш се користи равенката

$$y - y_0 = k\,(x - x_0).$$

Нека е дадена кривата со равенката $y=f\,(x)$ и точката $P(x_0,y_0)$ на таа крива. За вредноста на аргументот $x_0+\Delta x$ одговара точката $Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ на кривата.

Очигледно е, дека коефициентот на правецот на секантата е:

$$k_{\overline{PQ}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\,(x_0+\Delta x) - f\,(x_0)}{\Delta x}\,.$$

Останува сега да го определиме коефициентот на правецот на тангентата што го означуваме со $k$. Од дискусијата што ја спроведовме, коефициентот на правецот на тангентата ќе биде рамен на граничната вредност на коефициентот на правецот на секантата кога точката Q се движи кон точката P. Движењето на Q кон P се изразува со условот $\Delta x \to 0$ , па според тоа

$$k = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\,(x_0+\Delta x) - f\,(x_0)}{\Delta x}$$

при услов да постои границата.

**Пример 1.** *Да се определи равенката на тангентата на кривата* $y = x^2$ *во точката* P *со апсциса* $x = x_1$.

Нека точката Q има координати $(x_1+\Delta x, f(x_1+\Delta x))$.

Ќе го пресметаме прирастот на функцијата

$$\Delta y = f(x_1+\Delta x) - f(x_1) = (x_1+\Delta x)^2 - x_1^2 = 2x_1 \cdot \Delta x+(\Delta x)^2$$

и количникот

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{2x_1 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_1+\Delta x.$$

Потоа определуваме граница на количникот $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ кога $\Delta x \to 0$, имено

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_1+\Delta x) = 2x_1.$$

За вредност на коефициентот на тангентата кон кривата $y = x^2$ во точката P добивме $k=2x_1$, па според тоа ревенката на тангентата ќе биде:

$$y - y_1 = 2x_1 \cdot (x - x_1).$$

Нека $s=s(t)$ е законот за движење на материјална точка. Формулата го изразува патот $s$ што ќе го помине точката за времето $t$. Нè интересира брзината на материјалната точка во моментот $t_0$. Ќе го пресметаме изминатиот пат $\Delta s$ на материјалната точка во временскиот интервал од $t_0$ до $t_0+\Delta t$. Тој ќе биде еднаков на разликата помеѓу изминатиот пат за време $t_0+\Delta t$ и за времето $t_0$ т.е.

$$\Delta s = s(t_0+\Delta t) - s(t_0).$$

Односот $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ќе биде *средна брзина* во моментот $t_0$ пресметано во интервалот од $t_0$ до $t_0+\Delta t$. Средна брзина е од причина што брзината на тој интервал се менува, а ние сме претпоставиле дека во интервалот $\Delta t$ (релативно мал) брзината е константна.

Доколку $\Delta t$ е помало, пократок е интервалот на времето од $t_0$ до $t_0+\Delta t$, средната брзина над пократкиот временски интервал поточно ја карактеризира брзината на телото во моментот $t_0$. Поради тоа, природно е да се земе за брзина на материјална точка границата на средната брзина (односот $\frac{\Delta s}{\Delta t}$) кога $\Delta t \to 0$ т.е.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Наведените видови гранични вредности, а може да се наведат уште многу други на изглед независни, всушност, се идентични. Кај сите нив се врши една иста низа математички операции.

Апстрахирајќи се од геометриското или механичкото значење на аргументот и функцијата, за функцијата $y=f(x)$ определена во околина на точката $x$, таа низа математички опрации се состои во следново:

– За дадено нараснување на аргументот $\Delta x$, се пресметува нараснувањето на функцијата

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

– Се формира количникот од нараснувањето на функцијата и нараснувањето на аргументот

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

*Количникот* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *се вика* ***средна брзина*** *на промената на функцијата* $f(x)$ *кога* $x$ *ќе се промени за* $\Delta x$.

– Се определува границата на овој количник, кога нараснувањето на аргументот клони кон нула.

*Границата на количникот*

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

*ако постои, се вика* ***извод на функцијата*** $f(x)$ ***во точката*** $x$.

Вообичаени се следниве ознаки за изводот на функцијата:

$$y', \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}.$$

Изводот на функцијата во дадена точка е реален број, кој зависи од разгледуваната вредност на промнливата $x$.

Разгледувајќи го изводот за различни вредности на променливата $x$ се добиваат, во општ случај различни вредности за изводот, т.е. изводот $f'(x)$ на дадената функција $f(x)$ на определен интервал е функција определена во истиот интервал или во дел од него.

*Дефинираната постапка се вика* ***диференцирање или изнаоѓање извод на една функција****.*

***Функцијата*** *која има извод во точката* $x=x_0$ велиме дека *е* ***диференцијабилна во таа точка****.*

По дефинирањето на извод можеме да кажеме дека:

*коефициентот на правецот на тангентата во точката* M($x_0$,$y_0$) *од кривата* $y = f(x)$ *е вредноста на изводот во таа точка* ($k = f'(x_0)$).

*Брзината на движењето* $s=s(t)$ *на материјалната точка е извод на таа функција,* т.е. $v = s'(t)$.

Да ја разгледаме границата

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ако оваа граница постои, тогаш неа ја викаме ***лев извод на функцијата*** $f(x)$ ***во точката*** $x_0$ и ја означуваме со $f'_-(x_0)$.

Аналогно, ако постои границата

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

тогаш ја викаме ***десен извод на функцијата*** $f(x)$ ***во точката*** $x_0$ и ја означуваме со $f'_+(x_0)$.

*Левиот и десниот извод ги викаме едностранни изводи.*

Ако функцијата $f(x)$ има лев и десен извод во точката $x=x_0$ и ако тие се еднакви, т.е.

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0),$$

тогаш велиме дека функцијата $y = f(x)$ има извод во точката $x=x_0$.

Ако границата

$$lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = +\infty\ (-\infty),$$

тогаш велиме дека *функцијата* $f(x)$ *има бесконечен извод во точката* $x_0$.

Геометриски тоа значи дека тангентата на кривата во таа точка е нормална на $x$-оската.

Понатаму ќе велиме функцијата има извод во точката $x=x_0$ ако тој е конечен.

*За функцијата* $y = f(x)$ *велиме дека има извод во интервалот* $(a,b)$ *ако таа има извод во секоја точка од тој интервал.*

*Функцијата* $y = f(x)$ *има извод на сегментот* $[a,b]$ *ако има извод во секоја точка од интервалот* $(a,b)$*, десен извод во точката* $x=a$ *и лев извод во точката* $x=b$*.*

*Функцијата што има извод во дадена точка се вика дека е диференцијабилна во таа точка.*

За функцијата што има извод во отворен (затворен) интервал велиме дека е диференцијабилна во отворен (затворен) интервал.

**Теорема.** *Ако функцијата* $y = f(x)$ *има извод во точката* $x$*, тогаш таа е непрекината во таа точка.*

**Доказ:** Нека изводот на функцијата $y = f(x)$ е $f'(x)$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Од граница на функција (Гл. IV. **т.6. теорема 4**) следува дека:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

каде што $\alpha(\Delta x) \to 0$ кога $\Delta x \to 0$. Оттука

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

Очигледно е дека $\Delta y \to 0$ кога $\Delta x \to 0$, а тоа значи дека функцијата $f(x)$ е непрекината во точката $x$.

Значи, непрекинатоста на функцијата во дадена точка е потребен услов за постоење извод на функцијата во таа точка.

Непрекинатоста на функцијата во дадена точка не е доволен услов за постоење извод во разгледуваната точка.

На пример, функцијата $y=|x|$ е непрекината во точката $x=0$, но нема извод во таа точка.

Нараснувањето на функцијата во точката $x = 0$ е $\Delta y = |\Delta x|$. Таа е непрекината затоа што

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left|\Delta x\right| = 0,$$

но нема извод, бидејќи

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left|\Delta x\right|}{\Delta x}=\begin{cases}1 & \Delta x>0,\\ -1 & \Delta x<0,\end{cases}$$

односно

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1, \qquad \lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1,$$

т.е. левиот и десниот извод во точката $x = 0$ не се еднакви.

Ќе ги определиме изводите на некои функции

### *Извод од константа.*

Нека функцијата $y = f(x)$ во некој интервал има константна вредност, т.е. $y = C$.

За секој $x$ нараснувањето

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0,$$

затоа и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

од каде што се добива:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

т.е. ***извод од константа е нула*** $(C)' = 0$.

**Пример 2.** *Да се определи изводот на функцијата* $y = x^2$.

Нека $x$ добие нараснување $\Delta x$; функцијата добива нараснување

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Формираме количник од нараснувањето на функцијата и нараснувањето на аргументот:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Определуваме граница на количникот кога $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x.$$

Следува : $(x^2)' = 2x$.

**Пример 3.** *Да се определи изводот на функцијата* $y = \frac{1}{x}$.

Ако $x$ добие нараснување $\Delta x$, функцијата добива нараснување:

$$\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

Формираме количник:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x(x+\Delta x)}.$$

Определуваме граница на количникот кога $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{-1}{x(x+\Delta x)}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Според тоа, изводот на функцијата $y = \frac{1}{x}$ е $y' = -\frac{1}{x^2}$.

**Пример 4.** *Да се определи изводот на функцијата* $y = \sqrt{x}$.

Кога променливата $x$ добива нараснување $\Delta x$, нараснувањето на функцијата е

$$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}.$$

Формираме количник:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Пред да пристапиме кон определување на границата, ќе го трансформираме изразот во друг облик за да можеме да ја определиме границата.

Количникот ќе го помножиме и ќе го поделиме со $\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}$, па се добива:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Сега сме во можност да ја определиме границата:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Според тоа, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Во наведените примери определивме извод од степенски функции со цел да укажеме на постапката за определување извод по дефиниција.

### ***Извод на степенска функција*** $y = x^n$

Ќе покажеме како се определува извод на степенска функција за кој и да било број $n \in N$.

Ако променливата $x$ добие нараснување $\Delta x$, тогаш степенската функција $y = x^n$ добива нараснување:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n.$$

Применувајќи ја биномната формула, за $\Delta y$ се добива:

$$\Delta y = x^n + nx^{n-1}\cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\cdot(\Delta x)^2 +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}\cdot(\Delta x)^3 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n.$$

Количникот $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ќе биде:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\cdot \Delta x +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}\cdot(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^{n-1}.$$

На десната страна од равенството имаме сума од $n$ собирци. Сите собирци, освен првиот, се помножени со $\Delta x$ или со степените од $\Delta x$.

Границата е: $y\,' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = n\,x^{n-1}$,

бидејќи освен првиот член, сите други тежат кон нула заедно со $\Delta x$.

Според тоа,

$$(x^n)\,' = n\,x^{n-1}.$$

Определувањето на изводите на функцијата по дефиниција што го покажавме со наведените примери не се користи при изнаоѓање на изводите на посложените функции. Изводите на функциите се определуваат врз основа на таблицата на изводите на основните функции, правилата за диференцирање на сумата, разликата, производот и количникот на две или повеќе функции и постапката за диференцирање на сложените функции. Затоа ќе ги определиме изводите на основните функции и спомнатите правила, за да можеме потоа, помнејќи ги тие изводи и правила напамет, да изнаоѓаме извод на дадена функција.

## 2. ИЗВОД НА СУМА, РАЗЛИКА, ПРОИЗВОД И КОЛИЧНИК

$1^0$ ***Извод на сума.*** Нека е зададена функцијата од вид:

$$y = u(x) + v(x),$$

при што $u=u(x)$ и $v=v(x)$ се функции што имаат извод во точката $x$.

Ако променливата $x$ добие нараснување $\Delta x$, тогаш функциите $u$ и $v$ ќе добијат нараснувања соодветно рамни на $\Delta u$ и $\Delta v$, додека функцијата $y$ ќе добие нараснување $\Delta y$, па според тоа:

$$\Delta y = u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - [u(x) + v(x)] =$$

$$= [\, u(x+\Delta x) - u(x)] + [\, v(x+\Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v.$$

По делење со $\Delta x$, се добива:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

а границата е:

$$y\,' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u\,' + v\,',$$

т.е. ***изводот на сумата од функции е рамен на сумата од изводите на функциите***.

*На сличен начин се покажува дека и* ***изводот од разликата на функциите е рамен на разликата од изводите на функциите***.

**$2^0$ *Извод од производ*.** Нека е зададена функцијата :

$$y = u(x) \cdot v(x),$$

и нека функциите $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имаат извод во точката $x$.

Ако $x$ добие нараснување $\Delta x$, функцијата $u$ ќе добие нараснување $\Delta u$, функцијата $v$ добива нараснување $\Delta v$, па според тоа, нараснувањето на функцијата $y$ ќе биде:

$$\Delta y = u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x) =$$

$$= u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x+\Delta x) =$$

$$= [\, u(x+\Delta x) - u(x)]\, v(x+\Delta x) + u(x)\, [\, v(x+\Delta x) - v(x)] =$$

$$= \Delta u \cdot (v+\Delta v) + u \cdot \Delta v,$$

односно

$$\Delta y = v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Ќе поделиме со $\Delta x$ и ќе ја определиме границата на количникот:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$y\,' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Бидејќи функциите $u$ и $v$ се непрекинати во разгледуваната точка се дообива:

$$y\,' = (u \cdot v)\,' = u\,' \cdot v + u \cdot v\,',$$

затоа што $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$ .

Ако $v = C$ ($C$–константа), тогаш функцијата $y = C{\cdot}u$ ќе има извод $y\,' = (C \cdot u)\,' = C \cdot u\,'$.

Изведената формула за диференцирање на производ може да се воопшти за случај на производ од повеќе функции. Ако, на пример, функцијата е од видот:

$$y = u \cdot v \cdot w$$

каде што $u$, $v$ и $w$ се функции од $x$, се добива:

$$y\,' = [(\, u \cdot v) \cdot w]\,' = (\, u \cdot v)\,' \cdot w + u \cdot v \cdot w' =$$

$$= (u\,'{\cdot}\, v + u \cdot v\,'\,) \cdot w + u \cdot v \cdot w' =$$

$$= u\,'{\cdot}\, v \cdot w + u \cdot v\,' \cdot w + u \cdot v{\cdot}w'.$$

### $3^0$ *Извод од количник.*

Ќе разгледаме и функција од видот: $y = \dfrac{u}{v}$,

каде што $u$ и $v$ се функции од $x$, имаат изводи во точката $x$ и ќе претпоставиме дека во разгледуваната точка функцијата $v(x)$ е различна од нула .

Нараснувањето на функцијата ќе биде:

$$\Delta y = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} =$$

$$= \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} =$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]\cdot v(x) - u(x)\cdot [v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}.$$

Количникот од нараснувањето на функцијата и нараснувањето на аргументот

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\cdot v(x) - u(x)\cdot \dfrac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$$

Изводот на дадената функција е

$$y\,' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x) - u(x)\cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x) - u(x)\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)\cdot v(x)},$$

$$y\,' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}. \qquad (*)$$

**Пример 1.** Извод на степенска функција со цел негативен показател ќе добиеме врз основа на формулата (*). Нека $m$ е цел позитивен број и

$$y = x^{-m} \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{x^m}.$$

Применувајќи ја формулата (*), се добива:

$$y = -\frac{\left(x^m\right)'}{x^{2m}} = -m\,x^{-m-1}.$$

Според тоа, се добива истото правило, што важи и при диференцирање на степенска функција со цел позитивен степенов показател.

## 3. ИЗВОДИ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

### 3. 1. Извод на функцијата $y=sin\,x$.

Нека аргументот се наголеми за $\Delta x$. Соодветно функцијата ќе добие нараснување

$$\Delta y = sin\,(x+\Delta x) - sin\,x.$$

Нараснувањето на функцијата го делиме со нараснувањето на аргументот, па се добива:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sin\left(x+\Delta x\right) - sin\,x}{\Delta x}.$$

Пред да пристапиме кон определување на границата на односот $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, кога $\Delta x \to 0$, ќе го трансформираме во позгоден вид за да можеме да ја определиме границата, користејќи се со тригонометриската релација

$$sin\,\alpha - sin\,\beta = 2\,cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Бидејќи конкретно $\alpha=x+\Delta x$, $\beta=x$, се добива:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\,cos\,\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot sin\frac{x+\Delta x-x}{2}}{\Delta x},$$

односно

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

По определување граница на количникот се добива изводот:

$$y\,' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = cos\,x,$$

бидејќи: $\lim_{\Delta x\to 0} cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = cos\,x;$ $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1,$

согласно со претходно дефинираната граница во гл.IV, **т.4.3**.

Според тоа $(sin x)' = cos\,x$

### 3. 2. Извод на функцијата $y = cos\,x$.

По наполно аналогна постапка ќе го определиме изводот на функцијата $y{=}cos\,x$. Пресметуваме:

$$\Delta y = cos\,(x{+}\Delta x)\; - cos\,x,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{cos(x+\Delta x) - cos\,x}{\Delta x}.$$

Користејќи ја сега тригонометриската релација

$$cos\,\alpha - cos\,\beta = -2\,sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

се добива:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\,sin\,\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot sin\frac{x+\Delta x-x}{2}}{\Delta x},$$

односно

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\,sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

По определување на границата се добива изводот

$$y\,' = (cos\,x)\,' = -\,sin\,x.$$

### 3. 3. Извод на функцијата $y=tg\,x$.

Изводот на функцијата $y = tg\ x$ ќе го определиме по правилото за диференцирање на количник на следниов начин:

$$y = tg\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x},$$

$$y\,' = \frac{(sin\,x)'\,cos\,x - sin\,x\,(cos\,x)'}{cos^2\,x} = \frac{cos^2\,x + sin^2\,x}{cos^2\,x} = \frac{1}{cos^2\,x}.$$

Значи: $y\,' = (tg\,x)\,' = \dfrac{1}{cos^2\,x}$

### 3. 4. Извод на функцијата $y = ctg\,x$.

Од релацијата $y = \dfrac{cos\,x}{sin\,x}$ се добива изводот

$$y\,' = \frac{(cos\,x)'\,sin\,x - cos\,x(sin\,x)'}{sin^2\,x} = \frac{-\,sin^2\,x - cos^2\,x}{sin^2\,x} = -\frac{1}{sin^2\,x}.$$

Значи: $y\,' = (ctg\,x)' = -\dfrac{1}{sin^2\,x}.$

## 4. ИЗВОД НА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА

За функцијата $y = a^x$ ќе го определиме нараснувањето $\Delta y$ ако променливата $x$ добие нараснување $\Delta x$ и количникот $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x}-1),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}.$$

Односот $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ треба да се трансформира во друг вид, за да може лесно да се определи границата. За таа цел ќе воведиме смена:

$$a^{\Delta x}-1 = t,$$

$t$ е нова променлива со својство кога $\Delta x \to 0$ и $t \to 0$. По пренесување на константата на десната страна и со логаритмирање се добива:

$a^{\Delta x} = t+1$, $\Delta x\ ln\ a = ln\ (t+1)$, од каде што $\Delta x = \dfrac{ln(t+1)}{ln\, a}$.

По оваа смена количникот се трансформира во вид:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x \cdot t}{\dfrac{ln(t+1)}{ln\, a}} = \frac{a^x \cdot ln\, a}{\dfrac{1}{t} ln(t+1)} = \frac{a^x \cdot ln\, a}{ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}.$$

Пред да пристапиме кон определување на границата, ќе воведеме уште една смена $t = \dfrac{1}{u}$ со својство кога $t \to 0$ , $u \to \infty$, по што се добива:

$$y\,' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{t \to 0} \frac{a^x \cdot ln\, a}{ln(t+1)^{\frac{1}{t}}} = \lim_{u \to \infty} \frac{a^x \cdot ln\, a}{ln\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u} = a^x \cdot lna,$$

бидејќи $\lim\limits_{u \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u = e$, а поради тоа $\lim\limits_{u \to \infty} ln\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u = ln\ e = 1$.

Ако е дадена експоненцијалната функција $y = e^x$, нејзиниот извод е:

$$y\,' = (e^x)\,' = e^x.$$

Изводот на функцијата $y = e^{-x}$ ќе го најдеме ако ја запишеме во вид $y = \dfrac{1}{e^x}$ и го примениме правилото за извод на количник. Се добива: $y\,' = -\, e^{-x}$.

## 5. ИЗВОДИ НА ХИПЕРБОЛИЧНИ ФУНКЦИИ

Изводите на хиперболичните функции ќе ги добиеме врз основа на врските со кои се изразени преку експоненцијалната функција според правилата за диференцирање.

За функцијата $y=shx$, изводот се добива на следниов начин: од равенството

$$sh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

по диференцирање , се добива

$$y' = (sh\,x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \left(\frac{e^x - \frac{1}{e^{-x}}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\,x.$$

Аналогно, за другите хиперболични функции се добиваат нивните изводи :

за функцијата $y = ch\,x$ изводот е $y' = sh\,x$,

за функцијата $y = th\,x$ изводот е $y' = \frac{1}{ch^2 x}$,

за функцијата $y = cth\,x$ изводот е $y' = -\frac{1}{sh^2 x}$.

При определување на изводите на функциите $th\,x$ и $cth\,x$ се користени врските:

$$th\,x = \frac{shx}{chx} \quad \text{и} \quad cth\,x = \frac{chx}{shx}.$$

**Пример 1.** За функцијата $y = x^4 + \cos x + e^x$ по правилото за извод на сума се добива:

$$y' = 4x^3 - \sin x + e^x.$$

**Пример 2.** Изводот на функцијата $y = sh\,x + \sin x + 5$ е

$$y' = ch\,x + \cos x.$$

**Пример 3.** Изводот на функцијата $y = x^2 e^x$ ќе се определи по правилото за извод на производ. Постапката е:

$$y' = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x(2+x)e^x.$$

**Пример 4.** При диференцирањето на функцијата $y = \frac{e^x}{\cos x}$ ќе се користиме со правилото за извод на количник. Постапката е:

$$y' = \frac{(e^x)' \cos x - e^x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}.$$

**Пример 5.** Изводот на функцијата $y = \dfrac{x^2+1}{e^x-4}$ се добива по следнава постапка:

$$y\,' = \frac{\left(x^2+1\right)'\left(e^x-4\right)-\left(x^2+1\right)\left(e^x-4\right)'}{\left(e^x-4\right)^2},$$

$$y\,' = \frac{2x\left(e^x-4\right)-\left(x^2+1\right)e^x}{\left(e^x-4\right)^2} = \frac{2xe^x-8x-x^2e^x-e^x}{\left(e^x-4\right)^2}.$$

## 6. ИЗВОД НА ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА

Функцијата $f(x)$ нека е непрекината и строго монотона на сегментот $[a,b]$ и диференцијабилна во интервалот $(a,b)$. Нејзината инверзна функција $x=f^{-1}(y)$ е, исто така, строго монотона и непрекината.

Од монотоноста на функцијата $x = f^{-1}(y)$ следува дека:

$$\Delta x = f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y) \neq 0 \quad \text{и} \quad \Delta y \neq 0,$$

па затоа можеме да напишеме:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \text{ т.е. } \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)}{\Delta y}}.$$

Од непрекинатоста на функцијата $f^{-1}(y)$ следува дека $\Delta x \to 0$ кога $\Delta y \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}},$$

т.е.

$$y_x\,' = \frac{1}{x_y\,'}.$$

Да ја разгледаме функцијата $y = \sqrt[3]{x}$. Познато е дека

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

До истиот резултат доаѓаме ако постапиме на следниов начин:

Инверзната функција на функцијата $y = \sqrt[3]{x}$ е $x = y^3$. Наоѓаме $x' = 3\,y^2$, па според тоа, согласно со формулата $y' = \dfrac{1}{x'}$, се добива:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad , \text{(бидејќи } y = \sqrt[3]{x}\text{ ).}$$

## 7. ИЗВОДИ НА ЦИКЛОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

Користејќи се со правилото за диференцирање на инверзна функција, многу едноставно ќе ги определиме изводите на циклометриските функции.

### 7. 1. Извод на функцијата $y = arcsin\, x$.

Инверзната функција на функцијата $y=arcsin\, x$ е $x= sin\, y$.

Наоѓаме извод на оваа функција, сметајќи дека $y$ е независно променлива, а $x$ функција, се добива: $x\,' = cos\, y$.

Врз основа на врската $y\,' = \dfrac{1}{x'}$ се добива : $y\,' = \dfrac{1}{cos\, y}$.

Очигледно е дека изводот е изразен во зависност од променливата $y$. Ќе се потрудиме да го изразиме, како што е вообичаено, во зависност од $x$, по следнава постапка:

$$y\,' = \frac{1}{cos\, y} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

по заменување $sin\, y = x$.

### 7. 2. Извод на функцијата $y = arccos\, x$.

Инверзната функција на функцијата $y= arccos\, x$ е $x= cos\, y$, а нејзиниот извод е $x\,' = -sin\, y$.

Заменувајќи во врската $y' = \dfrac{1}{x'}$ и изразувајќи го изводот на функцијата во зависност од променливата $x$, се добива:

$$y\,' = -\frac{1}{sin\, y} = -\frac{1}{\sqrt{1-cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

### 7. 3. Извод на функцијата $y = arctgx$.

Инверзната функција на функцијата $y=arctg\ x$ е $x = tg\ \ y$, а нејзиниот извод е $x\,' = \dfrac{1}{cos^2\ y}$;

Заменувајќи во врската $y' = \dfrac{1}{x'}$ и изразувајќи го изводот на функцијата во зависност од променливата $x$, се добива:

$$y' = \frac{1}{x'} = cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Овде се користи релацијата $1+\ tg^2\ y = \dfrac{1}{cos^2\ y}$ со која се изразува функцијата $cos\,y$ во зависност од функцијата $tg\,y$.

### 7. 3. Извод на функцијата $y=arcctgx$.

Изводот на функцијата $y=arcctgx$ се добива аналогно.

Инверзната функција на функцијата $y=arcctg\ x$ е $x=ctg\,y$, а нејзиниот извод е $x\,' = -\dfrac{1}{sin^2\ y}$;

Заменувајќи во врската $y' = \dfrac{1}{x'}$ и изразувајќи го изводот на функцијата во зависност од променливата $x$, се добива:

$$y\,' = \frac{1}{x'} = -\,sin^2 y\ = -\frac{1}{1+ctg^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Овде се користи релацијата $1+\ ctg^2\ y = \dfrac{1}{sin^2\ y}$ со која се изразува функцијата $sin\,y$ во зависност од функцијата $ctg\,y$.

## 8. ИЗВОД НА ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

При нараснување на променливата $x$ за $\Delta x$ функцијата $y=log_a x$ добива нараснување $\Delta y$. Нараснувањето на функцијата е:

$$\Delta y = log(x+\Delta x) - log\, x = log\,\frac{x+\Delta x}{x} = log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Количникот од нараснувањето на функцијата $y$ и нараснуваето на променливата $x$ е:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\,log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Броителот и именителот ќе ги помножиме со $x$ и ќе ја извршиме трансформацијата:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{x}\cdot\frac{1}{\Delta x}\,log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\,log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\,log\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

По заменување $\dfrac{x}{\Delta x} = u$, при што, кога $\Delta x\to 0$, $u\to\infty$, се добива:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\,log\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u},$$

па според тоа, границата е:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\lim_{u\to\infty} log\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = \frac{1}{x}\,log_a e = \frac{1}{x\,ln\,a}.$$

Според тоа, $\quad (log_a\, x)' = \dfrac{1}{x\,ln\,a}$.

Извод на функцијата $y = ln\,x$ ќе биде $y' = \dfrac{1}{x}$, бидејќи $lne=1$.

Ќе споменеме дека изводот на логаритамската функција може да се определи и врз основа на правилото за извод на инверзна функција.

## Задачи за вежбање

Да се определи изводот на следниве функции:

| | |
|---|---|
| **1)** $y = x^5 - x^2 + x + 3$; | Одг.: **1)** $y\,' = 5x^4 - 2x + 1$. |
| **2)** $y = \sqrt{x\sqrt{x}} + \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$; | **2)** $y\,' = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$. |
| **3)** $y = e^x \sin x$; | **3)** $y\,' = e^x(\sin x + \cos x)$. |
| **4)** $y = a^x\ x^4$; | **4)** $y\,' = a^x\, x^3\,(4 + x \ln a)$. |
| **5)** $y = e^x(x^2+3x+4)$; | **5)** $y\,' = e^x(x^2+5x+7)$. |
| **6)** $y = x^3 \operatorname{arctg} x$; | **6)** $y\,' = 3x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{x^3}{1+x^2}$. |
| **7)** $y = x^5 \log_4 x$; | **7)** $y\,' = 5x^4 \log_4 x + x^4 \log_4 e$. |
| **8)** $y = 2^x \operatorname{ctg} x$; | **8)** $y\,' = 2^x\left(\operatorname{ctg} x \cdot \ln 2 - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$. |
| **9)** $y = (1-x^2) \arcsin x$; | **9)** $y\,' = \sqrt{1-x^2} - 2x \arcsin x$. |
| **10)** $y = x^2 e^x \cos x$; | **10)** $y' = xe^x(2 \cos x + x\cos x - x\sin x)$. |
| **11)** $y = x \operatorname{ch} x$; | **11)** $y\,' = \operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x$. |
| **12)** $y = \frac{2x}{1-x^2}$; | **12)** $y' = \frac{2\left(1+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}$. |
| **13)** $y = \frac{\sin x}{x}$; | **13)** $y\,' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. |
| **14)** $y = \frac{\arcsin x}{1-x^2}$; | **14)** $y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + 2x \arcsin x}{\left(1-x^2\right)^2}$. |
| **15)** $y = \frac{\ln x}{x}$; | **15)** $y\,' = \frac{1-\ln x}{x^2}$. |
| **16)** $y = \frac{x^2 e^x}{1+x^2}$; | **16)** $y\,' = \frac{x(x+1)\left(x^2-x+2\right)e^x}{\left(1+x^2\right)^2}$. |

## 9. ИЗВОД НА СЛОЖЕНА ФУНКЦИЈА

Техниката за определување изводи на функциите ќе ја завршиме со правилото (постапката) за определување извод на сложена функција.

Нека е зададена сложената функција

$$y = f\,[\varphi(x)],$$

составена од функциите $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$.

Обично, *променливата x се вика **основен аргумент***, додека *променливата u е **посреден аргумент***.

Нека функциите $f(u)$ и $\varphi(x)$ се диференцијабилни по своите аргументи и ако променливата $x$ добие нараснување $\Delta x$ и посредната променлива $u$ ќе добие нараснување $\Delta u$, а функцијата $y$ ќе добие нараснување $\Delta y$.

За определување извод на функција потребно е да се одреди граница на количникот $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, кој може да се претстави во следниов вид:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

и согласно со правилото за граница на производ, се добива:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (\Delta u \to 0 \text{ кога } \Delta x \to 0).$$

Бидејќи $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = f\,'(u)$ И $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi\,'(x)$,

за извод на сложена функција ја добиваме формулата:

$$y\,' = f\,'(u)\,\varphi\,'(x) \quad \text{односно} \quad y_x' = y_u' \cdot u_x'\,.$$

Ако е

$$y = f\,(u), \quad u = \varphi\,(v), \quad v = \psi(x)\,,$$

тогаш

$$y_x' = y_u' \cdot u_v' \cdot v_x'.$$

Примената на формулите за извод на сложена функција ќе ги примениме на поголем број примери.

**Пример 1.** *Да се определи изводот на функцијата*

$$y = (1+x^4)^5.$$

Ќе замениме $u=1+x^4$, па според тоа, сложената функција ја запишуваме во следниов вид:

$$y = u^5, \qquad u=1+x^4$$

Согласно со формулата за извод на сложена функција, ќе пресметаме:

$$y_u' = 5u^4, \qquad u_x' = 4x^3,$$

и ќе замениме во формулата $y_x' = y_u' \cdot u_x'$.

Се добива: $y_x' = 5u^4 \cdot 4x^3,$

а по елиминација на посредната променлива $u$ следува:

$$y_x' = 20\, x^3\,(1+x^4)^4.$$

**Пример 2.** *Да се определи изводот на функцијата*

$$y = \sqrt{sin\, x}\,.$$

Функцијата ќе ја претставиме во вид:

$$y = \sqrt{u}\,, \quad \text{каде што} \quad u = sin\, x.$$

Ќе пресметаме: $y_u' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}, \quad u_x' = cos\, x.$

Со замена во формулата $y_x' = y_u' \cdot u_x'$ се добива:

$$y_x' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\, cos\, x,$$

а по елиминација на посредната променлива $u$: $y_x' = \dfrac{1}{2\sqrt{six}}\, cos\, x.$

**Пример 3.** *Да се определи изводот на функцијата*

$$y = ln\, \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

Аналогно на претходниот пример, ако избереме што е најзгодно, $u = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$, сложената функција ќе ја запишеме во следниов вид:

$$y = ln\, u, \quad u = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

Ќе пресметаме:

$$y_u{}' = \frac{1}{u}, \qquad u_x' = \frac{2x\left(1-x^2\right)+2x\left(1+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{4x}{\left(1-x^2\right)^2}.$$

Според тоа,

$$y_x' = y_u' \cdot u_x' = \frac{1}{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \cdot \frac{4x}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{4x}{1-x^4}.$$

**Пример 4.** *Да се определи изводот на функцијата*

$$y = sin^3 x.$$

Ако замениме $u = sinx$ сложената функцијаја ја пишуваме во вид:

$$y = u^3, \quad u = sin\, x.$$

Ќе пресметаме: $y_u' = 3u^2$, $u_x' = cos\, x$

Согласно формулата за извод на сложена функција следува:

$$y_x' = y_u' \cdot u_x' = 3u^2 \cdot cosx = 3\, sin^2x \cdot cos\, x.$$

**Пример 5.** *Да се определи изводот на функцијата*

$$y = arctg\,(x^2 + 1).$$

Ако за посредна променлива земеме $u = x^2 + 1$, сложената функција се изразува во вид:

$$y = arctg\, u, \quad u = x^2 + 1,$$

Изводот на функцијата е:

$$y' = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2 + 1}.$$

При определувањето изводи на сложени функции, никогаш не се наведува ниту видот како е функцијата изразена со посредната променлива $u$, ниту меѓу резултатите $y_u'$, $u_x'$, а најмалку формулите за извод на сложена функција. Со малку рутина се постигнува директно изнаоѓање извод на сложена функција, извршувајќи ја постапката напамет.

**Пример 6.** *Да се определи изводот на функцијата*

$$y = e^{x^2+\sin x}.$$

Само замислуваме дека видот на оваа функција е

$$y = e^u, \quad u = x^2+\sin x,$$

а се пишува само:

$$y' = e^{x^2+\sin x}(2x+\cos x).$$

**Пример 7.** *Да се определи изводот на функцијата*

$$y = \sin\frac{x+1}{\sqrt{x}}.$$

Соодносот е

$$y = \sin u, \quad u = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

и се пишува само

$$y' = \cos\frac{x+1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}-(x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}, \qquad y' = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}\cos\frac{x+1}{\sqrt{x}}.$$

**Пример 8.** *Да се определи изводот на функцијата*

$$y = \ln\sqrt{x^2+2x}.$$

Функцијата може да се замисли дека е од видот:

$$y = \ln u, \quad u = \sqrt{v}, \quad v = x^2+2x$$

и затоа за нејзиниот извод се добива:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}}\cdot(2x+2)$$

т.е.

$$y' = \frac{x+1}{x(x+2)}.$$

## Задачи за вежбање

Да се определи изводот на следниве функции:

| | |
|---|---|
| **1)** $y = (a+bx^2)^2$; | Одг : **1)** $y' = 4bx(a+bx^2)$. |
| **2)** $y = \left(a - \frac{1}{x}\right)^3$; | **2)** $y' = \frac{3(ax-1)^2}{x^4}$. |
| **3)** $y = \sqrt{a+bx}$; | **3)** $y' = \frac{b}{2\sqrt{a+bx}}$. |
| **4)** $y = \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}$; | **4)** $y' = \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{a+x}}{2\sqrt{a^2-x^2}}$ . |
| **5)** $y = \sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}$; | **5)** $y' = \frac{ab}{(a-bx)^2} \cdot \sqrt{\frac{a-bx}{a+bx}}$. |
| **6)** $y = sin 6x$; | **6)** $y' = 6\, cos\, 6x$. |
| **7)** $y = cos\,(1-x)$; | **7)** $y' = sin\,(1-x)$. |
| **8)** $y = a\, sin\, \frac{a}{x}$; | **8)** $y' = -\frac{a^2}{x^2}\, cos\, \frac{a}{x}$. |
| **9)** $y = cos\, 2x - 2\, sin\, x$; | **9)** $y' = -2(1 + 2\, sin\, x)\, cos\, x$. |
| **10)** $y = a\, tg\, \frac{a}{x}$; | **10)** $y' = -\frac{a^2}{x^2} \cdot \frac{1}{cos^2 \frac{a}{x}}$. |
| **11)** $y = arccos\,(a-x)$; | **11)** $y' = \frac{1}{\sqrt{1-(a-x)^2}}$. |
| **12)** $y = arccos\, \frac{a-x}{x}$; | . **12)** $y' = \frac{a}{x\sqrt{2ax-a^2}}$. |

| | |
|---|---|
| **13)** $y = arctg\, x + \frac{1}{3} arctg\, x^3$; | Одг.: **13)** $y' = \frac{1+x^4}{1+x^6}$. |
| **14)** $y = arctg \frac{x}{a}$; | **14)** $y' = \frac{a}{a^2 + x^2}$. |
| **15)** $y = ln\,(x^2+2x)$; | **15)** $y' = \frac{2(x+1)}{x(x+2)}$. |
| **16)** $y = ln\, \frac{x^2}{1-x^2}$; | **16)** $y' = \frac{2}{x(1-x^2)}$. |
| **17)** $y = ln\, cos\, x$; | **17)** $y' = -tg\, x$. |
| **18)** $y = e^{ax}$; | **18)** $y' = a\, e^{ax}$. |
| **19)** $y = e^{x^2}$; | **19)** $y' = 2x\; e^{x^2}$. |
| **20)** $y = e^{cosx}$; | **20)** $y' =-sin\, x\, e^{cos\, x.}$ |
| **21)** $y = e^{arctg\, x}$; | **21)** $y' = \frac{1}{1+x^2}\; e^{arctg\, x}$ |
| **22)** $y = e^{-ax}$; | **22)** $y' =-a\, e^{-ax}$. |
| **23)** $y = a^{tg\, x}$; | **23)** $y' = \frac{a^{tgx}}{cos^2 x}\; ln\, a$. |
| **24)** $y = a^{sin\, x}$; | **24)** $y' = a^{sin\, x}\, cos\, x\, ln\, a$. |
| **25)** $y = sh^2 x$; | **25)** $y = sh\, 2x$. |
| **26)** $y = sh\, \frac{x}{2} + ch\, \frac{x}{2}$; | **26)** $y' = \frac{1}{2}\left( sh\, \frac{x}{2} + ch\, \frac{x}{2} \right)$. |
| **27)** $y = sin \sqrt{\frac{1}{x}}$; | **27)** $y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}\; cos \sqrt{\frac{1}{x}}$. |
| **28)** $y = cos\, \sqrt{ax}$; | **28)** $y' = -\frac{a\, sin\sqrt{ax}}{2\sqrt{ax}}$. |
| **29)** $y = arctg\, \sqrt{ax}$; | **29)** $y' = \frac{a}{2(1+ax)\sqrt{ax}}$. |
| **30)** $y = arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; | **30)** $y' = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$. |

| | |
|---|---|
| **31)** $y = ln\, cos^2 \frac{x}{2}$; | **31)** $y' = -tg\, \frac{x}{2}$. |
| **32)** $y = e^{sin^2 x}$; | **32)** $y' = e^{sin^2 x}\ sin\, 2x$ |

## 10. ИЗВОД НА ФУНКЦИЈА ЗАДАДЕНА ВО ПАРАМЕТАРСКИ ВИД

Разгледуваме функција зададена во вид:

$$x = x(t),$$

$$y = y(t).$$

Нека функциите $x(t)$ и $y(t)$ имаат извод по параметарот $t$ и нека параметарот $t$ добие нараснување $\Delta t$. Променливите $x$ и $y$ ќе добијат соодветно нараснување $\Delta x$ и $\Delta y$:

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t), \qquad \Delta y = y(t+\Delta t) - y(t).$$

Го формираме количникот:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{x(t+\Delta t) - x(t)}.$$

Пред да ја определиме границата на количникот, броителот и именителот ќе ги поделиме со $\Delta t$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}}{\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}}.$$

Определуваме граница на количникот:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}},$$

се добива:

$$y\,' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

$\dot{x}$ е ознака за извод на променливата $x$=$x(t)$ по параметарот $t$, а $\dot{y}$ е ознака за извод на променливата $y$=$y(t)$ по параметарот $t$. Изводот е изразен во зависност од параметарот.

**Пример 1.** *Да се определи изводот на функцијата*

$$x = a\,(t+\sin t),$$

$$y = a\,(1+\cos t).$$

Ќе пресметаме:

$$\dot{x} = a\,(1+\cos t),$$

$$\dot{y} = -a\sin t.$$

Според формулата за извод на функција во параметарски вид се добива:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-a\sin t}{a(1+\cos t)} = -\frac{\sin t}{1+\cos t}.$$

**Пример 2.** *Да се определи изводот на функцијата*

$$x = a\cos^3 t,$$

$$y = a\sin^3 t.$$

Ќе пресметаме:

$$\dot{x} = -3a\cos^2 t\sin t,$$

$$\dot{y} = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Според тоа:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3a\sin^2 t\ \cos t}{-3a\cos^2 t\ \sin t} = -tg\ t.$$

## 11. ИЗВОД НА ИМПЛИЦИТНО ЗАДАДЕНА ФУНКЦИЈА

Нека функцијата $y(x)$ е зададена имплицитно со равенката

$$F(x,y) = 0 \qquad (1)$$

што значи дека е

$$F(x,y(x)) = 0 \qquad (2)$$

за секој $x \in (a,b)$, каде што интервалот $(a,b)$ е интервалот во кој функцијата $y(x)$ е дефинирана и диференцијабилна.

Применувајќи ги правилата за изводи на елементарни функции и правилото за диференцирање на сложена функција на релацијата (2), сметајќи дека непосредно зависи од $x$ и посредно преку $y$, со диференцирање по $x$ се добива релацијата:

$$\left[F\,(x,y\,(x))\right]'_x = \phi\,(x,y,y') = 0,$$

линеарна во однос на $y'$, од која лесно се добива:

$$y' = \varphi\,(x,y)\,.$$

**Пример 1.** *Да се најде изводот на функцијата* $y$ *зададена со равенката*

$$x^2 - 2xy + 3y^2 - 2y - 18 = 0.$$

Дадената равенка ќе ја диференцираме по $x$, сметајќи го $y$ за функција од $x$:

$$2x - 2y - 2xy' + 6yy' - 2y' = 0,$$

а потоа решавајќи ја добиената равенка по $y'$, се добива:

$$y' = \frac{x-y}{x-3y+1}\,.$$

## 11. РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА И НОРМАЛА

При дефинирањето извод на функција споменавме дека вредноста на изводот во дадена точка $M_0(x_0,y_0)$, која е допирна точка на кривата $y = f\,(x)$, е рамна на коефициентот на правецот на тангентата повлечена во таа точка.

Согласно со тоа, ако тргнеме од равенка на права низ една точка

$$y - y_0 = k\,(x - x_0)$$

и ако земеме $k = f\,'(x_0)$ ќе ја добиеме равенката на тангентата во вид:

$$y - y_0 = f\,'(x_0)\,(x - x_0).$$

П*равата што е нормална на тангентата, а минува низ допирната точка* $M_0$ *се вика* ***нормала на кривата во точката*** $M_0$.

Имајќи предвид дека за две нормални прави коефициентите на правците се поврзани со релацијата $k_1 k_2 = -1$, за коефициентот на нормалата се добива:

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_0)},$$

па според тоа, равенката на нормалата го има видов:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Напоменавме дека и при равенката на тангентата и при равенката на нормалата се зема вредноста на изводот во допирната точка.

Да споменеме овде и за агол меѓу две криви. *Ако се зададени равенките на кривите* $y=f_1(x)$ *и* $y=f_2(x)$ *што се сечат во точката* $x=x_0$, ***под поимот агол помеѓу кривите се подразбира аголот помеѓу тангентите повлечени на кривите во пресечната точка.***

Аголот помеѓу две криви се пресметува по формулата:

$$tg\,\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)\,f_2'(x_0)},$$

што произлегува од познатата формула од аналитичката геометрија за агол помеѓу две прави.

Ќе се задржиме конкретно на определување равенки на тангенти на конусните пресеци (кружница, елипса, хипербола и парабола) поради нивната почеста употреба.

Нека е зададена елипса со равенката:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

или во експлицитна форма ($y > 0$)

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

и точка $M_0(x_0,y_0)$. Ќе ја составиме равенката на тангентата на елипсата во точката $M_0$.

Бидејќи

$$y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

коефициентот на правецот на тангентата ќе биде:

$$k = y'_{x=x_0} = -\frac{b}{a}\frac{x_0}{\sqrt{a^2-x_0{}^2}}.$$

По заменување во равенката на тангента на кривата, координатите на допирната точка и вредноста на коефициентот на правецот, се добива:

$$y - y_0 = -\frac{b}{a}\frac{x_0}{\sqrt{a^2-x_0{}^2}}(x-x_0).$$

Кога ќе се замени $\sqrt{a^2-x_0{}^2} = \frac{ay_0}{b}$ (што следува од идентитетот $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$), равенката на тангентата го добива видот:

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0),$$

односно:

$$b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2.$$

Десната страна е рамна на $a^2b^2$, па конечно за равенката на тангентата се добива:

$$b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2.$$

Истиот вид равенка на тангента се добива и за $y < 0$.

Лесно се воочува една законормерност. Од равенката $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ се формира равенката на тангентата

$$b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2.$$

Во двата производа $xx$ и $yy$ едното $x$ се заменува со $x_0$ и едното $y$ со $y_0$, па од равенката на кривата се добива равенката на тангентата во допирната точка. Оваа законормерност важи за сите конусни пресеци. Во продолжение се дадени директно равенките на тангентите на другите криви:

| Равенка на крива | Равенка на тангента |
|---|---|
| $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ | $(x_0-p)(x-p) + (y_0-q)(y-q) = r^2$ |
| $x^2 + y^2 = r^2$ | $x_0 x + y_0 y = r^2$ |
| $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ | $b^2 x_0 x - a^2 y_0 y = a^2 b^2$ |
| $y^2 = 2px$ | $y_0 y = p(x+x_0)$ |

**Пример 1.** *Да се состави равенката на тангентата на кривата*

$$y = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 3$$

*во точката* M(2,–1).

Со оглед на врската помеѓу коефициентот на правецот на тангентата и изводот на функцијата, ќе пресметаме:

$$y' = 6x^2 - 10x + 3$$

и вредноста на изводот во допирната точка:

$$y' = 7.$$

По заменување во равенката на тангентата вредностите за $x_0=2$, $y_0=-1$ и $f'(x_0) = 7$, се добива равенката:

$$y+1 = 7(x-2),$$

или запишана во општ вид

$$7x - y - 15 = 0.$$

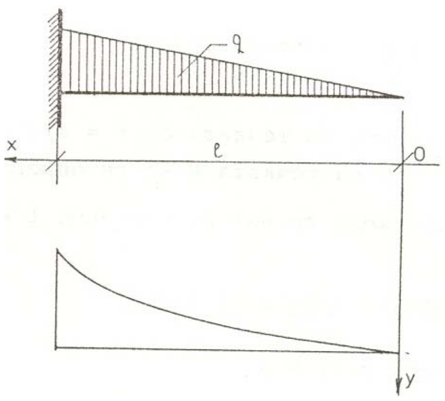
**Пример 2.** *Трансверзална сила на конзола со должина* $\ell$, *оптоварена со триаголно оптоварување* $q$ *при избор на системот каков што е прикажан на* црт.5.3, *се изразува со формулата*

$$Q = -\frac{qx^2}{2\ell}.$$

*Да се определи равенката на тангентата на линијата на трансверзалната сила во вклештувањето.*

Координатите на точката во која ќе се повлече тангентата се:

$$x_0 = \ell, \quad y_0 = Q(\ell) = -\frac{q\ell^2}{2\ell} = -\frac{q\ell}{2}.$$



Цтр. 5. 3.

Од

$$Q' = -\frac{qx}{\ell},$$

се добива дека:

$$k = Q'(\ell) = -q.$$

Според тоа, равенката на тангентата

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

се изразува во вид:

$$y + \frac{q\ell}{2} = -q(x - \ell),$$

односно

$$y = -qx + \frac{q\ell}{2}.$$

**Пример 3.** *Да се состави равенката на тангентата на циклоидата*

$$x = a(t - sint),$$

$$y = a(1 - cost)$$

*во точката* М, *за која* $t = \frac{\pi}{2}$.

Овде точката М е определена со вредноста на параметарот.

Ќе пресметаме

$$\dot{x} = a(1 - cost),$$

$$\dot{y} = a\,sin\,t,$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{sin\,t}{1 - cos\,t}.$$

Вредноста на изводот во точката М е

$$y'_{t=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Координатите на точката M ќе ги определиме од равенките на кривата кога во нив ќе замениме $t = \frac{\pi}{2}$.

Според тоа,

$$x_0 = a\,(\frac{\pi}{2} - sin\frac{\pi}{2}) = a\,(\frac{\pi}{2} - 1),$$

$$y_0 = a\,(1 - cos\frac{\pi}{2}) = a.$$

Равенката на тангентата е:

$$y - a = x - a\,(\frac{\pi}{2} - 1),$$

односно:

$$x - y = a\,(\frac{\pi}{2} - 2).$$

**Пример 4.** *На кривата* $y = 2 + x - x^2$ *да се повлече тангента паралелна со правата* $y = x + 3$.

Ќе треба да се определат координатите на допирната точка што ќе ги означиме со $x_0$ и $y_0$. Апсцисата на допирната точка ќе ја определиме од условот изводот на оваа функција во точката $x_0$ да е рамен на коефициентот на правецот на правата $y = x + 3$, т.е.

$$k = f\,'(x_0),$$

$$1 = 1 - 2\,x_0$$

од каде што се добива: $x_0 = 0$.

*Вредноста за* $y_0$ *ја добиваме од условот, допирната точка да лежи на кривата.*

По замена $x = 0$ во равенката на кривата $y = 2 + x - x^2$ се добива $y_0 = 2$.

Равенката на тангентата е:

$$y - 2 = 1 \cdot (x - 0),$$

односно

$$y - x = 2.$$

**Пример 5.** *Од точката* A(2,–2) *да се повлече тангента на параболата*

$$y = x^2 - 3x + 1.$$

Координатите на допирната точка ќе ги означиме со $x_0$ и $y_0$. Со цел да ги определиме координатите на допирната точка, ќе тргнеме од равенката на тангентата

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0),$$

односно

$$y - y_0 = (2x_0 - 3)\,(x - x_0),$$

бидејќи за дадената функција $y'_{x=x_0} = 2x_0 - 3$. Координатите на точката A ја задоволуваат равенката на тангентата, бидејќи таа минува низ точката A, па се добива:

$$-2 - y_0 = (2x_0 - 3)\,(2 - x_0).$$

Од условот допирната точка да се наоѓа на кривата следува: $y_0 = {x_0}^2 - 3x_0 + 1$.

Решението на системот равенки

$$-2 - y_0 = (2x_0 - 3)\,(2 - x_0)$$
$$y_0 = {x_0}^2 - 3x_0 + 1$$

ги дава координатите на допирната точка. Во случајов се дбиваат две решенија, две допирни точки $M_1(3,1)$ и $M_2(1,-1)$, што значи, од точката A можно е да се повлечат две тангенти на дадената парабола.

Равенките на тангентите се:

$$y - x + 8 = 0 \quad \text{и} \quad x + y = 0.$$

## 13. ДОЛЖИНА НА ТАНГЕНТА, НОРМАЛА, СУПТАНГЕНТА И СУБНОРМАЛА

Со поимите тангента и нормала, тесно се поврзани поимите наведени во насловот и сите тие се наречени допирни количини (големини).

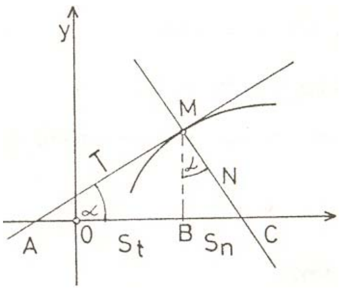
На кривата $y=f(x)$ уочуваме точка M (црт.5.4). Ќе ги наведеме дефинициите на овие поими.

*Отсечката на тангентата од допирната точка до пресечната точка со x-оската (отсечката* $\overline{\mathrm{MA}}$*) се вика* ***должина на тангентата*** (ќе ја обележиме со $T$).

*Отсечката на нормалата од допирната точка до пресечната точка со x-оската (отсечката* $\overline{\mathrm{MC}}$*) се вика* ***должина на нормалата*** (ќе ја обележиме со $N$).

*Проекцијата на должината на тангентата врз x-оската се вика* ***суптангента*** (отсечката $\overline{\mathrm{AB}}$) и се обележува со $S_t$.

*Проекцијата на должината на нормалата врз x-оската се вика* ***субнормала*** (отсечката $\overline{\mathrm{BC}}$) и се обележува со $S_n$.



Црт. 5. 4.

Вредностите на дефинираните отсечки се добиваат едноставно од црт. 5.4.

Врз основа на односите за тангенс на даден агол и Питагоровата теорема следува:

од триаголникот ABM се добива: $tg\,\alpha = \frac{y}{S_t}$, $y' = \frac{y}{S_t}$, $S_t = \left|\frac{y}{y'}\right|$;

од триаголникот MBC се добива: $tg\,\alpha = \frac{S_n}{y}$, $S_n = \left|y \cdot y'\right|$;

од триаголникот ABM се добива: $T^2 = y^2 + \mathrm{S}_t^{\,2}$;

$$T^2 = y^2 + \frac{y^2}{y'^2}, \qquad T = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}\,;$$

од триаголникот MBC се добива: $N^2 = y^2 + S_n{}^2$,

$$N^2 = y^2 + y^2 \cdot y'^2, \quad N = |y| \sqrt{1 + y'^2}\,.$$

**Пример 1.** *Да се определи должината на тангентата, нормалата, суптангентата и субнормалата на кривата*

$$y = \frac{2}{1 + x^2}$$

*во точката* $M_0(x_0, y_0)$.

Вредноста на функцијата во точката $M_0$ е : $y_0 = \dfrac{2}{1 + x_0{}^2}$ .

Вредноста на изводот во истата точка е:

$$y'_{x=x_0} = \frac{-4x_0}{\left(1 + x_0{}^2\right)^2} = -y_0^2 \cdot x_0\,.$$

Користејќи ги формулите што ги изведовме, по заменување на овие вредности се добива:

за должина на тангентата: $T = \left|\dfrac{y}{y'}\right| \sqrt{1 + y'^2} = \dfrac{1}{|x_0 y_0|} \sqrt{1 + x_0{}^2 y_0{}^4}$ ;

за должина на нормалата: $N = |y| \sqrt{1 + y'^2} = |\, y_0 \,| \sqrt{1 + x_0{}^2 y_0{}^4}$ ;

за должина на суптангентата: $S_t = \left|\dfrac{y}{y'}\right| = \left| -\dfrac{1}{x_0 y_0} \right|$;

за должина на субнормалата: $S_n = |\, y \cdot y' \,| = \left| -y_0{}^3 \cdot x_0 \right|$.

Ако наместо $x_0$ и $y_0$ во формулите замениме со $x$ и $y$, тогаш ги имаме овие големини изразени за произволна точка од кривата.

Во примеров со $S_n = \left| -y^3 \cdot x \right|$ ја изразуваме вредноста на должината на субнормалата во произволна точка на кривата.

**Пример 2.** *Да се определат вредностите на допирните количини на кривата*

$$x = a \sin^3 t,$$

$$y = a \sin^3 t,$$

*во произволна точка.*

Ќе пресметаме:

$$\dot{x} = 3a\ sin^2t\ cos\ t,$$

$$\dot{y} = -\ 3a\ cos^2t\ sin\ t,$$

$$y\ ' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -ctg\ t.$$

По заменување на вредностите на $y$ и $y'$ во формулите за допирните количини, се добива:

$$T = \left|\frac{y}{y'}\right| \sqrt{1+y'^{\,2}} = \left| -a\cos^2 t \right| = \left| -\frac{y}{\cos t} \right|,$$

$$N = |y|\ \sqrt{1+y'^{\,2}} = \left| \frac{a\cos^3 t}{\sin t} \right| = \left| \frac{y}{\sin t} \right|,$$

$$S_t = \left| \frac{y}{y'} \right| = \left| \frac{a\cos^3 t}{ctg\, t} \right| = \left| y \cdot tg\, t \right|,$$

$$S_n = |y \cdot y'| = \left| a\cos^3 t \cdot ctg\, t \right| = \left| y \cdot ctg\, t \right|.$$

## Задачи за вежбање

**1.** Да се напише равенката на тангентата и нормалата на параболата

$$y = 4x - x^2$$

во точката (2,4).

Одг.: $y = 4, \quad x = 2.$

**2.** Дадена е кривата

$$y = x^2 + 2x.$$

Да се најде равенката на тангентата и нормалата во точката $M_0(x_0,y_0)$.

Одг.: $y = 2(x_0+1)\ x - x_0{}^2,$

$$y - x_0{}^2 - 2\ x_0 = \frac{-1}{2(x_0+1)}(x - x_0).$$

**3.** Да се напише равенката на тангентата и нормалата на циклоидата

$$x = a\,(t - sint),$$

$$y = a\,(1 - cost)$$

во точката $M(\ t = \frac{3\pi}{2}\ )$.

Одг.: $2x + 2y = a\,(3\pi + 4)$, $\quad 2y - 2x + 3a\pi = 0$.

**4.** Во која точка на параболата $y = x^2 - 2x + 5$ тангентата е нормална на правата $y = x$.

Одг.: $M\left(\frac{1}{2}, \frac{17}{4}\right)$.

**5.** На кривата $y = x^2 - 1$ да се најде точка во која нормалата е паралелна на правата $y = x + 1$.

Одг.: $A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

**6.** Да се најде нормалата на кривата $x^2y = a^2(a - y)$ паралелна со правата $y = 2x$ .

Одг.: $4x - 2y - 3\,a = 0$.

**7.** Да се состави равенката на нормалата на кривата $y = x\,ln\,x$ која е паралелна со правата $x + 2y + 3 = 0$.

Одг.: $x + 2y - 3\,e = 0$.

**8.** Да се состави равенката на тангентата на кривата $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ која минува низ точката A(0,0).

Одг.: $y = x$.

**9.** Да се најде должината на тангентата, нормалата, суптангентата и субнормалата на кривата :

**а)** $y^2 = 2px$,

**б)** $y = e^x$.

Одг.: **а)** $T = \sqrt{4x^2 + 2px}$ , $N = \sqrt{2px + p^2}$ , $S_t = 2x$, $S_n = p$.

**б)** $T = \sqrt{1 + e^{2x}}$ , $N = e^x\,\sqrt{1 + e^{2x}}$ , $S_t = 1$, $S_n = e^{2x}$.

## 14. ИЗВОДИ ОД ПОВИСОК РЕД

Изводот $y\,' = f\,'(x)$ на функцијата $y = f(x)$ претставува една нова функција, која ќе ја викаме прв извод. Ако оваа нова функција е диференцијабилна со диференцирање се добива втор извод на функцијата, кој се означува со $y'' = f\,''(x)$.

Аналогно, ако функцијата се диференцира по трет пат (се диференцира $y''$), се добива трет извод на функцијата што се означува со $y'''$. Ако продолжиме со диференцирањето, при претпоставка дека постои $(n-1)$ извод, може да го добиеме и $n$-тиот извод на функцијата. Имено $n$-ти извод на функцијата е изводот на $(n-1)$ извод:

$$y^{(n)} = [\,y^{(n-1)}\,]\,'\,.$$

Определувањето на изводите од повисок ред, при зададен ред $n$ се врши по познатите правила за диференцирање.

**Пример 1.** *Да се определи* $n$-*ти извод на функцијата* $y = \sin x$.

Ќе пресметаме $y\,' = \cos x$ . Пред да диференцираме повторно, ќе замениме, согласно со идетитетот, $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$ и се добива:

$$y\,' = \sin(x+\frac{\pi}{2}).$$

Со повторно диференцирање се добива:

$$y\,'' = \cos(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2}).$$

Аналогно се добиваат и изводите:

$$y\,''' = \cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2}) = \sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$y^{\mathrm{IV}} = \cos(x+3\cdot\frac{\pi}{2}) = \sin(x+4\cdot\frac{\pi}{2}).$$

Врз основа на првите четири изводи на функцијата $y = \sin x$, констатираме дека:

$$y^{(n)} = \sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}).$$

Нека е зададена кривата со равенки во параметарски вид:

$$x = x\,(t),$$

$$y = y(t)$$

и нека во разгледуваната точка $t$ функциите $x(t)$ и $y(t)$ имаат прв и втор извод по параметарот $t$, при што $\dot{x}\,(t) \neq 0$. Ако функцијата $x(t)$ има непрекината инверзна функција $t$=$t(x)$, тогаш е

$$y_x'' = \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)'_x = \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)'_t \cdot t'_x = \frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\dot{x}^2} \cdot \frac{1}{\dot{x}} =$$

$$= \frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\dot{x}^3},$$

бидејќи за инверзни функции важи равенството $t'_x = \frac{1}{\dot{x}}$.

Аналогно, може да се најдат и изводите од повисок ред за функција зададена со параметарски равенки.

**Пример 2.** *Да се определи вториот извод* $y_x''$ *на функцијата зададена со параметарските равенки*

$$x = \ln t,$$

$$y = \sin 2t$$

*и да се определи вредноста на тој извод во точката за* $t = \frac{\pi}{2}$.

Ќе ги најдеме изводите од прв и втор ред на функциите $x$ и $y$ по параметарот $t$:

$$\dot{x} = \frac{1}{t}, \qquad \dot{y} = 2\cos 2t; \qquad \ddot{x} = -\frac{1}{t^2}, \qquad \ddot{y} = -4\sin 2t\,.$$

Заменувајќи во формулата за $y_x''$ се добива:

$$y_x'' = \frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\dot{x}^3} = \frac{-4\sin 2t \cdot \frac{1}{t} - \left(-\frac{1}{t^2}\right) \cdot 2\cos 2t}{\frac{1}{t^3}} =$$

$$= -4t^2 \sin 2t + 2t \cos 2t = 2t(\cos 2t - 2t \sin 2t).$$

$$y''\,(t = \frac{\pi}{2}) = -\,\pi.$$

## Задачи за вежбање

Да се најдат изводите од означениот ред за следниве функции:

| | |
|---|---|
| **1)** $y = \sin^2 x, \quad y'' = ?$ | Одг.: **1)** $y'' = 2\cos 2x.$ |
| **2)** $y = x \ln x, \quad y'' = ?$ | **2)** $y'' = \frac{1}{x}.$ |
| **3)** $y = \sqrt{x}, \quad y^{(10)} = ?$ | **3)** $y^{(10)} = \frac{17\,!!}{2^{10} x^9 \sqrt{x}}.$ |
| **4)** $y = x^n \;, \quad y^{(n)} = ?$ | **4)** $y^{(n)} = n\,!\,.$ |
| **5)** $y = e^x \cos x \;, \quad y^{(n)} = ?$ | **5)** $y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$ |
| **6)** $y = a^x, \quad y^{(n)} = ?$ | **6)** $y^{(n)} = a^x (\ln a)^n.$ |
| **7)** $y = \ln x, \quad y^{(n)} = ?$ | **7)** $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$ |
| **8)** $y = \sin^2 x, \quad y^{(n)} = ?$ | **8)** $y^{(n)} = -\,2^{n-1} \cdot \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right).$ |
| **9)** $y = e^{-\frac{x}{a}} \;, \quad y^{(n)} = ?$ | **9)** $y^{(n)} = \left(-\frac{1}{a}\right)^n \cdot e^{-\frac{x}{a}}.$ |

**10)** Да се најде $y_x''$ за функциите зададени со параметарските равенки:

**а)** $x = a\,(\sin t - t\cos t),$

$y = a\,(\cos t + t\sin t).$

Одг.: $y_x'' = -\frac{1}{at\sin^3 t}.$

**б)** $x = \arccos\sqrt{t}\,,$

$y = \sqrt{t - t^2}\,.$

Одг.: $y_x'' = -4\sqrt{t - t^2}\,.$

# 15. ДИФЕРЕНЦИЈАЛ НА ФУНКЦИЈА

Поимот диференцијал на функција е во тесна врска со поимот извод на функција.

## 15. 1. Поим за диференцијал

Ако непрекинатата функција $y=f(x)$ во произволна точка $x$ има извод $f'(x)$, тогаш е

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Врз основа на тоа што е кажано за гранична вредност на функција ( гл. IV, **т.6**, **теорема 4**), следува:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)+\alpha, \qquad \alpha=\alpha(\Delta x)$$

каде што $\alpha\to 0$, кога $\Delta x\to 0$ или

$$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x \tag{1}$$

т.е. нараснувањето на функцијата $\Delta y$ претставува сума од два собирци, од кои првиот е пропорционален со $\Delta x$, т.е. го претставува, како што се вика, линеарниот дел од нараснувањето на функцијата, а вториот собирок зависи од $\Delta x$ на посложен начин (променливата $\alpha$ зависи од $\Delta x$). Кога $\Delta x\to 0$ двата собирока се бесконечно мали големини.

Бидејќи

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{f'(x)\cdot\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{f'(x)} = 0,$$

значи дека бесконечно малата големина $\alpha\cdot\Delta x$ е од повисок ред во однос на бесконечно малата големина $f'(x)\cdot\Delta x$. Затоа, *првиот собирок во десната страна на формулата* (1) *се вика* ***главен линеарен дел на нараснувањето на функцијата.***

*Главниот дел на нараснувањето на функцијата, рамен на производот од изводот на функцијата и нараснувањето на независно променливата, се вика* ***диференцијал на функцијата*** $f(x)$ *и се означува со симболот* $dy$ *или* $d\,f(x)$, т.е.

$$dy = f\,'(x)\cdot\Delta x.$$

Ако е $y = x$, тогаш

$$dy = (x)'\cdot\Delta x$$

или

$$d(x) = \Delta x,$$

т.е. $dx = \Delta x$, што значи дека: *диференцијалот на аргументот е рамен на нараснувањето на аргументот*. Затоа пишуваме

$$dy = f\,'(x)\cdot dx \qquad (2)$$

и можеме да кажеме: ***диференцијал на функцијата*** $y=f(x)$ *е производот од изводот на функцијата* $f\,'(x)$ *и диференцијалот на независно променливата* $dx$.

Од (2) следува:

$$\frac{dy}{dx} = f\,'(x)$$

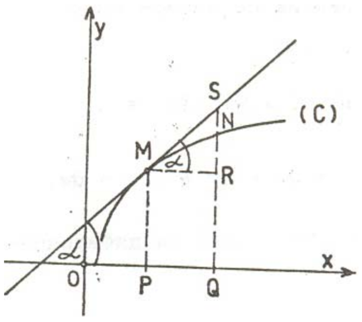
и затоа изводот на функцијата се вика уште и диференцијален количник, т.е. количник од диференцијалот на функцијата и диференцијалот на независно променливата.

## 15. 2. Геометриско значење на диференцијал

Овде ќе покажеме што е геометриското значење на диференцијалот.

Нека кривата $(C)$ е график на функцијата $y=f(x)$. Избираме една точка $M(x,y)$ на таа крива во која функцијата има извод. Ќе повлечеме тангента на кривата $(C)$ во точката M и со $\alpha$ го означуваме аголот што го гради таа тангента со $x$-оската. Познато ни е дека $f\,'(x) = tg\,\alpha$ (црт. 5. 5).

Нека $x$ добие некое нараснување $\Delta x$, кое на цртежот е претставено со отсечката $\overline{PQ} = \overline{MR}$, тогаш ординатата на точката M на кривата ќе добие нараснување $\overline{RN} = \Delta y$, а ординатата на точката M на тангентата нараснување $\overline{RS}$. Аголот SMR е еднаков на аголот $\alpha$.



Црт. 5. 5.

Од триаголникот MRS имаме:

$$\overline{RS} = \overline{MR}\ \mathrm{tg}\,\alpha,$$

но $\overline{MR} = \Delta x$, а $tg\,\alpha = f\,'(x)$,

тогаш:

$$\overline{RS} = f\,'(x)\cdot\Delta x.$$

Бидејќи, $f\,'(x)\cdot\Delta x = dy$,

следува:

$$\overline{RS} = dy.$$

Според тоа, диференцијалот на функцијата $y=f(x)$ во точката M се претставува со отсечката $\overline{RS}$, а нараснувањето на функцијата со отсечката $\overline{RN}$.

Со други зборови, ***диференцијалот на функцијата*** *е нараснување на ординатата на точката на тангентата повлечена во точката* M *на кривата, а* $\Delta y$ *претставува нараснување на ординатата на точката на кривата, кога аргументот ќе добие нараснување* $\Delta x$.

## 15. 3. Својства на диференцијал

Од формулата $dy= f\,'(x)\,dx$ за пресметување диференцијал на функцијата $y=f(x)$ следува дека сите својства на изводите може да се применат и на диференцијалот.

**$1^0$** *Ако C е константа, тогаш*

$$dC = (C)\,'\,dx = 0 \cdot dx = 0,$$

*т.е.* ***диференцијалот од константа е рамен на нула***.

**$2^0$** *Од*

$$d\,[C\,f(x)] = [C\cdot f(x)]'\cdot dx = C\cdot f'(x)\cdot dx = C\cdot dy$$

*следува дека* ***констaнтниот множител може да се изнесе пред знакот на диференцијалот.***

### $3^0$ *Диференцијал од сума на функции*

$$d\,(u + v + \ldots +w) = (u + v + \ldots +w)'\cdot dx =$$

$$= u'dx +v'dx + \ldots + w'\,dx = du + dv + \ldots + dw.$$

т.е. *диференцијалот од сума е рамен на сумата од диференцијалите на одделните функции.*

### $4^0$ *Диференцијал од производ на функции*

$$d(u\cdot v) = (u\cdot v)'\,dx = (\,u'\,v + u\,v'\,)\,dx = v\cdot du + u\cdot dv.$$

### $5^0$ *Диференцијал од количник на функции*

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v-uv'}{v^2}\,dx = \frac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2}.$$

### $6^0$ *Диференцијал од сложена функција*

За сложената функција $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, имаме:

$$y' = f'(u)\,\varphi'(x)$$

и диференцијалот е:

$$dy = y'dx = f'(u)\cdot\varphi'(x)\,dx = f'(u)\,du. \qquad (\varphi'(x)\,dx=du)$$

Оттука следува дека *диференцијалот на функцијата $y=f(u)$ задржува ист облик независно од тоа дали $u$ е посреден аргумент или основен аргумент.*

## 15. 4. Примена на диференцијалот во приближни пресметувања

Според воведеното означување на диференцијалот (2), равенството (1) може да се запише во вид:

$$\Delta y = dy + \alpha\,\Delta x.$$

Со споредување на нараснувањето $\Delta y$ и диференцијалот $dy$, се добива:

$$\frac{\Delta y}{dy}=\frac{f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x}{f'(x)\cdot\Delta x}=1+\frac{\alpha}{f'(x)}, \qquad f'(x)\neq 0$$

затоа

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=1,$$

*т.е.* $\Delta y$ *и* $dy$ *се еквивалентни бескрајно мали големини кога* $\Delta x$ *е бескрајно мала големина.* На тоа се базира примената на диференцијалот за приближни пресметувања.

Нараснувањето $\Delta y$ на функцијата се заменува со диференцијалот $dy$ на функцијата. Обично нараснувањето на функцијата е сложен израз, па со оглед на тоа дека за мали нараснувања $\Delta x$ на аргументот, $\Delta y \approx dy$, тоа се заменува со диференцијалот, кој полесно се пресметува отколку нараснувањето.

Од

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx dy,$$

се добива:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,dx. \tag{3}$$

За избрана вредност на аргументот $x$ со оваа релација ќе може лесно да се пресметаат вредностите на функцијата за вредности $x+\Delta x$ (во околината на $x$)

**Пример 1.** *Зададена е функцијата* $y=\sqrt{x}$ .

Ќе ја примениме горната врска врз оваа функција. Бидејќи

$$f(x+\Delta x)=\sqrt{x+\Delta x},\ f(x)=\sqrt{x},\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

се добива:

$$\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\Delta x.$$

Ако избереме дека $x=1$, се добива:

$$\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot \Delta x.$$

Од изведената формула можеме да пресметуваме квадратен корен од вредности што се блиски до 1.

Ако замениме:

за $\Delta x = 0{,}3$, се добива: $\sqrt{1{,}3} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot 0,3$; $\sqrt{1{,}3} \approx 1{,}15$;

за $\Delta x = 0{,}5$, се добива: $\sqrt{1{,}5} \approx 1{,}05$;

за $\Delta x = -0{,}1$, се добива: $\sqrt{0{,}9} \approx 0{,}95$.

Од горната врска, ако избереме дека $x = 4$, формираме формула за приближно пресметување на квадратен корен од вредности блиски до 4.

Формулата го добива видот:

$$\sqrt{4+\Delta x} \approx 2 + \frac{1}{4}\cdot \Delta x.$$

Ако е потребно да пресметаме $\sqrt{4{,}3}$ во формулата ќе замениме $\Delta x=0{,}3$, па се добива: $\sqrt{4{,}3} \approx 2{,}075$.

**Пример 2.** *Ќе ја разгледаме функцијата* $y = \sin x$.

За оваа функција

$$f(x+\Delta x) = \sin(x+\Delta x), \quad f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x,$$

па се добива:

$$\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x\cdot \Delta x.$$

Ако избереме $x = 30^0$, ($\Delta x$ го означуваме со $h$), се добива:

$$\sin(30^0 + h) \approx \sin 30^0 + \cos 30^0\cdot h,$$

односно:

$$\sin(30^0 + h) \approx 0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot h.$$

Добиената формула ќе се користи за пресметување на вредностите на функцијата $\sin x$ за вредности на аголот околу $30^0$.

За $h = 0{,}017$ (што одговара на вредност од $1^0$ ), се добива:

$$sin\,31^0 \approx 0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}017 = 0{,}5151.$$

Со оваа формула ќе можат да се пресметаат со доволна точност вредностите на функцијата $y=sin\ x$, за агли во интервалот од $25^0$ до $35^0$.

За пресметтување на вредностите на оваа функција за агли во близина на $45\ ^0$ , ќе се замени $x = 45\ ^0$, па се добива:

$$sin\,(\,45^0 + h\,) \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot h.$$

**Пример 3.** *Колкава е приближната промена на страната на квадратот, ако неговата плоштина се зголеми од* $9\ m^2$ *на* $9{,}1\ m^2$.

Ако со $x$ ја обележиме плоштината на квадратот, а со $y$ неговата страна, ќе имаме:

$$x = y^2 \quad \text{т.е.} \quad y = \sqrt{x}\,.$$

За да ја најдеме приближната промена на страната $y$, ќе се користиме со приближното равенство

$$\Delta y \approx dy,$$

па имаме:

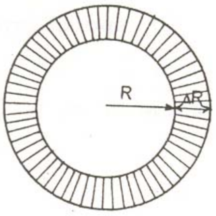
$$\Delta y \approx dy = y\,'\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx = \frac{0{,}1}{2\sqrt{9}} = 0{,}016.$$

**Пример 4.** *Даден е круг со радиус* $R$. *Да се искаже геометриски, што значи заменување на нараснувањето на плоштината на кругот со неговиот диференцијал.*

Бидејќи $P = \pi R^2$, тогаш ако $R$ добие нараснување $\Delta R$ ($\Delta R{=}dR$), се добива:

$$\Delta P = \pi\,(R{+}\Delta R)^2 - \pi R^2 = 2\pi R \cdot \Delta R + \pi\,(\Delta R)^2.$$

Вредноста на $\Delta P$ геометриски претставува плоштина на кружен прстен, ограничен со кружниците со радиуси $R$ и $R{+}\Delta R$ (црт.5.6).



Црт. 5. 6.

Вредноста на диференци-јалот е

$$dP = 2\pi R \cdot dR$$

или

$$dP = 2\pi R \cdot \Delta R,$$

(бидејќи $P'=2\pi R$ ). Вредноста на $dP$ геометриски претставува плоштина на правоаголник со должина $2\pi R$ и ширина $\Delta R$ (црт.5.7). За мали вредности на $\Delta R$, (бидејќи $\Delta P \approx dP$) плоштината на кружниот прстен може приближно да се замени со плотината на правоаголникот.

Црт. 5. 7.

## 15. 5. Диференцијали од повисок ред

Во **точката 15.1** наведовме дека производот на изводот на функцијата $y = f(x)$ и диференцијалот на независно променливата е диференцијал на функцијата ($dy = f'(x)dx$), ќе го викаме ***диференцијал од прв ред***.

*По дефиниција диференцијал од диференцијалот од прв ред се вика* ***диференцијал од втор ред*** *и се означува со* $d^2y$.

Според тоа,

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)\,dx) = (f'(x)\,dx)'\,dx = f''(x)\,dx^2.$$

Аналогно, се дефинира диференцијал од трет ред како диференцијал од диференцијалот од втор ред, итн., диференцијал од $n$-ти ред е диференцијал од диференцијалот од ($n$–1) ред, и тие се означуваат со:

$$d^3 y = d\,(d^2 y) = d\,(f''(x)\,dx^2) = (f''(x)\,dx^2)'\,dx = f'''(x)\,dx^3,$$

$$\vdots$$

$$d^n y = d\,(d^{n-1} y) = d\,(f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1}) =$$

$$= (f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1})'\,dx = f^{(n)}(x)\,dx^n\,.$$

Од ознаките на диференцијалите, се добиваат следниве ознаки за изводите на функцијата:

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2},$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Често се користи и следнава симболика:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}(y).$$

На пример $\frac{d}{dx}(2x^4+1)$ е ознака за прв извод на функцијата $y = x^4 + 1$.

## Задачи за вежбање

**1.** Да се најде диференцијал на функциите:

**а)** $y = \frac{a}{x} + arctg\,\frac{x}{a}$; Одг.: **а)** $dy = -\frac{a^3}{x^2\left(a^2+x^2\right)}dx$

**б)** $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **б)** $dy = \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

**2.** Да се пресмета приближно вредноста на :

**а)** $tg\, 45^{0}4'$; Одг.: **а)** 1, 0023.

**б)** $sin\, 60^{0}3'$; **б)** 0, 86643.

**в)** $arctg\, 0{,}97$; **в)** 0, 770.

**г)** $\sqrt{\dfrac{1{,}004}{0{,}996}}$; **г)** 1, 004

**3.** Да се пресмета точното и приближното нараснување на плоштината на кругот со радиус $r=2m$, кога радиусот ќе се зголеми за $0{,}1m$.

Одг.: $\Delta P = 0,\ 41\ \pi$, $dP = 0,\ 4\ \pi$,

**4.** Да се најдат означените диференцијали на функциите:

**а)** $y = x^5$; $d^{5}y = ?$ Одг.: **а)** $d^{5}y = 120\, dx^5$.

**б)** $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $d^{3}y = ?$ **б)** $d^{3}y = -\dfrac{15\,dx^3}{8x^2\sqrt{x}}$.

**в)** $y = e^x ln\, x$. $d^{4}y = ?$ **в)** $d^{4}y = e^x\left(ln\, x + \dfrac{4}{x} - \dfrac{6}{x^2} + \dfrac{8}{x^3} - \dfrac{6}{x^4}\right)\cdot dx^4$.

**г)** Да се најде вредноста на диференцијалот од втор ред за $t=1$ за функцијата зададена со параметарските равенки:

$$x = arctg\ t,$$

$$y = ln\,(1+t^{2}).$$

Одг.: $d^{2}y = 4dx^{2}$.

## ГЛАВА VI

# ПРИМЕНА НА ИЗВОДИ

Од многукратната примена на изводите, ќе се задржиме на нивната примена во проучувањето на својствата на функциите. Во основа на тоа проучување спаѓаат неколку теореми и формули што ја чинат групата основни теореми на диференцијалното сметање. Претходно ќе се задржиме на Роловата, Лагранжовата, Кошиевата теорема како и на Тајлоровата формула и со нивна помош ќе ги извршиме проучувањата на својствата на функциите.

## 1. РОЛОВА ТЕОРЕМА

*Ако функцијата* $y=f(x)$ *е непрекината во сегментот* $[a,b]$, *диференцијабилна во сите точки од интервалот* $(a,b)$ *и ако* $f(a)=f(b)$, *тогаш во интервалот* $(a,b)$ *постои барем една точка* $x=\xi$ $(a<\xi<b)$ *во која изводот* $f'(\xi)$ *е рамен на нула*, ( $f'(\xi)=0$ ).

За да ја докажеме теоремата ќе постапиме по следниов начин: ќе разликуваме два случаја:

**1)** ако функцијата има константна вредност во сегментот $[a,b]$, тогаш изводот во секоја точка е рамен на нула. Овој случај не претставува посебен интерес;

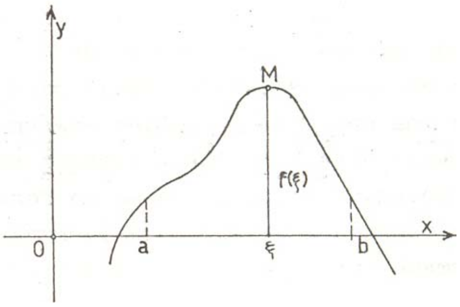
**2)** бидејќи функцијата е непрекината во сегментот $[a,b]$, таа достигнува максимална или минимална вредност барем во една точка од тој интервал. Нека, на пример, во сегментот $[a,b]$ разгледуваната функција има максимална вредност што ќе ја означиме со $M$ и нека $M>0$ (црт. 6.1). Таа вредност функцијата нека ја прими за $x=\xi$, $\xi\in(a,b)$, т.е. $f(\xi) = M$.

Бидејќи $f(\xi)=M$, тогаш $f(\xi+\Delta x) - f(\xi) \leq 0$ и за позитивно и за негативно $\Delta x$.

Количникот

$$\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leq 0 \qquad \text{за} \qquad \Delta x > 0$$

$$\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geq 0 \qquad \text{за} \qquad \Delta x < 0.$$



Црт. 6. 1.

Во точката $x=\xi$ постои извод, по претпоставка во теоремата, па преминувајќи на граница кога $\Delta x\to 0$, се добива:

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}=f_+^{'}(\xi)\leq 0\,,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}=f_-^{'}(\xi)\geq 0\,.$$

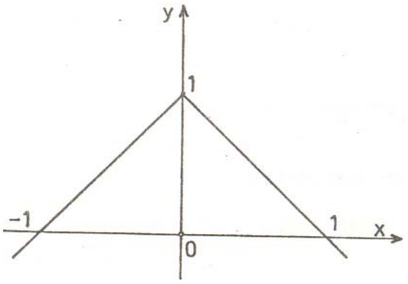
Од диференцијабилноста на функцијата на интервалот $(a,b)$ следува дека

$$f_+^{'}(\xi)=f_-^{'}(\xi)=f'(\xi)=0.$$

Со доказот на теоремата покажавме дека во точката од сегментот $[a,b]$ во која функцијата добива максимална или минимална вредност, изводот на функцијата е рамен на нула. Со ова констатираме дека во сегментот $[a,b]$ постои точка, а тоа е всушност точка на максимум односно минимум во која тангентата е паралелна со $x$-оската.

Роловата теорема важи само за функциите кои ги задоволуваат наведените услови. Ако барем еден од условите не е задоволен, не мора да биде $f'(\xi)=0$ за некоја точка од интервалот.

На пример, за функцијата $y = 1-|x|$ што се разгледува во интервалот $[-1,1]$ претставена на црт.6.2, изводот во ниедна точка не е рамен на нула. Функцијата за $x=0$ има максимална вредност, но нема определена вредност на изводот (не е диференцијабилна во точката $x=0$).



Црт. 6. 2.

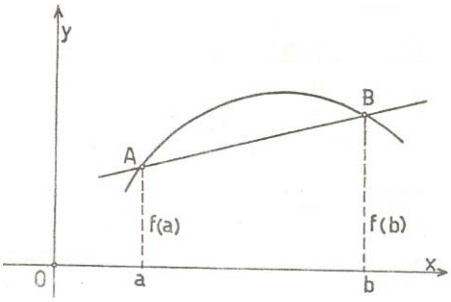
## 2. ЛАГРАНЖОВА ТЕОРЕМА

*Ако функцијата* $y=f(x)$ *е непрекината во сегментот* $[a,b]$, *диференцијабилна во секоја точка од интервалот* $(a,b)$, *тогаш постои барем една точка* $\xi\in(a,b)$ *таква што да важи равенството*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \qquad a<\xi<b. \tag{1}$$

*Равенството* (1) *е познато под името* ***Лагранжова формула***.

Во однос на Декартовиот координатен систем во сегментот $[a,b]$ разгледуваме крива $y=f(x)$ (црт.6.3).



Црт. 6. 3.

Низ точките A$(a, f(a))$ и B$(b, f(b))$ чии апсциси се крајните точки на споменатиот интервал, повлекуваме права ($\ell$). Равенката на таа права (права низ две точки)

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

ќе се изрази во следниов вид:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),$$

за која ќе ја воведеме ознаката $y = \ell(x)$.

Ќе формираме една нова функција со ознака $F(x)$:

$$F(x) = f(x) - \ell(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

Новата функција $F(x)$ е исто диференцијабилна (како разлика на две диференцијабилни функции), освен тоа, вредноста на новата функција во крајните точки на интервалот $[a,b]$ е нула, т.е. $F(a)=0$, $F(b)=0$, што лесно може да се провери ако во функцијата $F(x)$ се замени $x=a$, односно $x=b$.

Според тоа, новата функција $F(x)$ ги задоволува условите на Роловата теорема, па од тоа следува дека постои барем една точка $x=\xi$ од интервалот $[a,b]$ за која ќе биде $f'(\xi)=0$.

Определувајќи го изводот на функцијата $F(x)$:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

и изедначувајќи го со нула за $x=\xi$, се добива:

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Оттука следува дека навистина

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Да дадеме и геометриска интерпретација на Лагранжовата теорема.

Бидејќи $f'(\xi)$ е аголниот коефициент на тангентата кон кривата во точката $x=\xi$, а $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ е аголниот коефициент на тетивата низ точките A и B, со Лагранжовата теорема се тврди

дека на лакот AB од кривата $y=f(x)$ постои барем една точка во која тангентата е паралелна со тетивата што ги сврзува крајните точки од лакот. Доколку барем еден од наведените услови за функцијата $y=f(x)$ не е исполнет, Лагранжовата теорема не важи.

Оваа теорема, често се пишува и во друга форма. Се зема почетокот на интервалот да биде означен со $x$, крајната точка со $x+h$ ($h$-должина на интервалот), а една произволна точка од тој интервал се означува во вид $x+\theta h$, каде што $\theta$ е еден број со вредност од 0 до 1 ($0<\theta<1$).

По замена на овие вредности, се добива Лагранжовата теорема во вид:

$$f(x+h)-f(x)=h\cdot f'(x+\theta h),\quad 0<\theta<1,$$

или во вид:

$$\Delta y=\Delta x\cdot f'(x+\theta\cdot\Delta x).$$

*Лагранжовата теорема често се вика и* ***теорема за конечно нараснување на функцијата*** *или* ***теорема за средна вредност*** (*во диференцијалното сметање*).

## 3. КОШИЕВА ТЕОРЕМА

*Ако функциите* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *се непрекинати на сегментот* $[a,b]$, *диференцијабилни на интервалот* $(a,b)$, *и* $\varphi'(x)\neq 0$ *во интервалот* $(a,b)$, *тогаш постои барем една точка* $\xi$, $a<\xi<b$, *таква што да важи*:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}\ .$$

Пред да поминеме на доказот на теоремата, во почетокот ќе докажеме дека $\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0$. Ако $\varphi(b)-\varphi(a)=0$, т.е. $\varphi(b)=\varphi(a)$, тогаш според теоремата на Рол, за функцијата $\varphi(x)$ може да се најде точка $\eta$, $a<\eta<b$, во која $\varphi'(\eta)=0$, а тоа е спротивно на претпоставката дека е $\varphi'(x)\neq 0$ во интервалот $(a,b)$.

За да ја докажеме теоремата на Коши, ќе ја разгледаме помошната функција

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\left[\varphi(x)-\varphi(a)\right].$$

Оваа функција на сегментот $[a,b]$ ги задоволува условите на теоремата на Рол, т.е. непрекината е на сегментот $[a,b]$, диференцијабилна на интервалот $(a,b)$ и $F(a)=0$, $F(b)=0$, т.е. $F(a)=F(b)$. Според теоремата на Рол, за функцијата $F(x)$ постои точка $\xi$, $a<\xi<b$, таква што $F'(\xi)=0$.

Бидејќи

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x),$$

за $x=\xi$ се добива:

$$F'(\xi)=0=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(\xi),$$

Бидејќи $\varphi'(\xi)\neq 0$, следува:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Со тоа теоремата е докажана.

## 4. ПРИВИДНО НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИЗРАЗИ. ЛОПИТАЛОВО ПРАВИЛО

Разгледуваме функција $F(x)=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$. Ако за $x=x_0$ е $f(x_0)=0$, $\varphi(x_0)=0$, функцијата $F(x)$ за $x=x_0$ добива неопределена вредност $\dfrac{0}{0}$ $\left(F(x_0)=\dfrac{0}{0}\right)$. *Во ваков случај, по дефиниција за вредност на* *функцијата* $F(x)$ *за* $x=x_0$, *се зема вредноста на границата на функцијата* $F(x)$ *кога* $x\to x_0$, *имено*

$$F(x_0) = \lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

Согласно изведената дефиниција, ќе кажеме дека вредноста на функцијата $F(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ за $x=0$ е 1.

*За определување на границата* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ (*ако функциите* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *стануваат рамни на нула за* $x=x_0$), *се користиме со* ***Лопиталовото правило***, кое се искажува на следниов начин:

*Нека* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *се непрекинати функции на сегментот* $[a,b]$, *диференцијабилни на интервалот* $(a,b)$ *и за* $x_0 \in (a,b)$, *нека е* $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$ *и* $\varphi'(x) \neq 0$, $(x_0 \in (a,b))$, *тогаш ако постои*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

*постои и*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

*и притоа*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{1}$$

Навистина, од теоремата на Коши имаме:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \qquad x_0 < \xi < x.$$

Од претпоставката дека $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$ следува:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{2}$$

Бидејќи кога $x\to x_0$ и $\xi\to x_0$ , границата на односот $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ е иста со границата на односот $\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$, а од (2) следува:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Со тоа теоремата е докажана.

Се покажува дека ова правило важи и во случај, независно променливата да клони кон бескрајност, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Ако $f'(x_0) = 0$ и $\varphi'(x_0) = 0$ , тогаш повторно се применува Лопиталовото правило, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} .$$

Понекогаш Лопиталовото правило се применува дотогаш додека се најде граничната вредност (доколку таа постои).

Покрај наведениот неопределен вид $\frac{0}{0}$, во кој може да се појави една функција за некоја конечна вредност на $x$ или кога $x\to\infty$ таа може да се појави уште и во следниве неопределени видови:

$$\frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty .$$

Во сиве овие случаи може да се примени Лопиталовото правило направо на функцијата или по извршување на некои трансформации на кои укажуваме подолу.

Ако функцијата што ја разгледуваме е од вид $F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и ако за $x=x_0$ (или $x\to\infty$) е $f(x_0) = \infty$ , $\varphi(x_0) = \infty$, таа ќе се јави во вид $\frac{\infty}{\infty}$. Во овој случај Лопиталовото правило се применува директно на функцијата.

Ако функцијата што ја разгледуваме е од вид $F(x)=f(x)\cdot\varphi(x)$ и за $x=x_0$ (или $x\to\infty$) е $f(x_0)=0$, $\varphi(x_0)=\infty$ таа ќе се јави во неопределен вид $0\cdot\infty$. Во овој случај функцијата $F(x)$ ќе ја изразиме во вид:

$$F(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}} \qquad \text{или} \qquad F(x)=\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}},$$

па потоа се применува Лопиталовото правило. Функцијата $F(x)$ изразена во ваков вид се јавува во неопределен вид $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Ако функцијата што ја разгледуваме е од вид $F(x)=f(x)-\varphi(x)$ и за $x=x_0$ (или $x\to\infty$) е $f(x_0)=\infty$, $\varphi(x_0)=\infty$ таа ќе се јави во неопределениот вид $\infty-\infty$. Во овој случај потребно е функцијата на некој начин да се преуреди, за да се јави во еден од претходно разгледаните видови $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ или $0\cdot\infty$), па потоа да се примени Лопиталовото правило.

За функцијата $F(x)$ што ќе се јави во еден од неопределените видови $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$ се определува логаритам на таа функција.

Со тоа се добива неопределен израз од вид $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ или $0\cdot\infty$. Вредноста на $\ln F(x)$ за $x=x_0$ се добива со примена на Лопиталовото правило.

Ако

$$\lim_{x\to x_0}\ln F(x)=A,$$

тогаш

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=e^A.$$

**Пример 1.** *Да се определи граничната вредност*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}.$$

За $x=0$, добиваме дека вредноста на оваа функција е неопределена од вид $\frac{0}{0}$.

Согласно со Лопиталовото правило, добиваме:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

За вредност на функцијата $\frac{e^{2x}-1}{\sin x}$ за $x=0$ ќе земеме, согласно со дефиницијата, дека е $2$.

**Пример 2.** *Да се определи вредноста на функцијата* $F(x)=x^2 lnx$ за $x=0$.

За $x=0$ вредноста на функцијата се јавува во вид $0\cdot\infty$. За да ја определиме вредноста на функцијата $F(x)$ за $x=0$ ќе ја определиме границата на $F(x)$ кога $x\to 0$ изразувајќи ја во вид:

$$F(x) = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}.$$

Со примена на Лопиталовото правило се добива:

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

Според тоа вредноста на функцијата за $x=0$ ќе земеме дека е $0$.

**Пример 3.** *Да се определи граничната вредност*

$$\lim_{x\to 0} x^x$$

Функцијата $F(x)=x^x$ за $x=0$, добива неопределена вредност $0^0$.

Ќе пресметаме

$$\ln F(x) = \ln x^x = x\ lnx.$$

Функцијата $\ln F(x)$ за $x=0$, добива неопределен вид $0\cdot\infty$, па според тоа,

$$\lim_{x\to 0}\ln F(x) = \lim_{x\to 0} x\ lnx = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0,$$

од каде што следува:

$$\lim_{x\to 0} F(x) = e^0 = 1.$$

## 5. ТАЈЛОРОВА ФОРМУЛА

Во примена, често пати, се јавува потреба да се пресмата една или повеќе вредности на некоја функција $y=f(x)$ за избрани вредности на аргументот. При разгледувањето на основните елементарни функции, ние намерно избираме само некои вредности на независно променливата за кои можеме да ја пресметаме вредноста на функцијата, поради тешкотиите на кои наидуваме при пресметувањето на вредностите на функцијата за кои и да било вредности на аргументот. (На пример, при формирањето табела на вредности за функцијата $y=sinx$, избираме вредности на аргументот $30^0$, $60^0$, $45^0$, но не $47^0$, $32^0$, $63^0$ итн.).

За да се олесни пресметувањето на вредностите на функциите што често се користат, подготвени се таблици (за тригонометриските функции, за логаритамската функција и други), од кои на многу лесен начин се наоѓаат вредностите на функциите зададени со таблица.

Полиномите се сметаат за наједноставни функции. Вредности на полиномите за дадена вредност на променливата $x$ се пресметуваат само со извршување на трите основни аритметички операции, (собирање, вадење, множење). Затоа од големо теоретско и практично значење е Тајлоровата формула, со која е покажана постапката за претставување (изразување) на една произволна (трансцендентна) функција приближно со полином. На тој начин е создадена можност вредностите на произволна функција да се пресметуваат со соодветниот полином со кој функцијата приближно е претставена, што во голема мера го олеснува пресметувањето, а во повеќе случаи е единствено можно на овој начин.

Ако функцијата $f(x)$ се замени со полином по степени од $x-x_0$ од $n$-ти ред:

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

и $\varepsilon>0$ е еден произволен број, тогаш задачата се сведува на определување на непознатите ( неопределените ) коефициенти $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$ на полиномот $P(x)$, така што

$$|\ f(x)-P(x)\ |<\varepsilon$$

за вредности на $x$ во околина на точката $x=x_0$.

Ќе покажеме како се определуваат споменатите коефициенти. Во врска со ова ќе разгледаме два случаја:

### 1) *Нека $f(x)$ е полином од n-ти степен*

(на пример $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$).

Дадениот полином ќе го изразиме по степените на биномот $x-x_0$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots + a_n(x-x_0)^n \quad (*)$$

и ќе пристапиме кон определување на коефициентите $a_0$, $a_1$, $a_2$, $\ldots$ $a_n$, така што равенството да биде идентички еднакво.

Ако замениме $x=x_0$, добиваме $a_0 = f(x_0)$ (сите други членови за $x=x_0$ се рамни на нула).

По определување на изводот

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \ldots + n\,a_n(x-x_0)^{n-1}$$

и повторна замена $x=x_0$, добиваме $f'(x_0) = a_1$.

По повторно диференцирање и заменување $x=x_0$, сукцесивно добиваме дека

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},$$

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!},$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

По заменување на овие вредности за коефициентите во равенството (*) добиваме:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Добиеното равенство е всушност ***Тајлоровата формула за полином***. Со оваа формула сме во можност, полиномот по степените на $x$ да го претставиме со полином по степените на биномот $x-x_0$.

**Пример 1.** *Полиномот*

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 3$$

*да се изрази со полином по степените од* $x$–1.

Ќе се користиме со формулата

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

за $x_0=1$. Ќе ги најдеме изводите на функцијата :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - x^2 + x - 3, \\ f'(x) &= 6x^2 - 2x + 1, \\ f''(x) &= 12x - 2, \\ f'''(x) &= 12, \\ f^{IV}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Ќе ги пресметаме вредностите на функцијата и нејзините изводи за $x=1$;

$$f(1) = -1, \quad f'(1) = 5, \quad f''(1) = 10, \quad f'''(1) = 12, \quad f^{IV}(1) = 0.$$

Заменувајќи ги вредностите на функцијата и нејзините изводи во формулата, добиваме:

$$f(x) = -1 + 5(x-1) + 5(x-1)^2 + 2(x-1)^3 .$$

Според тоа го добиваме идентитетот:

$$2x^3 - x^2 + x - 3 \equiv -1 + 5(x-1) + 5(x-1)^2 + 2(x-1)^3 .$$

Ќе ја покажеме користа од изразувањето на зададениот полином во полином по степени од $x$–1, само во еден случај. Ако е потребно да се пресмета вредноста на полиномот за $x$=1,1, многу полесно ќе ја добиеме таа вредност од полиномот развиен по степените од $x$–1.

### 2) *Нека $f(x)$ е функција што не е полином.*

Функцијата $f(x)$ нека е определена во сегментот $[a,b]$, има изводи од $n$-ти ред заклучно во сегмантот $[a,b]$ и $n+1$ извод во интервалот $(a,b)$.

Постапката за изразување на еден полином по степени од $x$ со друг полином по степени од $x–x_0$ ни служи како упатство како да постапиме кога е потребно една функција што не е полином да се изрази со полином по степени на $x–x_0$.

Ако со $R_n$ ја означиме разликата помеѓу вредностите на дадената функција $f(x)$ и вредностите на ваков начин формиран полином $P(x)$, имаме:

$$f(x) - P(x) = R_n$$

т.е.

$$f(x) = P(x) + R_n$$

или во развиена форма:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n\,,$$

каде што $R_n$ е ***остаток на Тајлоровата формула***.

За сите вредности на $x$ за кои остатокот $R_n$ е помал може да се користи полиномот $P(x)$ за приближно пресметување на функцијата $f(x)$. Ако за однапред определена вредност на $n$ (степен на полиномот или број на членови на полиномот) остатокот $R_n$ останува по вредност помал од $\varepsilon$, тогаш е реално пресметувањето на вредностите на функцијата $f(x)$ да се изврши со помош на полиномот, грешката што при тоа се прави е исто помала од $\varepsilon$. Кога вредноста на функцијата се пресметува со на овој начин формиран полином, вообичаено е да се каже дека функцијата се апроксимира (приближно претставува), со наведениот полином, со таканаречената Тајлорова формула.

**Пример 2.** *Да се апроксимира (развие) функцијата $y=\sin x$ по Тајлоровата формула во близината на точката $x_0 = \frac{\pi}{4}$ (да се земат само првите пет члена).*

Во формулата

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

ќе ги замениме вредностите на функцијата $y = sinx$ и нејзините изводи за $x = \frac{\pi}{4}$.

Ќе ги најдеме изводите на функцијата и ќе ги пресметаме нивните вредности:

$$f(x) = sin\, x,$$

$$f'(x) = sin\,(x+\frac{\pi}{2}),$$

$$f''(x) = sin\,(x+2\frac{\pi}{2}),$$

$$f'''(x) = sin\,(x+3\frac{\pi}{2}),$$

$$f^{IV}(x) = sin\,(x+4\frac{\pi}{2});$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f'''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f^{IV}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

по заменување се добива:

$$sin\, x \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2!}(x-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 3!}(x-\frac{\pi}{4})^3 + \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 4!}(x-\frac{\pi}{4})^4.$$

Формулата може да се користи за пресметување на вредностите на функцијата $y=sinx$ за агли околу $45^0$.

За $x = 46^0$ добиваме:

$$sin\, 46^0 \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}017\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{0{,}017^2}{2!}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} -$$

$$- \frac{0{,}017^3}{3!}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{0{,}017^4}{4!}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

## 5. 1. Определување на остатокот во Тајлоровата формула

Кога една функција се развива (претставува) со Тајлорова формула, многу е битно да се оцени вредноста на остатокот $R_n$, за да знаеме со каква точност работиме при апроксимирањето. Вредноста на $R_n$ зависи од видот на функцијата, од бројот на членови на полиномот и од вредноста на $x$ за која се пресметува вредноста на функцијата. Наша цел овде ќе биде да го изразиме $R_n$ во таква форма, за да може да ја оценуваме неговата вредност.

Остатокот $R_n$ ќе го напишеме во вид:

$$R_n = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x)$$

при што определувањето на вредноста на $R_n$ се сведува на определување на вредноста на $Q(x)$. По ова, Тајлоровата формула го добива следниов вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x),$$

Ќе формираме една помошна функција (ќе ја означиме со $F(t)$) во вид:

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots$$

$$\dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x),$$

Оваа функција е формирана на тој начин што е формирана разлика помеѓу функцијата $f(x)$ и Тајлоровата формула што ја апроксимира, во која наместо $x_0$ е заменето $t$. Новата, помошна функција $F(t)$ ги задоволува условите на Роловата теорема (таа е непрекината, диференцијабилна и $F(x_0)=0$, $F(x) = 0$.

Согласно со Роловата теорема, изводот на функцијата $F(t)$ за $t= \xi$, каде што $x_0 < \xi < x$, е рамен на нула, т.е. $F'(\xi) = 0$.

Ќе пресметаме:

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - f''(t)(x-t) + 2(x-t)\ \frac{f''(t)}{2!} -$$

$$- \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^{2} + \ \dots\ + n(x-t)^{n-1}\ \frac{f^{(n)}(t)}{n!} -$$

$$- \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^{n} + (n+1)(x-t)^{n}\ \frac{Q(x)}{(n+1)!}\ .$$

По сведување се добива:

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^{n} + \frac{(n+1)Q(x)}{(n+1)!}(x-t)^{n},$$

односно:

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^{n} + \frac{Q(x)}{n!}(x-t)^{n}.$$

Изедначувајќи го изводот со нула за $t=\xi$, се добива:

$$\frac{(x-\xi)^{n}}{n!}\left[f^{(n+1)}(\xi) - Q(x)\right] = 0.$$

Со оглед на тоа дека првиот множител не е нула, бидејќи $x\neq\xi$, се добива:

$$f^{(n+1)}(\xi) - Q(x) = 0, \quad \text{односно:} \quad Q(x) = f^{(n+1)}(\xi),$$

каде што $x_0 < \xi < x$.

По сè ова, конечно Тајлоровата формула, вклучувајќи го и конечниот вид на остатокот $R_n$, го добива следниов вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^{2} + \ \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n} + R_n \qquad (*)$$

при што

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1`)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad x_0 < \xi < x.$$

Многу често наместо неравенството $x_0 < \xi < x$ можеме да се користиме и со релацијата $\xi = x_0 + (x - x_0)\theta$, при што $0<\theta<1$, што е еквивалентно на условот $\xi$ да припаѓа во интервалот $(x_0,x)$.

*Добиениот израз за остатокот* $R_n$ ***се вика Лагранжов вид на остатокот***.

За $x_0=0$, се добива:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(\xi), \qquad (**)$$

при што

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1`)!}x^{n+1},$$

каде што $0 < \xi < x$ или $\xi = \theta\, x$ при услов $0<\theta<1$.

Од Тајлоровата формула се гледа дека *секоја функција* $y=f(x)$ *која ги има сите изводи од* $n$-*ти ред во точката* $x_0$ *и* $n+1$-*ви извод во околината на таа точка, може да се апроксимира со полином од* $n$-*ти степен во околината на таа точка.*

*Со формулата* (*) *може да се апроксимира функцијата* $y=f(x)$ *во близина на точката* $x_0$ *(со неа ќе пресметуваме вредности на функцијата за вредности на x блиски до* $x_0$*), додека со формулата* (**) *ќе се користиме за пресметување вредности на функцијата за вредности на x блиски до нула.*

*Формулата* (**) *е очигледно специјален случај на формулата* (*), *каде што се зема дека* $x_0=0$ *и се вика* ***Маклоренова формула.***

Во наредниве примери ќе се задржиме повеќе на некои прашања поврзани со остатокот на Маклореновата формула.

**Пример 1.** *Да се развие функцијата*

$$y = e^x$$

*по Маклореновата формула, земајќи ги притоа првите четири члена. Од формулата да се искористат четирите члена за пресметување на* $e^{0,1}$.

*Да се оцени грешката што ја правиме за така пресметаната вредност.*

Ќе ги определиме првите три изводи на функцијата:

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad f'''(x) = e^x.$$

Вредностите на функцијата и изводите за $x=0$ се:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1, \quad f'''(0) = 1.$$

Според тоа, заменувајќи во Маклореновата формула, се добива:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

Со добиената апроксимација на функцијата $y = e^x$ сме во можност да ги пресметуваме вредностите на функцијата $e^x$ за вредности на $x$ близу до нула.

На пример, за $e^{0,1}$ $(x=0,1)$ се добива:

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{0,01}{2!} + \frac{0,001}{3!}$$

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + 0,005 + 0,00016 = 1,10516.$$

За да ја оцениме грешката во пресметаната вредност (колку цифри се точни ) ќе се користиме со формулата за остатокот $R_n$.

Во случајов, $n=3$ (бидејќи функцијата $e^x$ ја претставивме како полином од трет степен) и $x = 0,1$, за остатокот

$$R_n = \frac{x^{n+1} e^{\theta x}}{(n+1)!}$$

имаме

$$R_3 = \frac{(0,1)^4 e^{\theta \cdot 0,1}}{4!}.$$

За најнеповолно $\theta = 1$, изразот $e^{\theta \cdot 0,1}$ не е поголем од $3$. За $e^{\theta \cdot 0,1}$ ако замениме со $3$, се добива:

$$R_3 < \frac{(0,1)^4 \cdot 3}{4!}.$$

Знакот $=$ го заменуваме со знакот $<$ бидејќи со замена $e^{\theta \cdot 0,1}$ со $3$ десната страна ја зголемуваме.

По пресметувањето на вредностите на десната страна од неравенството, се добива дека

$$R_3 < \frac{0{,}0001 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 0{,}0000125,$$

што значи дека вредноста за $e^{0,1}$ е пресметана со 4 точни децимални места.

**Пример 2.** *Колку члена треба да се земат од Маклореновата формула при развивањето на функцијата* $y=e^x$ *за, при пресметувањето на* $e^{0,1}$ *грешката да биде помала од* $0{,}001$.

За функцијата $y=e^x$ Маклореновата формула го има следниов вид:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

каде што

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Во случајов е зададено $x=0{,}1$, $R_n < 0{,}001$. Потребно е да се пресмета $n$.

Ќе се користиме со изразот за остатокот $R_n$ . Според условот на задачата, потребно е

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} < 0{,}001.$$

Ќе замениме $x=0{,}1$, по што се добива:

$$\frac{(0{,}1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta \cdot 0{,}1} < 0{,}001.$$

За најнеповолно $\theta = 1$, изразот $e^{\theta \cdot 0,1}$ не е поголем од 3, па за $e^{\theta \cdot 0,1}$ ќе замениме со $3$. Бидејќи земаме поголема вредност од вистинската смислата на знакот < не се менува, па се добива:

$$\frac{(0{,}1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 3 < 0{,}001.$$

Неравенката е од таков вид што единствено може да се провери со пробање, за која вредност на $n$ левата страна е помала од $0{,}001$.

За $n = 1$,

$$\frac{(0{,}1)^2}{2} \cdot 3 = 0{,}015$$

не е помало од $0{,}001$, што значи не е доволно да се земат само првите два члена за да се постигне бараната точност. Затоа пробаме со поголема вредност за $n$, $n$=2, па добиваме дека левата страна има вредност

$$\frac{3 \cdot 0{,}001}{3 \cdot 2} = 0{,}0005.$$

Според тоа, доволно е да се земат првите три члена за, при пресметувањето на $e^{0,1}$, да направиме грешка помала од $0{,}001$.

**Пример 3.** *Ако при пресметувањето на вредноста на функцијата* $e^x$ *се земат првите четири члана од Маклореновата формула, колкава е максималната вредност на променливата* $x$, *за која може да се пресметува вредноста на функцијата, со грешка помала од* $0{,}0001$?

Зададено е $n = 3$ и $R_3 < 0{,}0001$.

Тргнуваме пак од изразот за остатокот $R_n$ , за да ја определиме во овој случај вредноста на променливата $x$.

Од релацијата

$$R_n = \frac{x^{n+1} \cdot e^{\theta x}}{(n+1)!},$$

по заменување $n$=3, се добива:

$$\frac{x^4 \cdot e^{\theta x}}{4!} < 0{,}0001.$$

Ќе замениме, наместо $e^{\theta x}$ најголемата вредност што може да ја прими тој израз за $x$<1, (тоа е 3), па се добива:

$$\frac{3 \cdot x^4}{4!} < 0{,}0001.$$

Со наголемувањето на левата страна, смислата на неравенката не се менува.

Ако ги извршиме следниве операции

$$\frac{3x^4}{24} < 0{,}0001,$$

$$\frac{x^4}{8} < \frac{1}{10000},$$

$$x^4 < \frac{8}{10000},$$

$$|x| < \frac{\sqrt[4]{8}}{10},$$

следува дека за $x = \frac{\sqrt[4]{8}}{10}$, што изнесува 0,00168, се прави грешка од 0,0001. За секоја вредност на $|x| < 0{,}0017$ грешката останува во истите граници.

## Задачи за вежбање

**1.** Да се покаже дека за функцијата $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x+1$ на сегментот $[-1,1]$ важи теоремата на Рол и да се определи точката во која $f'(x) = 0$.

Одг.: $x=\xi_1 = -\frac{2}{3}$, $x=\xi_2 = \frac{1}{2}$.

**2.** Дали може да се примени Роловата теорема на функцијата $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$ во интервалот $[0,3]$ ?

Одг.: Не може, нема извод за $x=2$.

**3.** Да се провери дали за функцијата $y=\ln x$ на сегментот $[1,2]$ важи Лагранжовата теорема? Доколку важи да се определи точката $\xi$ и да се објасни геометриски.

Одг.: $\xi = \frac{1}{\ln 2}$.

**4.** Да се најде точката M на лакот AB на кривата $y=2x-x^2$, во која тангентата е паралелна со тетивата $\overline{AB}$, ако $A(1,1)$ и $B(3,-3)$.

Одг.: $M(2,0)$.

**5.** Со помош на Лопиталово правило да се пресметаат границите:

**1)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$; Одг.: **1)** $\dfrac{3}{e}$.

**2)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$; **2)** 0.

**3)** $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right]$; **3)** $-\dfrac{1}{2}$

**4)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2\,arctg\,x)\ln x$; **4)** 0.

**5)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$; **5)** 1.

**6)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$; **6)** 2.

**7)** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ **7)** $e^{-\frac{1}{30}}$.

**6.** Полиномот

$$P(x)=x^4-3x^3+x^2-3x+4$$

да се разложи по степените на $x–4$.

Одг.: $P(x)=-56+21\,(x-4)\;+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$.

**7.** Со помош на Тајлоровата формула да се пресмета вредноста на полиномот

$$P(x)=\;-5x^3+3x^2-x+2$$

за $x=1{,}02$ со точност до 0,001.

Одг.: $P(1{,}02)\approx-1{,}205$.

**8.** Да се напише Тајлоровата формула за функцијата $f\,(x)=\ln x$ за $x_0=1$.

Одг.: $\ln x=x-1-\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(x-1)^3}{3}-\;...\;+(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{n}+R_n$,

$$R_n\;=\;\frac{(-1)^n}{n+1}\left[\frac{x-1}{1+\theta(x-1)}\right]^{n+1},\qquad 0<\theta<1.$$

**9.** Да се напише Маклореновата формула за функциите:

**1)** $f(x) = sin\, x$;

$$\text{Одг.: } sin\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n,$$

$$R_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} cos\, \theta x, \qquad 0<\theta<1.$$

**2)** $f(x) = cos\, x$;

$$\text{Одг.: } cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + R_n,$$

$$R_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} cos\, \theta x, \qquad 0<\theta<1.$$

**10.** Функцијата $y = sin^2 x$ да се изрази со првите пет члена од Маклореновата формула и да се најде остатокот за $|x| < 0{,}2$.

$$\text{Одг.: } sin^2 x = 2x^2 - \frac{x^4}{3} + R_5,$$

$$R_5 = \frac{2}{15} sin 2\xi \cdot x^5, \qquad |R_5| < 0{,}00003.$$

**11.** Користејќи го биномното разложување

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + R_n,$$

да се пресмета $\sqrt[7]{129}$ со точност до $10^{-3}$.

Одг.: 2,002.

**12.** Да се пресметаат со точност $10^{-3}$:

**1)** $cos\, 41^0$; Одг.; **1)** 0,754.

**2)** $\sqrt[3]{e}$ **2)** 1,395.

# 6. ИСПИТУВАЊЕ НА ФУНКЦИИ

Испитувањето на функциите се состои во проучувањето на нивните својства. Под тоа се подразбира определување на интервалите во кои функцијата расте и опаѓа, определување на екстремните вредности, определување на интервалите во кои функцијата е конкавна или конвексна, определување на превојните точки и асимтотите на функцијата.

Наведените својства на функцијата се тесно поврзани со нејзините изводи (со знакот на првиот и вториот извод, со условот првиот или вториот извод да е рамен на нула).

Тука ќе ги проучиме наведените својства, за да можеме на крајот да ја дефинираме (оформиме) постапката за графичко претставување на една произволна функција.

## 6. 1. Растење и опаѓање на функции

Во гл. III, **т.4.4.** е дадена дефиниција за растење и опаѓање на една функција. Овде ќе укажеме на врската со изводот на функцијата што ќе ни послужи за откривање на интервалите каде што функцијата расте и интервалите во кои функцијата опаѓа. Врската се изразува со теоремата:

**Теорема.** *Нека функцијата* $y = f(x)$ *во интервалот* $(a,b)$ *е диференцијабилна.*

*Функцијата* $y = f(x)$ *не опаѓа во интервалот* $(a,b)$, *ако и само ако* $f'(x) \geq 0$ за секој $x \in (a,b)$.

*Функцијата* $y = f(x)$ *не расте во интервалот* $(a,b)$, *ако и само ако* $f'(x) \leq 0$ *за секој* $x \in (a,b)$.

За да ја докажеме теоремата, ќе претпоставиме дека функцијата $y = f(x)$ не опаѓа во интервалот $(a,b)$. Нека $x$ добие нараснување $\Delta x$, тогаш

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0 \qquad (*)$$

бидејќи за функцијата што не опаѓа $f(x+\Delta x) \geq f(x)$ за $\Delta x>0$, односно $f(x+\Delta x) \leq f(x)$ за $\Delta x<0$. Ако определиме граница на количникот (*), се добива:

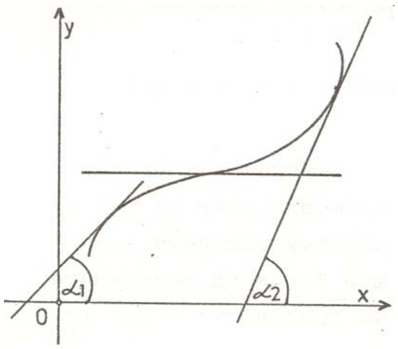
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0, \qquad f'(x) \geq 0.$$

Обратно, нека $f'(x) \geq 0$ за секој $x \in (a,b)$. За кои и да било две точки $x$ и $x+\Delta x$ од интервалот $(a,b)$, по Лагранжовата теорема ќе биде:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x\, f'(\xi), \qquad \xi \in (x, x+\Delta x).$$

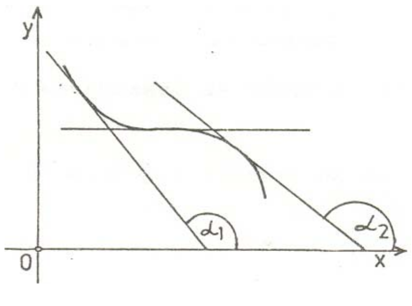
Бидејќи $f'(x) \geq 0$ за секој $x$ од интервалот $(a,b)$, тогаш и $f'(\xi) \geq 0$. Ако $\Delta x>0$, тогаш $f(x+\Delta x) - f(x) \geq 0$, т.е. $f(x+\Delta x) \geq f(x)$, а ако $\Delta x<0$, тогаш и $f(x+\Delta x) \leq f(x)$. Тоа значи дека функцијата $f(x)$ во интервалот $(a,b)$ не опаѓа.

Вториот дел од теоремата се докажува аналогно.



Црт. 6. 4.

Геометриски, со теоремата се тврди дека за функцијата што не опаѓа во интервалот $(a,b)$, тангентата повлечена на кривата во која и да било точка во интервалот $(a,b)$ образува со $x$–оската остар агол, (во некои точки може да биде и хоризонтална) (црт.6.4), а дека за функцијата што не расте во интервалот $(a,b)$ тангентата повлечена на кривата во која и да било точка во интервалот $(a,b)$ образува со $x$-оската тап агол, (црт.6.5).



Црт. 6.5.

На пример, за функцијата

$$y = x^4$$

првиот извод е

$$y' = 4x^3.$$

Според тоа, бидејќи за $x>0$ е $y'>0$, функцијата во интервалот $(0,+\infty)$ расте, за $x<0$ е $y'<0$, функцијата во интервалот $(-\infty,0)$ опаѓа.

## 6. 2. Екстрамни вредности на функции

Со посебно значење за функциите се точките на кривата што го делат интервалот на растењето од интервалот на опаѓањето или обратно. Тоа се точки чија ордината е најмала, односно најголема во однос на ординатите на сите точки од нивната околина.

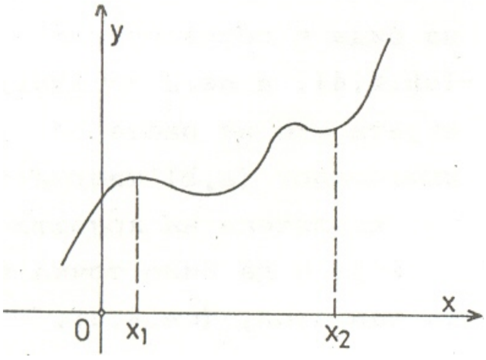
Нека функцијата $y=f(x)$ е дефинирана во интервалот $(a,b)$.

*За функцијата* $f(x)$ *велиме дека достигнува* ***максимум*** *во точката* $x_0 \in (a,b)$ *ако постои* $\delta$*–околина на точката* $x_0$ *така што за секој* $x$ *од таа околина* $((x_0-\delta,x_0+\delta),\ x\neq x_0)$ *е исполнето неравенството* $f(x) < f(x_0)$.

Слично се дефинира и минимум на функцијата .

*Функцијата* $f(x)$ *во точката* $x_0$ *достигнува* ***минимум*** *ако постои* $\delta$*–околина на точката* $x_0 \in (a,b)$*, така што за секој* $x$ *од таа околина да важи* $f(x) > f(x_0)$.

***Максимумот и минимумот се викаат екстреми на функцијата***.



Црт. 6. 6.

Функцијата во даден интервал може да има и неколку екстреми, при што некои од минимумите на функцијата можат да бидат поголеми од некои нејзини максимуми, (црт.6.6).

На цртежот во точката $x_2$ минимумот е поголем од максимумот во точката $x_1$.

***Потребниот услов за постоење на екстрем на функцијата*** е искажан со следново својство:

*Функцијата* $y=f(x)$ *ако има екстрем во точката* $x_0 \in (a,b)$ *и ако е диференцијабилна во точката* $x_0$*, тогаш*

$$f'(x_0) = 0.$$

Навистина, во доказот на Роловата теорема покажавме дека во точката $\xi$, во која функцијата има најголема (најмала) вредност, $f'(\xi) = 0$.

*Точките во кои првиот извод е рамен на нула се викаат **стационарни точки**.*

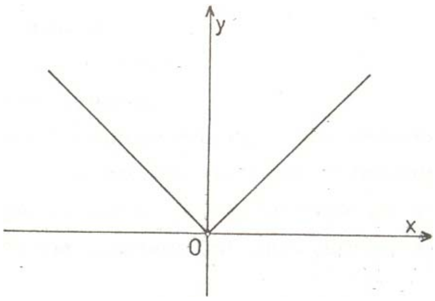
Геометриски тоа значи дека тангентата повлечена во стационарна точка е паралелна со $x$-оската.

Точките во кои функцијата достигнува екстрем се стационарни точки, а обратното не важи, т.е. не секоја точка во која функцијата има прв извод рамен на нула е точка на екстрем.

**Пример 1.** За функцијата $f(x)=x^3$ имаме $f'(x)=3x^2$ и $f'(0)=0$, т.е. во точката $x=0$ е исполнет потребниот услов за екстрем, но функцијата во таа точка нема екстрем.

Наведениот критериум за изнаоѓање на екстремните точки ($f'(x)=0$ ) го опфаќа најголемиот дел од функциите што се сретнуваат во практиката. Меѓутоа, може да се наведат примери на функции кои имаат екстремни точки (максимум или минимум) во оние точки во кои нема извод или изводот е бесконечен.

**Пример 2.** За функцијата $y = |x|$ (црт.6.7), карактеристична е точката со апсциса $x=0$. Изводот во разгледуваната точка, кога $x\to -0$ е рамен на $-1$, додека кога $x\to +0$ е рамен на $+1$, што значи дека функцијата во точката $x=0$ нема извод (извод не постои), но според дефиницијата за екстремните точки, функцијата има минимум во точката $x=0$.



Црт. 6. 7.

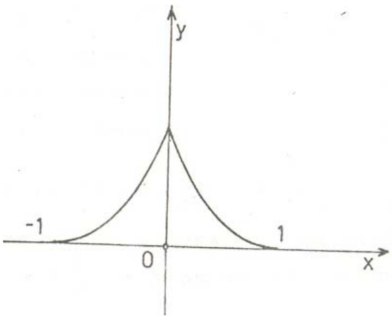
**Пример 3.** Функцијата

$$y = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

(црт.6.8) во точката $x = 0$, има извод

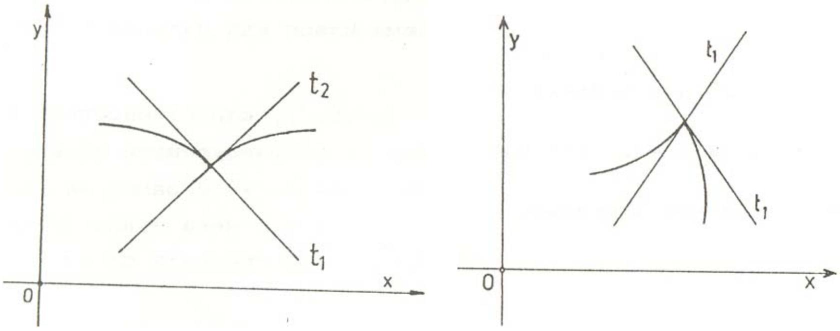
$$y' = -\frac{\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}},$$

што станува бескрајно голем за $x=0$. Но, оваа функција во точката $x=0$ има максимум.



Црт. 6. 8.

На црт.6.9 и 6.10 се прикажани уште два примера на криви кои во означените точки имаат соодветно минимум и максимум, во точки во кои функциите немаат извод. За $x=x_0$ и во двата случаја постојат по две вредности за првиот извод. Едната вред-ност на изводот е рамна на коефициентот на правецот на тангентата $t_1$, а втората вредност на изводот е рамна на коефициентот на правецот на тангентата $t_2$.



Црт. 6. 9. Црт. 6. 10.

По ова можеме критериумот за изнаоѓање на екстремните точки да го прошириме и да го искажеме на следниов начин:

*Функцијата може да има екстремна вредност само во два случаја, и тоа во точките во кои изводот на функцијата е рамен на нула, или во точките во кои нема извод, или точките во кои изводот е бесконечен.*

Со цел точката во која $f'(x) = 0$ да биде екстремна точка, потребно е исполнување на уште еден услов, така наречен ***доволен услов***.

Нека функцијата $y = f(x)$ е непрекината во интервалот $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ и диференцијабилна во секоја точка од тој интервал (освен можеби за $x=x_0$).

*Ако* $f'(x)>0$ *за* $x<x_0$ *и* $f'(x)<0$ *за* $x>x_0$ *т.е. при преминувањето низ точката* $x=x_0$ *изводот го менува знакот од плус на минус, тогаш за* $x=x_0$ *функцијата има* ***максимум***.

*Ако* $f'(x)<0$ *за* $x<x_0$ *и* $f'(x)>0$ *за* $x>x_0$ *т.е. при преминувањето низ точката* $x=x_0$ *изводот го менува знакот од минус на плус, тогаш за* $x=x_0$ *функцијата има* ***минимум***.

Навистина, да претпоставиме дека изводот го менува знакот од плус на минус, т.е. за секој $x$ од околината на $x_0$, имаме:

$$f'(x) > 0 \quad \text{за} \quad x < x_0,$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{за} \quad x > x_0.$$

Применувајќи ја теоремата на Лагранж,

**1.** на сегментот $[x,x_0]$ ќе добиеме:

$$f(x_0) - f(x) = f'(\xi)(x_0-x), \qquad x < \xi < x_0.$$

Бидејќи

$$f'(\xi) > 0 \;\; \text{и} \;\; f'(\xi)(x_0-x) > 0,$$

тогаш

$$f(x_0) - f(x) > 0$$

односно

$$f(x) < f(x_0).$$

**2.** на сегментот $[x_0,x]$ ќе добиеме:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x-x_0), \qquad x_0 < \xi < x.$$

Бидејќи

$$f'(\xi) < 0 \quad \text{и} \quad f'(\xi)\,(x_0 - x) < 0,$$

тогаш

$$f(x) - f(x_0) < 0$$

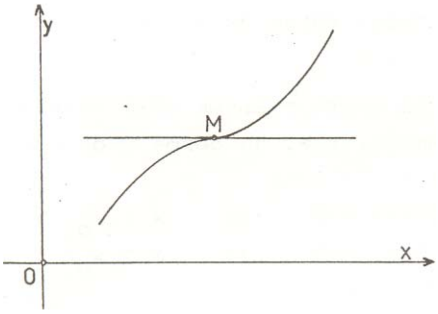
односно

$$f(x) < f(x_0).$$

Тоа значи дека за секој $x$ од интервалот $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ вредноста на функцијата е помала од вредноста на функцијата во точката $x_0$. Според тоа, во точката $x_0$ функцијата има максимум.

Аналогно се докажува и случајот кога изводот на функцијата во точката $x_0$ го менува знакот од минус на плус.

Доколку $f'(x_0)=0$, а изводот лево и десно од $x_0$ не го менува знакот (доволниот услов не е исполнет), стационарната точка во $x=x_0$ не е ниту максимум ниту минимум (црт.6.11).



Црт. 6. 11.

**Пример 1.** *Да се определат екстремните вредности на функцијата*

$$y = x^3 - 3x.$$

Ќе го најдеме првиот извод

$$y' = 3x^2 - 3$$

и ќе поставиме услов првиот извод да биде рамен на нула, т.е.

$$3x^2 - 3 = 0.$$

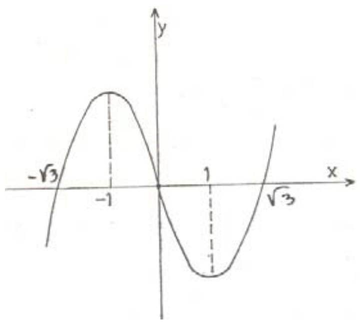
Решение на квадратната равенка е :

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1.$$

Според тоа, функцијата има две стационарни точки $E_1(1,-2)$ и $E_2(-1,2)$.

Вториот (доволен) услов ќе ни биде одговор, дали стационарните точки се точки на екстрем и дали се максимум или минимум.

Ќе избереме околина на точката $E_1$. Вредноста на првиот извод во точката $x=\frac{3}{4}$ (произволно избрана точка лево од точката $E_1$) е $y'=-\frac{21}{16}<0$, па според тоа функцијата опаѓа лево од стационарната точка. За $x=\frac{5}{4}$ ( исто произволно избрана точка десно од точката $E_1$) е $y'=\frac{27}{16}>0$, па според тоа, функцијата расте во интервалот десно од точката $E_1$. Оттука следува дека точката $E_1$ го дели интервалот на опаѓање од интервалот на растење. Според тоа, $E_1$ е точка на минимум на кривата.



Црт.6.12

Аналогно, сè повторено за точката $E_2$ укажува дека точката $E_2$ е точка на максимум на функцијата, (црт.6.12).

Функцијата е од поедноставните и кога ќе се додаде дека таа има три пресечни точки со $x$-оската: $x=0$, $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$, многу лесно се црта графикот на функцијата врз основа на екстремните точки и пресеците со оските.

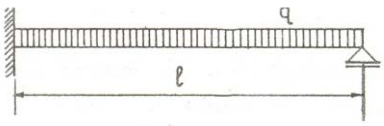
**Пример 2.** *Греда со должина $\ell$, вклештена во левиот крај, е оптоварена со рамномерно оптоварување $q$ по целата должина* (црт.6.13).

Равенката на моментната линија е

$$M(x) = -\frac{1}{8}q\ell^2 + \frac{5}{8}q\ell x - qx^2 \qquad (*)$$

при следнава положба на координатниот систем: координатниот почеток е во левиот крај, а $x$-оската се совпаѓа со правецот на гредата. На црт. 6.14 моментната линија е прикажана и графички.

Потребно е да се определат положбата и големината на максималниот нападен момент и вредноста на моментот во левиот потпор. Како и во претходниот пример, и овде се бара најголемата вредност на функцијата (во овој случај на $M(x)$).



Црт. 6.13.

Од условот првиот извод на разгледуваната функција да биде рамен на нула, имаме

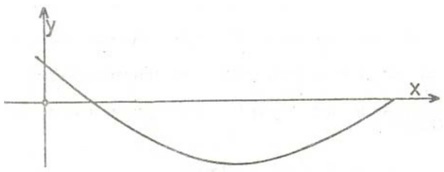
$$M\,'(x) = \frac{5}{8}\,q\ell - qx,$$

т.е.

$$\frac{5}{8}\,q\ell - qx = 0,$$

од каде се добива:

$$x = \frac{5\ell}{8}.$$



Црт.6.14

Според тоа, максималната вредност на моментот е на растојание $\frac{5\ell}{8}$, мерено од левиот потпор. Заменувајќи во равенката (*) $x=\frac{5\ell}{8}$, се добива максималната вредност на моментот која изнесува $\frac{9q\ell^2}{128}$.

Вредноста на моментот во левиот крај се добива кога во истата равенка ќе се замени $x=0$. Неговата вредност е $M = -\frac{q\ell^2}{8}$.

Во практиката често се сретнуваат задачи во кои е потребно да се определи најголемата или најмалата вредност на функцијата во даден интервал. каде што за разлика од претходниот пример во кој беше зададена функцијата помеѓу двете променливи, во овие задачи што се дефинираат (опишуваат) текстуално треба претходно да се определи врската помеѓу променливите (да се состави функцијата), па потоа да се опрделат екстремните вредности.

Задачи од ваков вид многу често се сретнуваат во многу области, со многу различна формулација. На четири примери ќе укажеме на постапката за решавање задачи од ваков вид.

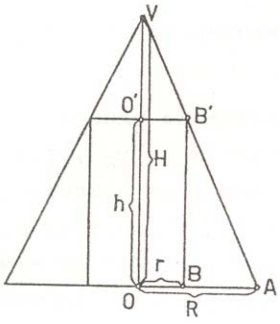
**Пример 3.** *Во кружен конус да се впише цилиндар, така што неговата плоштина да биде најголема.*

Радиусот на основата на конусот ќе го означиме со $R$ и висината со $H$ (црт.6.15). Во конусот е можно да се впишат бескрајно многу цилиндри. Ќе нацртаме еден од нив и радиусот на основата на цилиндарот ќе го означиме со $r$, а неговата висина со $h$. Треба да се определи цилиндарот со максимална плоштина, затоа ќе ја изразиме плоштината на цилиндарот во зависност од неговите димензии ($r$ и $h$).

Во случајов е

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi h.$$

Моментално $P$ е функција од две променливи; меѓутоа, помеѓу димензиите на цилиндарот ($r$ и $h$) постои врска, бидејќи тој е впишан во конусот.



Црт. 6. 15.

Врската помеѓу димензиите на цилиндарот ќе ја добиеме од сличноста на триаголниците BB'A и VOA. Врз основа на таа сличност се добива:

$$\frac{h}{R-r} = \frac{H}{R},$$

односно:

$$h = \frac{R-r}{R} H.$$

Заменувајќи ја вредноста на $h$ во формулата за плоштината $P$ (елиминација на $h$), се добива:

$$P = 2\pi\left[r^2 + rH\left(1 - \frac{r}{R}\right)\right].$$

На овој начин ја изразивме плоштината на цилиндарот во функција од $r$, кој може да се менува во граници од $0 < r < R$. Бидејќи нè интересира вредноста на $r$, за која плоштината $P$ добива максимална вредност, ќе го изедначиме на нула првиот извод на оваа функција:

$$P' = 2\pi\left(2r + H - \frac{2r}{R}\cdot H\right),$$

$$2\pi\left(2r + H - \frac{2r}{R}\cdot H\right) = 0.$$

Решавајќи ја последнава равенка по $r$ се добива:

$$r = \frac{RH}{2(H-R)}.$$

Тоа е вредноста на $r$, за која плоштината на цилиндарот е со најголема вредност.

**Пример 4.** *Од сите правоаголници впишани во елипсата*

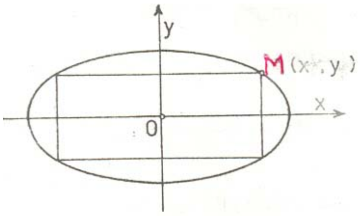
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

*да се определи правоаголникот со најголем периметар* (црт. 6.16).

Темињата на правоаголникот се наоѓаат на елипсата. Темето M на правоаголникот нека има координати $x$ и $y$, т.е. $M(x,y)$. Ќе тргнеме од формулата за периметар на правоаголник со цел периметарот да го изразиме во зависност од една страна на правоаголникот. Во случајов имаме:

$$L = 4x + 4y,$$

каде што $x$ е половина од едната страна на правоаголникот, а $y$-половина од другата страна.



Црт. 6.16.

Помеѓу $x$ и $y$ постои врска, бидејќи правоаголниците се впишани во елипсата и при кој и да било избор на правоаголник од сите можни, секогаш темето M (и другите) се на елипсата, т.е. координатите на точката M ја задоволуваат равенката на елипсата

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Решавајќи ја оваа равенка по $y$ се добива:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

и по заменување во формулата за периметарот $L$ се добива:

$$L = 4x + 4\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ .$$

Со тоа периметарот на правоаголникот го изразивме во зависност од една променлива $x$. Максималната вредност на периметарот $L$ ќе се добие за онаа вредност на $x$ за која $L' = 0$.

Првиот извод на функцијата $L$ е:

$$L' = 4 + 4\frac{b}{a}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}\ .$$

Од $L' = 0$, т.е.

$$4\left(1 - \frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) = 0$$

или

$$\frac{a\sqrt{a^2 - x^2} - bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = 0,$$

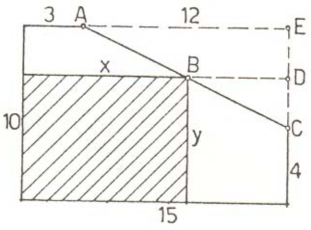
следува дека:

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ .$$

Според тоа, правоаголникот со најголем периметар впишан во дадената елипса ќе има димензии:

$$\frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \text{и} \qquad .\ \frac{2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ .$$

**Пример 5.** *Од картон во форма и димензии, прикажни на* црт. 6.17, *да се отсече правоаголник со најголема плоштина.*



Црт. 6.17.

Плоштината на правоаголникот е

$$P = xy.$$

Од сличноста на триаголниците ACE и BCD следува дека:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{DC}} \quad \text{т.е.} \quad \frac{12}{15 - x} = \frac{6}{y - 4}\ .$$

Упростувајќи го изразот и решавајќи ја равенката по $y$, се добива:

$$y = \frac{23-x}{2},$$

а за плоштината

$$P = \frac{1}{2}(23–x)x,$$

со што ја изразивме плоштината на правоаголникот во зависност од неговата страна $x$.

Бидејќи се бара екстремна вредност на плоштината, потребно е да најдеме извод на $P$ и да го прирамниме на нула, па имаме:

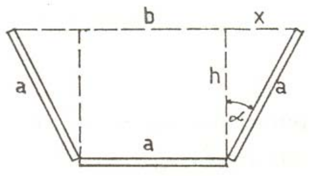
$$P\,' = \frac{1}{2}\ (23–2x) =0,$$

од каде што

$$x = \frac{23}{2}, \qquad y = \frac{23}{3}.$$

**Пример 6.** *Од три штици со широчина* $a$ *см да се направи корито со најголем напречен пресек. (*На црт. 6.19 е даден напречниот пресек на коритото*).*

Очигледно е дека плочтината на напречниот пресек на коритото зависи од аголот под кој ќе бидат поставени страничните штици. На цртежот аголот е означен со $\alpha$.



Црт. 6.18.

Задачата се сведува на тоа да се определи аголот $\alpha$, така што плоштината да има најголема вредност.

Пред сѐ ќе биде потребно да се изрази плоштината на пресекот (ќе ја означиме со $P$) во зависност од аголот $\alpha$.

Тргнувајќи од формулата

$$P = \frac{a+b}{2}h \qquad (*)$$

бидејќи пресекот е трапез

$$x = a\ sin\ \alpha, \quad h = a\ cos\ \alpha, \quad b = a+2a\ sin\ \alpha,$$

по замена во формулата (*) се добива:

$$P = \frac{a+a+2a\,sin\,\alpha}{2} \cdot a\,cos\,\alpha = (a+a\ sin\ \alpha)\ a\ cos\ \alpha,$$

односно

$$P = a^2(1+sin\ \alpha)\ cos\ \alpha.$$

По формирањето на врската помеѓу $P$ и $\alpha$, ќе треба да ја определиме вредноста на аголот $\alpha$, така што плоштината на пресекот $P$ да добие максимална вредност.

Од

$$P' = a^2\ [cos\ \alpha \cdot cos\ \alpha-(1+sin\ \alpha)\ sin\ \alpha\ ],$$

изедначувајќи го првиот извод со нула, $P' = 0$, ја добиваме равенката

$$a^2\ (cos^2\alpha - sin\ \alpha - sin^2\ \alpha) = 0,$$

од која ќе ја определиме бараната вредност за $\alpha$. Заменувајќи во неа $cos^2\alpha = 1-sin^2\alpha$ , ја добиваме квадратната равенка по $sin\alpha$:

$$1-sin\ \alpha - 2\ sin^2\alpha = 0,$$

од која по замена

$$sin\ \alpha = u,$$

се добива равенката

$$1 - u - 2u^2 = 0,$$

чии корени се :

$$u_1 = -1, \quad u_2 = \frac{1}{2}\ .$$

Враќајќи се на смената се добива:

$$sin\,\alpha\ = \frac{1}{2} \qquad \text{или} \qquad \alpha = 30^0.$$

Вредноста $u = -1$ не ја земаме во разгледување, бидејќи дава вредности за $\alpha$ поголеми од $90^0$, што не одговара на условите на задачата.

## Задачи за вежбање

Да се најдат екстремните вредности на функциите:

**1.** $y = 2 + x - x^2$; Одг.: за $x = \frac{1}{2}$, максимум $y = 2\frac{1}{4}$.

**2.** $y = \frac{1-x}{(1+x)^2}$; Одг.: за $x = 3$, минимум $y = -\frac{1}{8}$.

**3.** $y = \frac{2x}{1+x^2}$; Одг.: за $x = -1$, минимум $y = -1$;

за $x = 1$, максимум $y = -1$.

**4.** $y = x^2 e^{-x^2}$ Одг.: за $x = \pm 1$, максимум $y = \frac{1}{e}$;

за $x = 0$, минимум $y = 0$.

**5.** Во топка со полупречник $r$ да се впише конус со максимална обвивка.

Одг.: $M(x) = \pi\sqrt{2r}\sqrt{2rx^2 - x^3}$; висина $x = \frac{4r}{3}$.

**6.** Околу топка со полупречник $r$ опишан е конус со минимален волумен.

Одг.: $V(x) = \frac{\pi r^3}{3} \cdot \frac{x^2}{x-2r}$; висина $x = 4r$.

**7.** Во круг со полупречник $r$ да се впише правоаголник со максимална плоштина.

Одг.: $P(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2}$; страна $x = r\sqrt{2}$.

**8.** Збирот од катетите кај правоаголен триаголник е $\ell$. Да се определат катетите, така што плоштината на триаголникот да биде максимална.

Одг.: $P(x) = \frac{x(\ell - x)}{2}$; катета $x = \frac{\ell}{2}$, $P_{max} = \frac{\ell^2}{8}$.

**9.** Во топка со полупречник $r$ вписан е цилиндар со максимална обвивка.

Одг.: $M(x) = 4\pi x\sqrt{r^2 - x^2}$ ; полупречник $x = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$.

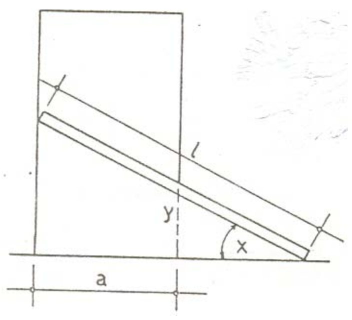
**10.** Околу полутопка со полупречник $r$ опишан е конус со минимален волумен.

Одг.: $V(x) = \dfrac{r^2\pi x^3}{3\left(x^2 - r^2\right)}$; висина $x = r\sqrt{3}$.

**11.** Даден е волуменот $V$ на еден цилиндар. Да се определат неговите димензии, така што плоштината да биде минимална.

Одг.: $P(x) = 2\pi x^2 + \dfrac{2V}{x}$; полупречник $x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

**12.** На една кула, во која треба да се внесе скала со должина $\ell$, треба да се направи врата.



Црт. 6. 19.

Да се одреди минималната висина на вратата, така што да може скалата да се внесе (види цртеж 6. 19).

Одг.: $y = \ell\ \sin x - a\cdot tg\, x,$

$$x = arccos\sqrt[3]{\frac{a}{\ell}}\,;$$

$$y_{min} = \left(\ell^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

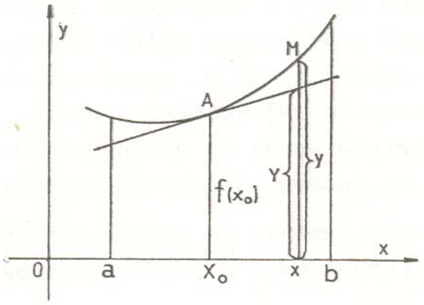
## 6. 3. Конкавност и конвексност. Превојни точки

Нека е дадена функцијата $y=f(x)$ која е непрекината на сегментот $[a,b]$ и диференцијабилна во интервалот $(a,b)$.

Обликот на кривата во интервалот $(a,b)$ нека биде каков што е прикажан на цртежот 6.20.

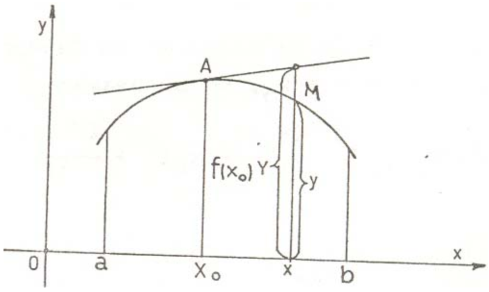
Во произволна точка А, со апсциса $x=x_0$ повлекуваме тангента.

Очигледно е дека во овој интервал соодветниот дел од кривата $y=f(x)$ е над тангентите во која и да било точка од интервалот $(a,b)$.



Црт. 6. 20.

Кога постои таков соднос помеѓу кривата и тангентата во интервалот, усвоено е да се каже дека кривата е ***вдлабната*** (***конкавна***) во разгледуваниот интервал.



Црт. 6. 21.

На црт. 6. 21 е даден друг облик на кривата и исто така е повлечена тангента во произволна точка А од интервалот. Овде обратно, соодветниот дел од кривата е под тангентите повлечени во која и да било точка од интервалот $(a,b)$.

При ваков соднос помеѓу кривата и тангентата е усвоено да се каже дека кривата е ***испакната*** (***конвексна***) во разгледуваниот интервал.

Двата поима се дефинирани во однос на позитивната насока на $y$-оската. Кривата е вдлабната според горенаведената дефиниција ако се "гледа" од позитивната насока на $y$-оската, инаку (ако се "гледа" од негативниот дел на $y$-оската), таа би била испакната.

За произволна точка $x$ од интервалот $(a,b)$ ординатата до кривата нека ја означиме со $y$, а ординатата до тангентата со $Y$. Ако е разликата $y - Y > 0$, според дефиницијата, кривата е конкавна, а ако е разликата $y - Y < 0$, кривата е конвексна.

Според тоа, како критериум по кој ќе бидеме во состојба да потврдиме дали една дадена крива во даден интервал е конкавна или конвексна, може да ни послужи знакот на разликата $y - Y$.

Оваа разлика ќе ја изразиме во вид од кој ќе можеме да донесуваме заклучок кога е оваа разлика позитивна или негативна.

Равенката на тангентата во точката $M(x_0, f(x_0))$ ќе биде:

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x-x_0),$$

па според тоа:

$$Y = f'(x_0)\,(x-x_0) + f(x_0).$$

Функцијата $y=f(x)$ ќе ја развиеме по Тајлорова формула во околина на точката $x=x_0$, па добиваме:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

Според тоа,

$$y-Y = \Big[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots\Big] - f'(x_0)\,(x-x_0) - f(x_0),$$

односно по сведување,

$$y-Y = (x-x_0)^2\ \frac{f''(x_0)}{2!} + (x-x_0)^3\ \frac{f'''(x_0)}{3!} + \dots$$

По извлекување на заедничкиот множител $(x-x_0)^2$, се добива:

$$y-Y = (x-x_0)^2 \Big[\ \frac{f''(x_0)}{2!} + (x-x_0)\ \frac{f'''(x_0)}{3!} + \dots\Big]$$

и оттука добиваме критериум по кој распознаваме кога е кривата конкавна, а кога конвексна.

Имено, множителот $(x-x_0)^2$ не влијае на знакот затоа што секогаш е позитивен. За вредностите на $x$ блиски до $x_0$ вториот член во заградата и другите кои се по него се бескрајно мали големини во однос на првиот член. Според тоа, следува заклучокот дека знакот на разликата $y-Y$ зависи само од знакот на вториот извод на функцијата $y=f(x)$ во точката со апсциса $x_0$.

*Ако* $f''(x_0)>0$ (*разликата* $y-Y>0$), ***кривата е конкавна*** *во разгледуваниот интервал, а ако* $f''(x_0)<0$ (*разликата* $y-Y<0$), ***кривата е конвексна***.

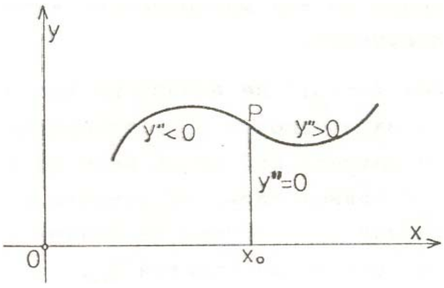
Овде можеме да дополниме во врска со доволниот услов за постоење на екстремни вредности. Наместо испитување на знакот на првиот извод лево и десно од стационарната точка, за да се утврди дали точката претставува максимум или минимум, можеме тоа да го упростиме и да го сведеме на испитување на знакот на вториот извод во стационарната точка.

– *Ако* $f'(x_0)=0$ (*потребен услов*) *и* $f''(x_0)<0$ (*доволен услов*), *тогаш стационарната точка* $x=x_0$ *е во конвексниот дел од кривата и поради тоа разгледуваната точка е максимум.*

– *Ако* $f'(x_0)=0$ (*потребен услов*) *и* $f''(x_0)>0$ (*доволен услов*), *тогаш стационарната точка* $x=x_0$ *е во конкавниот дел од кривата и поради тоа разгледуваната точка е минимум.*

– *Ако* $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, стационарната точка се испитува понатаму.

*Точки на кривата што го делат интервалот во кој кривата е конвексна од интервалот во кој кривата е конкавна, или обратно, се викаат* ***превојни точки*** (црт. 6.22).



Црт. 6. 22.

Со оглед на тоа дека вториот извод има различни знаци во интервалот на конкавност и интервалот на конвексност, а вториот извод е непрекината функција, следува дека на границата на овие два интервала вториот извод добива вредност нула.

Така заклучуваме: *ако функцијата* $y=f(x)$ *во точката* $x=x_0$ *има втор извод рамен на нула и при преминот низ таа точка вториот извод го менува знакот, тогаш таа точка е* ***превојна точка***. *Од изложеното можеме да заклучиме дека определувањето на интервалот на конкавност, интервалот на конвексност на крива, превојните точки на крива, се сведува на испитување на знакот на вториот извод на функцијата и испитување кога вториот извод е рамен на нула.*

## 6. 4. Асимптоти

Многу често е од интерес при проучувањето на функциите да се испита изменувањето на функцијата при неограничено наголемување на аргументот, или неограничено наголемување на функцијата во близина на некоја точка или и двете големини заедно неограничено се зголемуваат. Во овие случаи, кривата некогаш се приближува постојано кон некоја права. Правата може да биде хоризонтална, вертикална или коса.

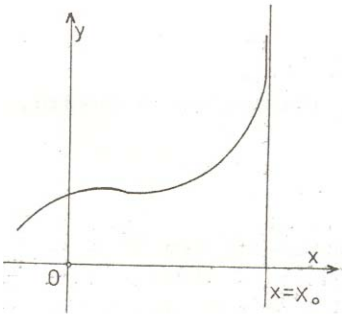
По дефиниција, ако таква права постои, се вика ***асимптота*** на кривата.

*Правата* $p$ *е асимптота на кривата* $y = f(x)$, *ако и само ако*, *растојанието* $d$ *од точката* M *на кривата до правата* $p$, *тежи кон нула кога точката* M *се оддалечува во бескрајност по кривата.*

Ќе ја покажеме постапката за изнаоѓање асимптоти на функцијата $y=f(x)$, разгледувајќи го посебно прашањето за определување на вертикалните асимптоти, а посебно на косите асимптоти (хоризонтална асимптота се добива како специјален случај на коса асимптота).

### $1^0$ *Определување на вертикални асимптоти*

Во дефинирањето граница на функција (гл.IV **т.2.2**) покажавме дека кривата $y=f(x)$ има вертикална асимптота со равенката $x=x_0$, кога $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ бидејќи при исполнување на овој услов растојанието помеѓу точките на кривата $y=f(x)$ и правата $x=x_0$ клони кон нула (црт.6.23). Оттука следува заклучокот дека за определување (откривање) вертикални асимптоти ќе биде потребно да се определат оние вредности на променливата $x$ за кои функцијата тежи кон бескрајност.



Црт. 6. 23.

**Пример 1.** Функцијата

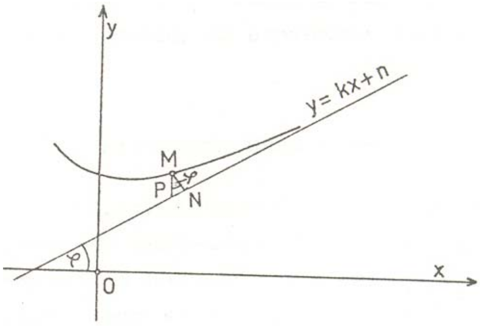
$$y=\frac{2}{x-5}$$

има вертикална асимптота $x=5$, бидејќи тежи кон бескрајност, кога $x\to 5$.

### $2^0$ *Определување на коса асимптота*

Ќе претпоставиме дека кривата $y=f(x)$ има коса асимптота со равенка $y=kx+n$.

Нека M е точка на кривата, а N точка на асимптотата (црт.6.24). При оддалечување на точката M од координатниот почеток (едновремено наголемување на двете променливи) ако $\lim\limits_{x\to\infty}\overline{MN}=0$, тогаш правата $y=kx+n$ ќе биде асимптота на кривата $y=f(x)$. Пресметувањето на растојанието не е едноставно, за да се провери исполнувањето на условот $\lim\limits_{x\to\infty}\overline{MN}=0$.



Црт. 6. 24

Затоа, ако со φ го означиме наклонот на правата кон $x$-оската, тогаш од триаголникот MNP следува дека

$$\overline{MN} = \overline{MP} \cdot \cos \varphi.$$

Бидејќи φ е константа, тогаш во сообразност со $\lim\limits_{x\to\infty} \overline{MN} = 0$, следува дека и $\lim\limits_{x\to\infty} \overline{MP} = 0$. Условот $\lim\limits_{x\to\infty} \overline{MP} = 0$, еквивалентен на условот $\lim\limits_{x\to\infty} \overline{MN} = 0$, е позгоден и затоа со него ќе се користиме.

Бидејќи

$$\overline{MP} = f(x) - (kx+n),$$

за постоење на коса асимптота го добиваме условот

$$\lim_{x\to\infty} ( f(x) - kx-n) = 0. \qquad (*)$$

Со оглед на тоа дека $k$ и $n$ се две неопределени константи, правата ќе биде асимптота, ако е можно да се определат вредностите на $k$ и $n$, така што условот (*) да биде исполнет. Во спротивно, кривата нема коса асимптота.

Ќе ги определиме константите $k$ и $n$.

Од условот $\lim\limits_{x\to\infty} ( f(x) - kx-n) = 0$ и својството од гл. IV **т.6. теорема 4,** следува дека

$$f(x) - kx - n = \alpha(x)$$

α–бескрајно мала големина). Равенката ќе ја поделиме со $x$ и ќе ја пресметаме границата:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{n}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{x}$$

од каде што следува дека:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k\right)=0,$$

бидејќи

$$\lim_{x\to\infty}\frac{n}{x}=0,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{x}=0,$$

конечно, добиваме дека:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Знаејќи ја вредноста за $k$, од равенството (*) се добива:

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Кривата ќе има коса асимптота ако границите со кои се изразени коефициентите $k$ и $n$ постојат, бидејќи во тој случај ќе биде исполнет условот (*). Ако двете граници или барем една од нив е бескрајност или неопределена, кривата нема коса асимптота.

При испитувањето на функциите во врска со определувањето на асимптотите, потребно е да се испитаат случаите кога $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$.

*Ако*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

*кривата има* ***хоризонтална асимптота*** *со равенка* $y = b$.

Вредноста на $b$ се добива по формулата

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x).$$

**Пример 1.** *Да се испита и да се нацрта графикот на функцијата*

$$y=\frac{x^2}{1+x}.$$

Функцијата е дефинирана за секој $x \neq -1$. За $x = -1$ функцијата има прекин и тука се јавува вертикална асимптота со равенка $x = -1$.

Постоење на коса асимптота се определува преку постоење на границите

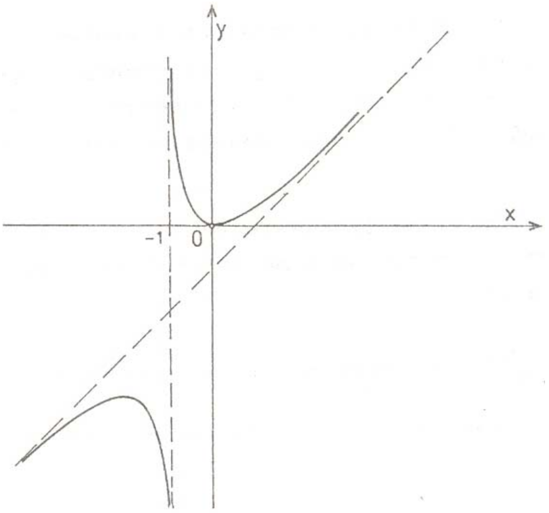
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx),$$

што во случајов се:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(1+x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2\left(\frac{1}{x}+1\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = 1,$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{1+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{1+x} = -1,$$

па равенката на косата асимптота е $y = x - 1$.



Црт. 6. 25.

Графикот на дадената функција има пресек со координатните оски во точката O(0,0).

Сега да ги најдеме изводите на функцијата, а тие се:

$$y' = \frac{2x+x^2}{(1+x)^2} \quad \text{и} \quad y'' = \frac{2}{(1+x)^3} \ .$$

Равенката $y'=0$ има корени $x=0$ и $x= - 2$, тоа значи дека функцијата може да има две точки на екстрем $E_1(0,0)$ и $E_2(-2,-4)$.

Бидејќи $y''(0)=2>0$, тогаш вредноста на функцијата $y(0)=0$ е минимална и бидејќи $y''(-2)=-2<0$, тогаш вредноста на функцијата $y(-2) =-4$ е максимална.

Од равенката $y''\neq 0$ за секој $x\neq -1$ добиваме дека функцијата нема превојна точка.

Од добиените резултзти, нанесени во координатен систем, може да се нацрта графикот на функцијата кој е прикажан на црт. 6.25.

**Пример 2.** *Да се испита и да се нацрта графикот на функцијата*

$$y = xe^{-\frac{x^2}{2}} .$$

Функцијата е дефинирана за секој $x$, т.е. во интервалот $(-\infty,+\infty)$.

Бидејќи

$$f(-x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -f(x).$$

Функцијата е непарна и симетрична во однос на координатниот почеток, па затоа е доволно да се изврши испитување само во интервалот $(0,+\infty)$. Од аналитичкиот израз на функцијата се гледа дека функцијата е непрекината во целата дефинициона област, што значи дека нема вертикални асимптоти.

Бидејќи

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0,$$

$$n = \lim_{x\to\infty} ( f(x) - kx) = 0,$$

$x$-оската е асимптота на функцијата.

Функцијата има пресек со координатните оски во координатниот почеток $O(0,0)$.

Изводите на функцијата се:

$$y' = (1-x^2)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{и} \quad y'' = (x^3-3x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Од $y' = 0$, т.е. $(1-x^2)\, e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ или $1-x^2 = 0$ се добива: $x_1=1$ и $x_2=-1$, т.е. можни се две екстремни точки $E_1(1, e^{-\frac{1}{2}})$ и $E_2(-1,\, e^{-\frac{1}{2}})$.

Ќе разгледуваме само за $x > 0$.

За $x = 1$

$$y''(1) = -2e^{-\frac{1}{2}} < 0.$$

Вредноста на функцијата за $x = 1$,

$$y(1) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

е максимална.

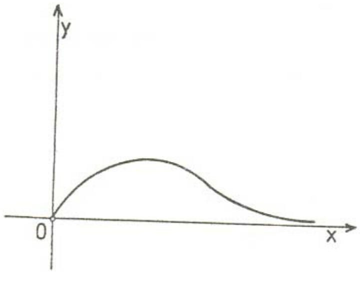
За да најдеме превојна точка, вториот извод го прирамнуваме на нула, па добиваме

$$y'' = 0,\ (x^3-3x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} = 0, \quad x^3-3x = 0,$$

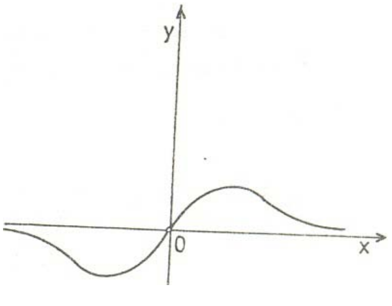
дека $x_1=0$ и $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$ , т.е. превојни точки се точките:

$$A_1(0,0), \quad A_2(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}), \quad A_3(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}})$$

Резултатите од испитувањето го даваат графикот само за $x>0$ прикажан на црт.6.26, а поради непарноста на функцијата, ако тој се пренесе симетрично во однос на координатниот почеток, се добива дека



Црт. 6. 26.



Црт. 6. 27.

во точката $(-1,-\frac{1}{\sqrt{e}})$ постои минимум и $A_3(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}})$ е превојна точка. Графикот на функцијата е прикажан на црт. 6. 27.

**Пример 3.** *Да се испита и да се нацрта графикот на функцијата*

$$y = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Функцијата е дефинирана за секој $x>0$.

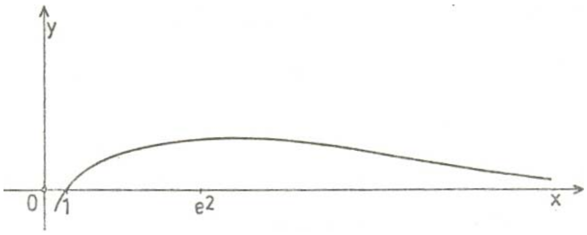
Од границата

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt{x}}\ln x = -\infty$$

следува дека $x = 0$ е вертикална асимптота, а од границата

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{6\sqrt{x}}{x} = 0,$$

следува дека $y = 0$ е хоризонтална асимптота.



Црт. 6. 28.

Пресек со $x$-оската графикот на функцијата има во точката A(1,0), ( $y$=0, кога $\ln x$=0, $x$=1).

Изводите на функцијата се:

$$y' = \frac{3(2-\ln x)}{2x\sqrt{x}} \quad \text{и} \quad y'' = \frac{3}{4}\cdot\frac{8-3\ln x}{x^{\frac{5}{2}}}.$$

Од $y'=0$ следува $2-\ln x = 0$, т.е. $x=e^2$.

За таа точка $y''(e^2) = -e^{-5} < 0$ и вредноста на функцијата $y(e^2) = \frac{6}{e}$ е максимална.

Од $y'' = 0$ т.е. $8{-}3ln\ x = 0$, $x = e^{\frac{8}{3}}$ добиваме дека функцијата има превојна точка $P(e^{\frac{8}{3}}, 8e^{-\frac{4}{3}})$.

Резултатите од испитувањето внесени во координатен систем го даваат графикот на функцијата (црт. 6.28).

## Задачи за вежбање

Да се испита и да се нацрта графикот на следниве функции:

**1.** $y = x(x^2{-}1)$.

Одг.: Дефинирана е за сите вредности на променливата

$$y_{max}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9},\quad y_{min}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Превојна точка е O(0,0).

**2.** $y = x^2 - x^4$.

Одг.: Функцијата има минимум во точката $x$=0, а

максимум во точките: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**3.** $y = \frac{x-1}{x+2}$.

Одг.: Дефинирана е за сите вредности на променливата $x$, освен за $x$=–2. Нула на функцијата е $x$=1. Пресечна точка на кривата со $y$-оската е $x = -\frac{1}{2}$. Нема екстрем. Асимптоти на кривата се $y = 1$ и $x = -2$.

**4.** $y = \frac{x-1}{x^2+1}$.

Одг.: Дефинирана е за сите вредности на променливата $x$. Максимум има за $x = 1+\sqrt{2}$, а минимум за $x$=$1-\sqrt{2}$. Асимптота е $y = 0$.

**5.** $y = \dfrac{x}{3-x^2}$.

Одг.: Не е дефинирана за $x=\pm\sqrt{3}$. Нема екстрем Асимптоти се: $x=\sqrt{3}$ , $x=-\sqrt{3}$ и $y = 0$.

**6.** $y = x + \dfrac{1}{x^2}$.

Одг.: Дефинирана е за сите вредности на променливата $x$, освен за $x=0$. Нула на функцијата е $x=-1$. Минимум има за $x=\sqrt[3]{2}$. Асимптоти се $x=0$ и $y=x$.

**7.** $y^2 = x(x-1)^2$.

Одг.: Дефинирана е за $x\geq 0$, екстрамна вредност има за $x=\dfrac{1}{3}$. Нема превојни точки. Асимптоти нема.

**8.** $y = x^2e^{-x}$

Одг.: Дефинирана е за сите вредности на променливата $x$. Нула има за $x = 0$. Максимум има во точката $(2,4e^{-2})$ и минимум во точката $O(0,0)$. Асимптота е правата $y = 0$.

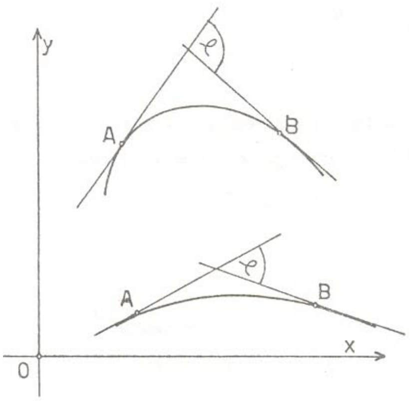
**9.** $y = x\, ln^2x$.

Одг.: Дефинирана е за секој $x > 0$. Нула има за $x = 1$. Максимална вредност е $\left(\dfrac{2}{e}\right)^2$ за $x = e^{-2}$, а минимална $0$ за $x=1$. Превојна точка е $\left(\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}\right)$. Асимптота нема.

## 7. КРИВИНА НА КРИВА

По проучувањето на својствата на функцијата, со чија помош ја прикажуваме графички, ќе спомeнеме за едно својство на функцијата што ја карактеризира формата на кривата. Тоа е степенот на нејзината закривеност во интервал и во точка.

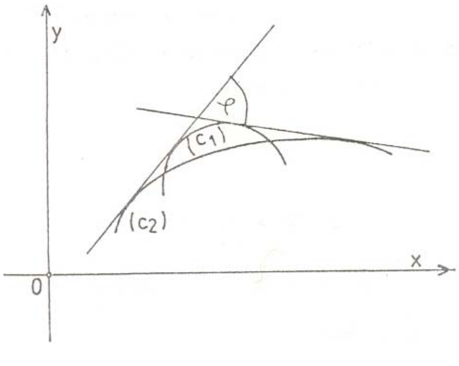
Ќе ја разгледаме кривата (*C*) прикажана на цртежот 6.29. Во точките A и B ќе повлечеме тангенти на кривата и со φ ќе го означиме аголот што го формираат тангентите. Тоа е аголот за кој се завртува тангентата во точката B при поместување на точката B во точката A. Аголот φ е очигледно мера на закривеноста на кривата во посматраниот лак AB. Доколку аголот φ е поголем, закривеноста на кривата е поголема, и обратно, за помало φ одговара помала закривеност на кривата.



Црт. 6. 29.

На цртежот, приближно должината на лакот е еднаква кај двете криви.

Но, од друга страна одредувајќи го аголот φ на лаци со различни должини, ќе забележиме дека степенот на закривеноста не може да се оцени само врз основа на големината на аголот. Например, кривите ($C_1$) и ($C_2$) на цртежот 6.30 имаат иста вредност за φ, меѓутоа, очигледно е дека кривата ($C_1$) е со поголема закривеност отколку кривата ($C_2$). Оттука следува заклучокот: *за* ***мера на закривеност*** *на кривата треба да се земе вредноста на аголот* φ, *што соодветствува на единица должина, што нé води на определување на односот на аголот* φ *и должината на соодветниот лак.*

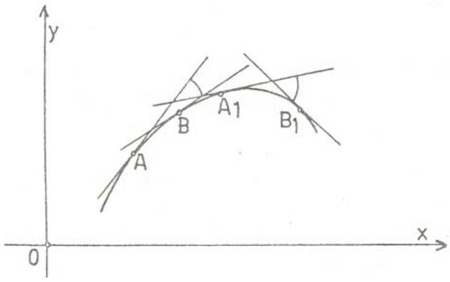


Црт. 6. 30.

Овој однос се зема за средна вредност на кривината (закривеноста) на кривата над лакот AB и се означува

$$K_{AB} = \frac{\varphi}{AB}.$$

За една иста крива, средната кривина на различни лаци ќе биде различна. На цртежот 6.31 средната кривина на лакот AB не е еднаква со средната кривина земена над лакот $A_1B_1$. Од овие причини, за да се прецизира степенот на закривеноста на кривата во непосредна близина на дадена точка се воведува поимот за *кривина во дадена точка*, и тоа како граница на средната кривина над лакот AB кога должината на лакот клони кон нула (т.е. кога точката B се приближува кон точката A), а имено



Црт. 6. 31.

$$K = \lim_{B\to A} K_{AB} = \lim_{B\to A} \frac{\varphi}{AB}.$$

Кружницата и правата се со посебни својства во врска со поимот што тука го дефинираме.

Според дефиницијата, за права ќе добиеме дека кривината ѐ е рамна на нула, (бидејќи е $\varphi = 0$, $\lim \frac{\varphi}{AB} = 0$).

За кружницата можеме лесно да покажеме дека има иста вредност за кривината во секоја точка, еднаква на $\frac{1}{R}$. На кружницата ќе избереме произволно две точки A и B и во нив ќе повлечеме тангенти (црт.6.32). Аголот φ во случајов е еднаков на централниот агол AOB. Со оглед на тоа дека должината на соодветниот кружен лак $AB = R\varphi$, се добива:

$$K = \lim_{B\to A} K_{AB} = \lim_{B\to A} \frac{\varphi}{AB} = \lim_{B\to A} \frac{\varphi}{R\varphi} = \frac{1}{R}.$$

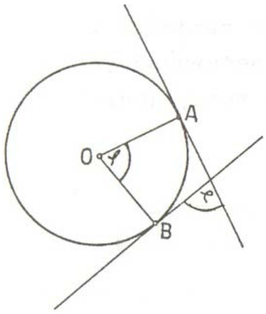
Во случајов кривината не зависи од положбата на избраните точки на кружницата и во која и да било точка кривината има вредност $\frac{1}{R}$, што инаку е очигледно.

Кај сите други криви, кривината има различна вредност и зависи од тоа во која точка се определува.

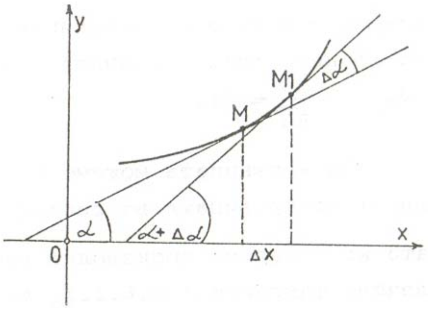
Да определиме сега аналитички израз за кривината на крива, зададена со равенка $y=f(x)$, во Декартовиот координатен систем. Функцијата $y=f(x)$ нека има втор извод. Треба да ја определиме вредноста на кривината на кривата во точка со апсциса $x$. На кривата ќе избереме две точки M и $M_1$ со апсциси соодветно еднакви на $x$ и $x+\Delta x$, (црт.6.33). Во точките M и $M_1$ ќе повлечеме тангенти на кривата и со $\alpha$ и $\alpha+\Delta\alpha$ ќе ги означиме аглите што тангентите ги формираат со позитивниот дел од $x$-оската. Аголот помеѓу тангентите ќе биде $\Delta\alpha$. Должината на лакот $MM_1$, ќе ја означиме со $\Delta s$. Согласно со дефиницијата ќе имаме:

$$K_{MM_1}=\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}}.$$

Кривината во точката M (со апсциса $x$) ќе се добие (со точност до знакот) кога ќе се определи границата на средната кривина $K_{MM_1}$, кога $M_1$ се стреми кон M, што во случајов е еквивалентно со условот $\Delta x\to 0$.



Црт. 6. 32.



Црт. 6. 33.

Според тоа, земајќи $K \geq 0$, се добива:

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} K_{\mathrm{MM}_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta x}\right|}{\left|\dfrac{\Delta s}{\Delta x}\right|} = \frac{\left|\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta x}\right|}{\left|\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta x}\right|} = \frac{\left|\dfrac{d\alpha}{dx}\right|}{\left|\dfrac{ds}{dx}\right|}.$$

Да ги определиме сега вредностите на изразите $\dfrac{d\alpha}{dx}$ и $\dfrac{ds}{dx}$.

Од врската

$$tg\,\alpha = y', \qquad \text{т.е.} \qquad \alpha = arctg\, y'$$

со диференцирање по $x$, се добива:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2},$$

($y'$ е функција од $x$), а бидејќи $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$ (гл.IX **т.2.2**) по заменување на овие вредности во изразот за кривина, се добива:

$$K = \frac{y''}{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}.$$

Со добиенава формула може да се најде вредноста на кривината на кривата $y = f(x)$ во произволна точка $x$. За да се пресмета вредноста на кривината во точката $x=x_0$, променливата $x$ ќе се замени со $x_0$ или пак претходно ќе се пресметаат вредностита на $y'$ и $y''$ во точката $x=x_0$ и ќе се заменат во формулата.

Ако $y'' > 0$, тогаш $K>0$, а ако $y'' < 0$, тогаш $K<0$, т.е. за кривата што е конкавна кривината е позитивна, а за конвексна крива кривината е негативна.

Доколку разгледуваме крива зададена со параметарски равенки $x=x(t)$, $y=y(t)$, кривината ќе ја определуваме по друга формула, што ќе ја добиеме кога изводите $y'$ и $y''$ ќе ги изразиме со формулите:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad , \quad y'' = \frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

и ќе ги замениме во изразот за $K$.

По средување се добива:

$$K = \frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Овде кривината е изразена во зависност од параметарот $t$.

**Пример 1.** *Да се определи кривината на кривата* $y = \sqrt{2px}$.

**1)** *во која и да било точка,*

**2)** *во точката* $\mathrm{M}(\frac{p}{2}, p)$.

Изводите на функцијата се:

$$y' = \frac{\sqrt{2p}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y'' = - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2p}}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} = - \frac{\sqrt{2p}}{4x\sqrt{x}}.$$

**1)** Користејќи ја формулата за кривина на крива, се добива:

$$K = \frac{y''}{\sqrt{\left(1 + y'^2\right)^3}} = \frac{-\dfrac{\sqrt{2p}}{4x\sqrt{x}}}{\left(1 + \dfrac{2p}{4} \cdot \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{p}{\left(2x + p\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

**2)** Користејќи го резултатот добиен за кривината на кривата во која и да било точка, за кривината на кривата во точката М се добива:

$$K(\frac{p}{2}) = \frac{p}{\left(p + p\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{p}{2p\sqrt{2p}} = \frac{1}{2\sqrt{2p}}.$$

**Пример 2.** *Да се определи кривината на кривата*

$$x = a\,(t - \sin t\,), \quad y = a\,(\,1 - \cos t\,)$$

*во точката за* $t = \frac{\pi}{2}$.

Изводите на $x$ и $y$ по параметарот $t$:

$$\dot{x} = a\,(1-\cos t), \qquad \ddot{x} = a\sin t,$$

$$\dot{y} = a\sin t, \qquad \ddot{y} = a\cos t,$$

а нивните вредности во точката за $t = \frac{\pi}{2}$ се:

$$\dot{x} = a, \quad \ddot{x} = a; \quad \dot{y} = a, \quad \ddot{y} = 0.$$

Користејќи ја формулата за кривина на крива зададена во параметарски вид, се добива:

$$K = \frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a \cdot 0 - a \cdot a}{\left(a^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2a\sqrt{2}}.$$

**Пример 3.** *Да се определи точка во која кривата* $y = \ln x$ *има екстремна кривина.*

Ќе ја определиме кривината на кривата во која и да било точка.

Изводите на функцијата $y = \ln x$ се:

$$y\,' = \frac{1}{x}, \quad y\,'' = -\frac{1}{x^2}.$$

Заменувајќи во формулата за кривина на крива се добива:

$$K = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{x^3}} = -\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Бидејќи се бара екстремна кривина (максимална) од условот за екстрем, ако првиот извод е нула, $K' = 0$, се добива:

$$K' = \frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x^2}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-2x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3},$$

$$K' = \frac{1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}} = 0,$$

од каде што следува:

$$1-2x^2=0 \qquad \text{т.е.} \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

За точката $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ функцијата $y=ln\,x$ не е дефинирана и неа нема да ја разгледуваме. Значи, точката во која постои екстремна кривина има апсциса $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, а ординатата е $y=-\dfrac{1}{2}\,ln\,2$.

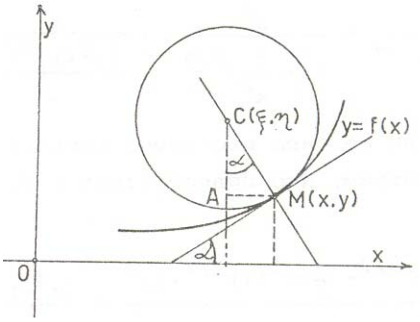
## 7. 1. Радиус, центар и кружница на кривина

По дефиниција, *реципрочната вредност на кривината во дадена точка се зема за* ***радиус на кривината***, т.е.

$$R=\frac{1}{K}=\frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Оваа дефиниција е по аналогија, на кружницата, при која кривината е реципрочна вредност од радиусот.

Во точката M од кривата $y=f(x)$ црт.6.34 ќе повлечеме нормала на кривата и од страната на конкавниот дел од кривата, од допирната точка на нормалата ќе ја нанесеме отсечката $\overline{MC}=R$. Околу точката C ќе опишеме кружница со радиус $R$.



Црт. 6. 34.

Кружницата што ја нацртавме се вика ***кружница на кривината на кривата*** во точката M, а точката C е ***центар на кружницата на кривината***.

Да ги определиме координатите на центарот на кружницата на кривината. Ќе ги означиме со $\xi$ и $\eta$.

Непосредно од цртежот имаме:

$$\xi = x - \overline{\mathrm{AM}}, \quad \eta = y + \overline{\mathrm{AC}}.$$

Од триаголникот AMC се добива:

$$\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{MC}}\, sin\, \alpha = R\, sin\, \alpha\ .$$

Изразувајќи го $sin\alpha$ преку $tg\alpha$ по познатата релација $sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ и заменувајќи $tg\ \alpha = y'$ и вредноста за $R$, се добива:

$$\overline{\mathrm{AM}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^{\,2}}} \cdot \frac{\left(1+y'^{\,2}\right)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{y'}{y''}\left(1+y'^{\,2}\right),$$

а за

$$\xi = x - \frac{y'}{y''}\left(1+y'^{\,2}\right).$$

Од триаголникот AMC се добива:

$$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{MC}}\, cos\, \alpha = R\, cos\, \alpha.$$

Изразувајќи го $cos\alpha$ преку $tg\alpha$ по познатата релација $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ и заменувајќи $tg\alpha = y'$ и вредноста за $R$, се добива:

$$\overline{\mathrm{AC}} = \frac{\left(1+y'^{\,2}\right)^{\frac{3}{2}}}{y''} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^{\,2}}} = \frac{1+y'^{\,2}}{y''},$$

а за

$$\eta = y + \frac{1+y'^{\,2}}{y''}.$$

Равенката на кружницата на кривината ќе биде

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2.$$

На секоја точка М од кривата $y=f(x)$ одговара соодветна кружница на кривината. Малиот лак на кривата (во близина на точката М) можеме да го сметаме како лак на кружницата на кривината, допуштајќи притоа мала грешка. Затоа, кружницата на кривината може да ни послужи за поточно цртање на кривата во близина на точката М. Но, може од истите причини приближно лакот на кривата над еден интервал да се замени со лак од кружницата на кривината (конструкција на елипса со помош на кружници на кривина).

Ако претпоставиме дека точката М се движи по кривата, тогаш соодветно центрите на кружницата на кривината ќе се движат по некоја крива. *Кривата што ќе ја опишат центрите на кружницата на кривината се вика* ***еволута****, на дадената крива. Со други зборови,* ***еволутата е геометриско место на центрите на кружницата на кривината****. Кривата* $y=f(x)$ *во однос на која се формира еволутата се вика* ***еволвента.***

*Двете равенки*

$$\xi = x - \frac{y'}{y''}\left(1 + y'^{\,2}\right), \qquad \eta = y + \frac{1 + y'^{\,2}}{y''},$$

*ја изразуваат равенката на еволутата во параметарски вид.* Параметар е апсцисата $x$, евентуално за параметар може да се земе и $y$.

**Пример 1.** *Да се состави равенка на еволута на кривата*

$$y = \sqrt{2px}\ .$$

Изводите на функцијата изразени преку $y$ се:

$$y' = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}, \qquad y'' = -\frac{p \cdot 2p}{2 \cdot 2px\sqrt{2px}} = -\frac{p^2}{2px\sqrt{2px}} = -\frac{p^2}{y^3},$$

па заменувајќи ги во формулите за $\xi$ и $\eta$, се добива:

$$\xi = x - \frac{y'}{y''}\left(1 + y'^{\,2}\right) = x + \frac{1}{p}\ (y^2 + p^2),$$

$$\eta = y + \frac{1}{y''}\left(1 + y'^{\,2}\right) = -\frac{y^3}{p^2}\ .$$

Ако во првата равенка замениме $x = \dfrac{y^2}{2p}$, се добиваат параметарските равенки на еволутата во следниов вид:

$$\xi = 3\,\frac{y^2}{2p} + p, \qquad \eta = -\,\frac{y^3}{p^2}.$$

Во вообичаена симболика тие можат да се запишат и во вид:

$$x = 3\,\frac{t^2}{2p} + p, \qquad y = -\frac{t^3}{p^2}.$$

За да ја добиеме равенката на еволутата во имплицитен вид ќе го елиминираме параметарот од равенките. За таа цел равенките ќе ги решиме соодветно по $t^2$ и $t^3$, т.е.

$$t^2 = \frac{2p}{3}\,(x-p), \qquad t^3 = -y\,p^2.$$

Со степенување на овие равенки со 3 и 2 соодвено, се добива:

$$t^6 = \frac{8p^3}{27}\,(x-p)^3, \qquad t^6 = y^2\,p^4.$$

Од еднаквоста на левите страни следува и еднаквост на десните

$$\frac{8p^3}{27}\,(x-p)^3 = y^2\,p^4,$$

од каде што се добива равенката на еволутата во имплицитен вид:

$$y^2 = \frac{8}{27p}\,(x-p)^3.$$

## 8. ПРИБЛИЖНО РЕШАВАЊЕ НА РАВЕНКИ

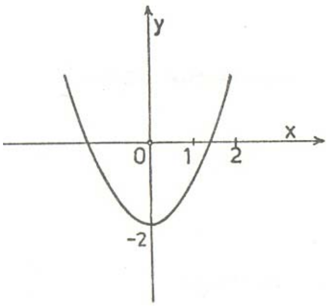
Ќе се задржиме конкретно на графичкиот начин на решавање на равенките и само на една од повеќето нумерички методи за решавање на равенките. Трансцендентните равенки и алгебарските равенки од повисок ред можно е многу практично да се решаваат по методите што овде ќе ги изнесеме. Постапката се однесува само за определување на реалните корени на равенките.

## 8. 1 Графичко решавање на равенки

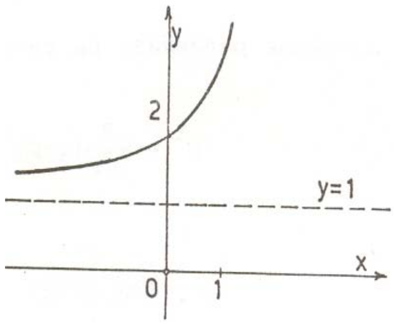
Нека е потребно да се определат корените на равенката $f(x)=0$. Оформувајќи ја функцијата $y=f(x)$, јасно е дека корените на равенката $f(x) = 0$ ќе бидат апсцисите на пресеците на функцијата $y = f(x)$ со $x$-оската. Кога ќе се нацрта графикот на функцијата $y=f(x)$, со мерење ќе се определат корените на равенката $f(x)=0$. Меѓутоа, и цртањето на графикот на функцијата и определувањето на пресечните точки со $x$-оската можеме да ги извршиме приближно, па затоа ќе кажеме дека на овој начин ги добиваме приближните вредности на корените на равенката.

**Пример 1.** *Да се определат приближно корените на равенката* $x^2 - 2 = 0$.

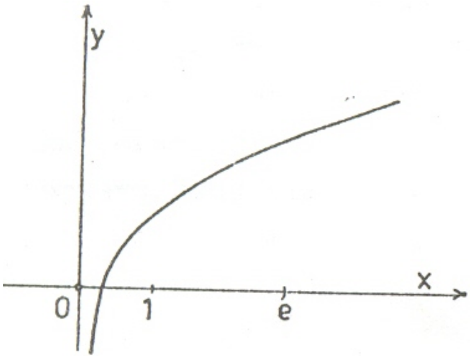
За таа цел ја формираме функцијата $y=x^2-2$. Од графикот на оваа функција (црт,6.35) уочуваме дека равенката има два корена (два пресека со $x$-оска). Апсцисите на пресечните точки (односно корените) приближно се $x_1 \approx 1{,}4$ и $x_2 \approx -1{,}4$.



Црт. 6. 35.



Црт. 6. 36.



Црт. 6. 37.

**Пример 2.** Равенката $e^x+1 = 0$ нема реални корени бидејќи функцијата $y= e^x+1$ (црт.6.36) не ја сече $x$-оската.

**Пример 3.** *Да се определи приближно решение на равенката* $\ln x+1=0$.

Равенката $\ln x+1=0$ има еден корен приближно рамен на 0,34. Ова го констатираме, мерејќи ја апсцисата на пресечната точка на графикот на функцијата $y = \ln x +1$ ( црт.6.37 ) со $x$-оската.

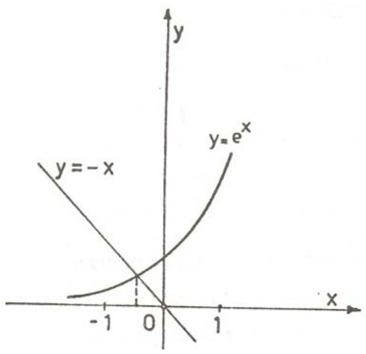
Многу често поедноставно е равенката $f(x) = 0$ да се претстави во вид на равенство од овој вид

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0, \quad \text{односно} \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x).$$

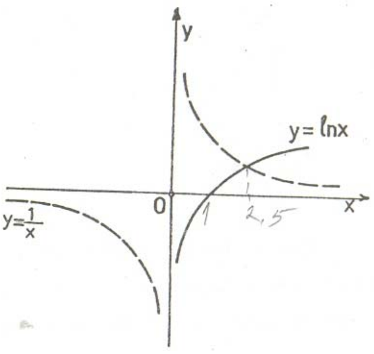
Во овој случај се формираат функциите $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ и се мерат апцисите на пресечните точки на овие криви, што всушност се корени на равенката $f(x)=0$. Како ќе се формираат изразите $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ зависи од видот на равенката, но битно е да се оформат така, што да биде поедноставно цртањето на графиците на функциите $y=\varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$.

**Пример 4.** *Да се реши равенката* $e^x+x=0$.

Ќе ги формираме функциите $y=e^x$ и $y=-x$ бидејќи од $e^x+x=0$ следува $e^x = -x$. Апсцисата на пресечната точка на овие криви (црт.6.38) е $x = -0{,}5$. Бидејќи кривите се сечат само во една точка, разгледуваната равенка има само еден корен.



Црт. 6. 38.



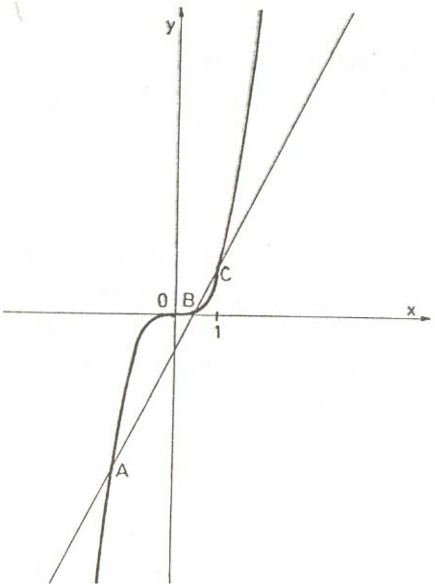
Црт. 6. 39.

**Пример 5.** *Да се реши равенката* $x \ln x - 1 = 0$.

Равенката ќе ја напишеме во следниов вид: $\ln x = \dfrac{1}{x}$. .

Кривите $y = \ln x$ и $y = \dfrac{1}{x}$ се сечат само во една точка, (црт.6.39), па според тоа равенката $x \ln x - 1 = 0$ има само еден корен, и тоа $x \approx 2{,}5$. Непрактично е во овој случај равенката да се изрази во вид $x \ln x = 1$, бидејќи цртањето на графикот на функцијата $y = x \ln x$ е нешто потешко.

**Пример 6.** *Да се реши приближно равенката* $x^3-2x+1=0$.



Црт. 6. 40.

Дадената равенка ќе ја напишеме во следниов вид

$$x^3 = 2x-1 .$$

Графиците на функциите $y=x^3$ и $y=2x-1$ се сечат во точките A, B и C. Корените на оваа равенка (ги има три) се апсци-сите на пресечните точки. Од црт.6.40 читаме дека

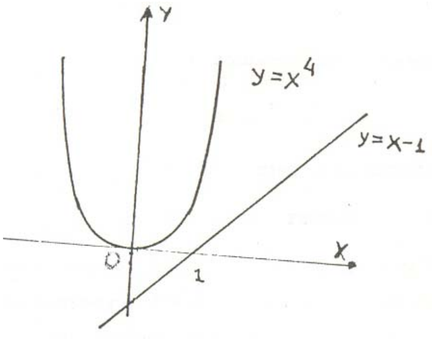
$$x_1 \approx -1{,}6 \text{ , } x_2 \approx 0{,}6, \; x_3 \approx 1.$$

**Пример 7.** Равенката

$$x^4-x+1 = 0$$

нема реални корени, бидејќи графиците на функциите $y=x^4$ и $y=x-1$ не се сечат (црт.6.41).

Графичкиот начин за решавање на равенките служи најчесто како помошно средство за многу едноставно да се определи бројот на корените на равенката и да се определи приближно вредноста на коренот.

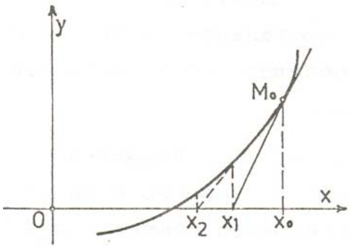


Црт. 6. 41.

Резултатите добиени од графичкиот начин се подложуваат на уточнување со нумеричките методи. Со нумеричките методи врз основа на една приближна вредност на коренот се пресметува следната поточна вредност. При секоја од овие методи една иста постапка се повторува повеќе пати, сѐ додека не се добие вредноста на коренот со однапред бараната точност.

## 8. 2. Метод на Њутн

Нека со графичкиот начин е определена приближната вредност $x_0$ на еден корен од равенката $f(x) = 0$. Нека графикот на кривата, $y=f(x)$ што е во врска со оваа задача е прикажан на црт.6.42. Низ точката $M_0(x_0,f(x_0))$ ќе повлечеме тангента на кривата и ќе го определиме пресекот на тангентата со $x$-оската, што всушност ќе биде првата поточна вредност на бараниот корен на равенката $f(x) = 0$.



Црт. 6. 42.

Од цртежот е очигледно дека пресечната точка на тангентата и $x$-оската е поблиску до коренот, (пресекот на кривата и $x$-оската ).

Ќе ја составиме равенката на тангентата. Таа го има следниов вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ако замениме $y$=0, ќе ја добиеме апсцисата на пресекот (првата поточна вредност на коренот), која ќе биде:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Со $x_1$ е означена апсцисата на пресекот, првата приближна вредност добиена по овој метод. За да ја добиеме следната поточна вредност на коренот во однос на $x_1$, постапката ќе ја повториме. Ќе повлечеме тангента низ точката $M_1(x_1, f(x_1))$ и повторно ќе го побараме пресекот на тангентата и $x$-оската. Вредноста ќе ја означиме со $x_2$ и ќе се добие од претходната врска, со таа разлика што сега наместо $x_0$ ќе се замени веќе добиеното $x_1$, т.е.

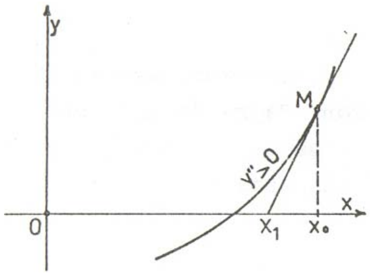
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Повторувајќи ја постапката ќе се добие низа на приближни вредности $x_3$, $x_4$, … , $x_n$ која конвергира кон бараното решение, а сите тие се добиваат по формулата:

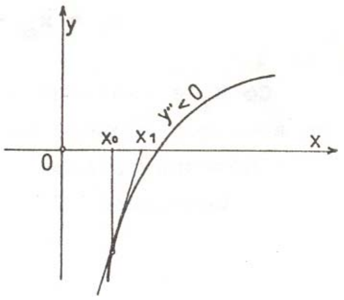
$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Колку пати ќе се повтори постапката, зависи од точноста со која го бараме коренот. Обично се прецизира на колку децимали треба да се определи коренот, па во врска со тоа постапката се повторува сѐ додека разликата помеѓу две последователни вредности на коренот не стане помала од однапред определен број. На пример, ако се сака вредноста на коренот да се пресмета со три точни децимали, постапката ќе се повторува додека разликата помеѓу две последователни вредности на коренот не стане помала од 0,0001.

Низата вредности $x_1$, $x_2$, … , $x_n$ не конвергира секогаш кон бараното решение. Поради ова, потребно е да се води сметка при изборот на првото приближно решение $x_0$. Ќе наведеме само дека постапката ќе нѐ води кон решението ако првата приближна вредност се земе од онаа страна на кривата, во која знакот на функцијата и знакот на нејзиниот втор извод се совпаѓаат (црт.6.43 и 6.44).



Црт. 6. 43.



Црт. 6. 44.

Методот што овде го изнесовме спаѓа во групата на нумеричките методи. Само во изнесувањето ние се користиме со геометриската интерпретација, инаку при користењето на овој метод не е потребно цртање на графикот, ниту цртање на тангентите.

Ќе дадеме уште една интерпретација на изложениот метод. Тргнувајќи од релацијата

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

врз основа на гл.IV, **т.6 теорема 4** ја добиваме следнава релација:

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \alpha, \quad \alpha = \alpha(\Delta x)$$

каде што $\alpha$ е бескрајно мала големина. Релацијата можеме да ја напишеме и во вид:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

а бидејќи $\alpha \cdot \Delta x$ е, исто така, бескрајно мала големина, по по изоставање на истата се добива:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

Ако, разгледувајќи ја функцијата $y=f(x)$, ги бараме вредностите на $x$ за кои $y=0$, со други зборови го бараме коренот на равенката $f(x)=0$, при претпоставка дека $x=x_0$ е приближна вредност на коренот, а $x_0+h$ е поточната вредност (непозната), заменувајќи во релацијата, се добива:

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,h,$$

односно $f(x_0) + h\,f'(x_0) = 0$ бидејќи е $f(x_0+h) = 0$.

Очигледно е дека поточна вредност на коренот се добива кога на $x_0$ (приближната вредност) се додаде $h$ (корекцијата), што се одредува по формулата:

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Вредноста $x_0+h$ е нешто поточна вредност на коренот, но не и апсолутно точна вредност, од причина што ја занемаривме големината $\alpha \cdot \Delta x$. Ќе означиме $x_0+h = x_1$, па за $x_1$ повторно ќе ја пресметаме корекцијата $h_1$ од истата врска, од која добиваме дека

$$h_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

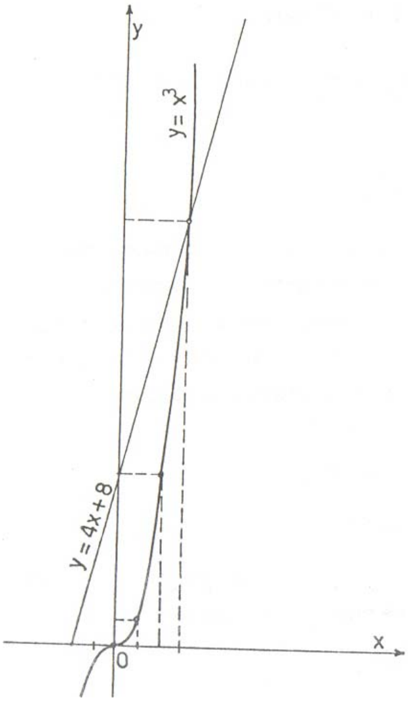
Сумата $x_1+h_1$ е нова поточна вредност на коренот на равенката.

Ќе означиме $x_1+h_1 = x_2$, па повторно ја пресметуваме корекцијата $h_2$. Оваа постапка ќе ја повторуваме сѐ додека не ја постигнеме предвидената точност, односно додека разликата на две последователни вредности на коренот не биде помала од некој број ε, што ќе го избереме согласно со бараната точност.

За илустрациаја ќе покажеме како се применува опишаниот метод на два примера.

**Пример 1.** *Да се пресмета по методот на тангенти со точност до* 0,01 *реалниот корен на равенката*

$$x^3 - 4x - 8 = 0.$$



Црт. 6. 45.

Левата страна на равенката ќе ја означиме со $f(x)$, т.е.

$$f(x) = x^3 - 4x - 8.$$

За да го определиме бројот на реалните корени, ќе се послужиме со графичкиот метод, имено ќе ги нацртаме графиците на функциите $y=x^3$ и $y=4x+8$ (црт.6.45), од причина што $x^3-4x-8=0$ може да се напише како $x^3= 4x+8$ и го разгледуваме бројот на нивните пресечни точки.

Во случајов се добива една пресечна точка.

Според тоа, дадената равенка има еден реален корен и тоа позитивен.

Изводите на функцијата

$$f(x) = x^3 - 4x - 8$$

се:

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \quad \text{и} \quad f''(x) = 6x .$$

Вредноститеа на функцијата и вториот извод за $x=3$ се:

$$f(3) = 7, \qquad f''(3) = 18.$$

Бидејќи и функцијата и вториот извод имаат ист знак, тогаш за почетна точка $x_0$ во нашето пресметување ќе ја земеме точката $x_0 = 3$.

Првото приближување го наоѓаме по формулата:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{7}{23} = 2{,}69.$$

Второто приближување ќе биде:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2{,}69 - \frac{f(2{,}69)}{f'(2{,}69)} = 2{,}69 - \frac{0{,}71}{17{,}72} \approx 2{,}65.$$

Третото приближување ќе биде:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2{,}65 - \frac{f(2{,}65)}{f'(2{,}65)} = 2{,}65 - \frac{0{,}19}{17{,}06} \approx 2{,}649.$$

Разликата

$$|\, x_2 - x_3 \,| = |\, 2{,}65 - 2{,}649 \,| = 0{,}001,$$

значи дека $x = 2{,}65$ е коренот со бараната точност.

**Пример 2.** *Да се реши равенката*

$$x = tg\, x$$

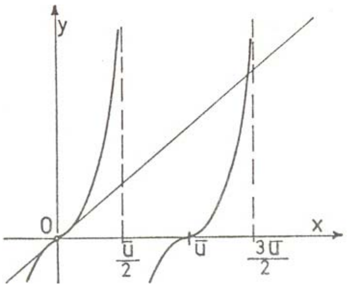
*по Њутнов метод, барајќи го најмалиот позитивен корен со точност до* 0,01.

Од конструкцијата на графиците на функциите

$$y = tg\, x \quad \text{и} \quad y = x$$

(црт.6.46), заклучуваме дека за почетно приближување можеме да ја земеме точката

$$x_0 = \frac{3\pi}{2} = 4{,}71239.$$



Црт. 6. 46.

Дадената равенка ќе ја трансформираме во облик

$$sin\,x\ \ -x\,cos\,x = 0.$$

Левата страна на равенката ќе ја означиме со $f\,(x)$ т.е.

$$f\,(x) = sin\,x\ \ -x\,cos\,x.$$

Првиот извод на оваа функција е

$$f\,'\,(x)\ = x\,sin\,x$$

За првото приближување се добива:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4{,}71239 - \frac{-1}{-4{,}712} = 4{,}5004.$$

За второто приближување се добива:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 4{,}5004 - \frac{0{,}0291}{4{,}399} = 4{,}49343.$$

Третото приближување ќе биде:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 4{,}49343 - \frac{0{,}00003}{0{,}04385} = 4{,}49274.$$

Бидејќи

$$x_2 - x_3 = 4{,}49343 - 4{,}49274 = 0{,}00069 < \ 0{,}001$$

следува дека $x_3$ е коренот што го бараме.

## ГЛАВА VII

# НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

## 1. ПРИМИТИВНА ФУНКЦИЈА. НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Основната задача на диференцијалното сметање се состои во наоѓање на изводот $f'(x)$ или диференцијалот $f'(x)dx$, кога е зададена диференцијабилната функција $f(x)$. Операцијата со која го наоѓаме изводот на дадената функција ја нарековме диференцирање.

Овде ќе ја разгледаме обратната задача, која се состои во тоа што за дадена функција $f(x)$ се определува функцијата $F(x)$ чиј извод е рамен на $f(x)$, или која има за диференцијал $f(x)dx$, т.е.

$$F'(x) = f(x)$$

или

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Функцијата $F(x)$ што треба да се определи се вика примитивна функција за функцијата $f(x)$.

*Секоја функција $F(x)$, $x\in(a,b)$, чиј извод е рамен на дадената функција $f(x)$ или чиј диференцијал е рамен на дадениот диференцијал $f(x)dx$ во сите точки од дадениот интервал се вика* ***примитивна функција на функцијата*** $f(x)$.

Ако претпоставиме дека сме нашле која и да било примитивна функција $F(x)$, за дадена функција $f(x)$, ќе биде задоволено равенството $F'(x)=f(x)$. Но, бидејќи извод од константа е рамен на нула, ќе имаме, исто така,

$$[\,F(x)+C\,]\,' = f(x)$$

т.е. покрај функцијата $F(x)$ и функцијата $F(x)+C$ е примитивна функција на функцијата $f(x)$.

**Пример.** *Нека* $f(x)=3x^2$ .

Примитивна функција за оваа функција е функцијата чиј извод е $3x^2$, а тоа е функцијата $x^3$, затоа што $(x^3)' = 3x^2$. Примитивната функција не е единствена, затоа што истиот извод го имаат и функциите $x^3+2$, $x^3-6$ и воопшто $x^3+C$ ($C$– произволна константа), т.е. тие се примитивни функции на функцијата $3x^2$.

Ќе покажеме дека *кои и да било две примитивни функции на дадена функција, определени на интервалот* $(a,b)$ *се разликуваат само за константа.*

Нека се $F_1(x)$ и $F_2(x)$ две примитивни функции за функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b]$, тогаш

$$F_1'(x) = f(x); \qquad F_2'(x) = f(x).$$

Ако ја разгледаме функцијата

$$F(x) = F_2(x) - F_1(x)$$

имаме:

$$F\,'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

т.е.

$$F(x) = C.$$

Навистина, со примена на Лагранжовата теорема на функцијата $F(x)$ во интервалот $[a,b]$ за кој и да било $x\in[a,b]$ имаме:

$$F(x) - F(a) = (x-a)\,F\,'(\xi) \quad \text{каде што} \quad a < \xi < b$$

Бидејќи е $F\,'(\xi) = 0$, следува:

$$F(x) - F(a) = 0 \quad \text{или} \quad F(x) = F(a).$$

Значи, за секој $x \in [a,b]$, $F(x) = F(a)$, т.е. функцијата $F(x)$ има константна вредност. Ако константата $F(a)$ ја означиме со $C$, имаме:

$$F_2(x) - F_1(x) = C$$

или

$$F_2(x) = F_1(x) + C,$$

што требаше да се докаже.

Во врска со докажаното можеме да заклучиме: *Ако* $F(x)$ *е која и да било примитивна функција на функцијата* $f(x)$, *тогаш множеството од сите примитивни функции на функцијата* $f(x)$ *се изразува со збирот* $F(x)+C$, *каде што* $C$ *е произволна константа.*

*Множеството од сите примитивни функции* $F(x)+C$ *на функцијата* $f(x)$ *се вика* ***неопределен интеграл*** *од* ***функцијата*** $f(x)$ *и се означува со симболот*

$$\int f(x)dx$$

(кој се чита интеграл од $f(x)\,dx$).

Од дефиницијата за неопределен интеграл и докажаното за примитивна функција

$$\int f(x)dx = \{F(x)+C;\ C \in R\}. \tag{1}$$

Вообичаено е да се пишува

$$\int f(x)dx = F(x) + \mathrm{C}$$

и ние ќе ја користиме оваа ознака.

*Операцијата со која доаѓаме до примитивната функција, односно неопределениот интеграл за дадена функција* $f(x)$ *се вика* ***интегрирање***.

*Функцијата* $f(x)$ *се вика* ***подинтегрална функција***, $f(x)dx$ *е* ***подинтегрален израз***, *а знакот* $\int$ *е* ***знак за интеграл***.

*Кривите*

$$y = F(x) + C$$

*се викаат* ***интегрални криви*** *за кривата определена со равенката*

$$y = f(x).$$

Неопределениот интеграл геометриски претставува семејство криви, од кои секоја може да се добие со паралелно пренесување на една од нив нагоре или надолу во однос на $y$-оската.

Природно е да се запрашаме дали секоја функција има примитивна функција, односно неопределен интеграл. Во теоријата на функциите се утврдуваат извесни услови врз основа на кои сигурно може да се каже за дадена класа функции има или нема примитивна функција.

Ако функцијата $f(x)$ е непрекината во интервалот $[a,b]$, за неа постои примитивна функција односно неопределен интеграл. Ова тврдење нема овде да го докажуваме. Ние понатаму ќе се сретнуваме со функции кои имаат примитивна функција.

*Делот од математиката кој се занимава со наоѓање интеграли и нивната примена се вика* ***интегрално сметање****.*

Определувањето на неопределен интеграл е сврзано со поголеми тешкотии во однос на определувањето на изводите на функциите. Интегрирањето се врши врз основа на табелата на основните интеграли, што се добива од табелата на изводите на основните елементарни функции, својствата на неопределените интеграли и двата метода: методот на замена и методот на парцијална интеграција. Во најголем број случаи се комбинираат овие два метода при наоѓањето на неопределените интеграли.

Од дефиницијата на неопределен интеграл, т.е. во врска со (1), непосредно следува дека:

**$1^0$** *извод на неопределен интеграл е рамен на подинтегралната функција.*

Со диференцирање на равенството

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

се добива:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x);$$

т.е. точноста на искажаното својство.

**$2^0$** *диференцијал од неопределен интеграл е рамен на подинтегралниот израз, т.е.*

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = d\,F(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx;$$

**$3^0$** *неопределен интеграл од извод на дадена функција е рамен на самата функција плус произволна константа,*

$$\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C;$$

**$4^0$** *неопределен интеграл од диференцијалот на некоја функција е рамен на таа функција плус произволна константа,*

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C;$$

Од овие особини се гледа дека операциите $d$ (диференцирање) и $\int$ (интегрирање), применети една по друга последователно на некоја функција во кој и да било редослед, се поништуваат, т.е. се добива функцијата. Со други зборови, *секое од тие својства го изразува фактот дека* ***интегрирањето е обратна операција од диференцирањето***.

## 2. ТАБЕЛА НА ОСНОВНИ ИНТЕГРАЛИ

Непосредно од дефиницијата на неопределен интеграл, врз основа на изводите на елементарни функции, се добива табелата на основните интеграли:

**1)** $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,$

**2)** $\int \dfrac{dx}{x} = ln\, x + C,$

**3)** $\int sin\, x\, dx = -\, cos\, x + C,$

**4)** $\int cos\, x\, dx = sin\, x + C,$

**5)** $\int \dfrac{dx}{cos^2 x} = tg\, x + C,$

**6)** $\int \dfrac{dx}{sin^2 x} = -ctg\, x + C,$

**7)** $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\, a} + C,$

**8)** $\int e^x dx = e^x + C,$

**9)** $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C, \\ -arcctgx + C, \end{cases}$

**10)** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} arcsin\, x + C, \\ -arccos\, x + C, \end{cases}$

**11)** $\int ch\, x\, dx = sh\, x + C,$

**12)** $\int sh\, x\, dx = ch\, x + C,$

**13)** $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = th\, x + C,$

**14)** $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cth\, x + C,$

**15)** $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\, ln\, \dfrac{1+x}{1-x} + C,$

**16)** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = ln\left(x + \sqrt{x^2+k}\right) + C,$ $k \neq 0$ конст.

Точноста на овие равенства може да се провери со диференцирање на десните страни. Изводот на изразот на десната страна треба да биде рамен на подинтегралната функција.

Интегралите од оваа табела треба да се знаат на памет за да се олесни добивањето на интегралите од други функции.

## 3. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

**$1^0$** *Константен множител (различен од нула) може да се изнесе пред знакот на интегралот* т.е. ако $A \neq 0$, тогаш

$$\int A\, f(x) dx = A \int f(x) dx .$$

Бидејќи

$$d\left(\int A\, f(x) dx\right) = A\, f(x) dx$$

и

$$d\left(A \int f(x) dx\right) = A d\left(\int f(x) dx\right) = A\, f(x) dx$$

следува:

$$d\left(\int A\, f(x) dx\right) = d\left(A \int f(x) dx\right),$$

а оттаму и точноста на даденото својство.

**$2^0$** *Неопределен интеграл од алгебарска сума на конечен број непрекинати функции е рамен на алгебарска сума на интегралите на одделните функции*, т.е.

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ \dots \ \pm f_m(x)] dx =$$

$$= \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \ \dots \pm \int f_m(x) dx .$$

Бидејќи

$$d\left(\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ \dots \ \pm f_m(x)] dx\right) =$$

$$= [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ \dots \ \pm f_m(x)] dx =$$

$$= f_1(x)\, dx \pm f_2(x)\, dx \pm \ \dots \ \pm f_m(x)\ dx =$$

$$= d\int f_1(x)\, dx \pm d\int f_2(x)\, dx \pm \ \dots \ \pm d\int f_m(x) dx ,$$

и

$$d\left[\int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \ \dots \ \int f_m(x) dx\right] =$$

$$= d\int f_1(x)\, dx \pm d\int f_2(x)\, dx \pm \ \dots \ \pm \int f_m(x) dx ,$$

следува точноста на наведеното својство.

**Пример 1.**

$$\int 2x^{10}dx = 2\int x^{10}dx = 2\frac{x^{11}}{11} + C.$$

По изнесување на константата пред интегралот се користиме со интегралот наведен во табелата.

**Пример 2.**

$$\int 4e^{x}dx = 4\int e^{x}dx = 4\,e^{x} + C.$$

**Пример 3.**

$$\int \left(x^{3} + e^{x}\right)dx = \int x^{3}dx + \int e^{x}\,dx = \frac{x^{4}}{4} + e^{x} + C.$$

**Пример 4.**

$$\int \left(7x^{4} - \frac{8}{x}\right)dx = \int 7x^{4}dx - \int \frac{8}{x}dx =$$

$$= 7\int x^{4}dx - 8\int \frac{dx}{x} = \frac{7x^{5}}{5} - 8\,ln\,x + C.$$

## 4. МЕТОД НА ЗАМЕНА

Методот на замена често се користи при наоѓање на неопределените интеграли. Нека $f\,(x)$ е непрекината функција на интервалот $[a,b]$. Интегралот $\int f\left(x\right)dx$ со овој метод може да се упрости заменувајќи ја променливата на интегрирањето $x$ со нова променлива $t$ преку $x$=φ($t$), каде што φ($t$) и нејзиниот извод се непрекинати функции на интервалот $[t_1,t_2]$ при што $a \leq$φ $(t) \leq b$ за $t\in[t_1,t_2]$. Притоа, се мисли дека со смената (погодно избрана според видот на интегралот што се решава) ќе се добие друг интеграл што спаѓа во групата основни интеграли или интегралот го сведува во облик кој лесно се наоѓа.

Ако во интегралот $\int f(x)dx$ сакаме да ја извршиме смената $x=\varphi(t)$ ќе биде потребно да се определи диференцијалот од $x$, кој ќе биде $dx=\varphi'(t)dt$, па потоа $x$ и $dx$ да се заменат во интегралот. По заменувањето се добива:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Тоа ќе биде еден друг интеграл по променливата $t$.

Очигледна е ползата од примената на овој метод во решавањето на интегралот

$$\int (x+4)^6\,dx.$$

Споредувајќи со интегралите во табелата, се забележува дека овој интеграл се разликува од интегралот $\int x^n\,dx$, само по тоа што наместо променливата $x$ на шести степен, стои сумата $x+4$ на шести степен. Со смена треба да се доведе до видот на интегралот наведен во табелата. Конкретно во оваа задача ќе треба да се замени $x+4=t$. Диференцирајќи ја смената се добива $dx=dt$, што по замена го дава интегралот $\int t^6\,dt$, а согласно со интегралот во табелата е:

$$\int t^6\,dt = \frac{t^7}{7} + C.$$

По добивање на резултатот, ако се вратиме на старата променлива, со оглед на тоа дека $t=x+4$, се добива:

$$\int (x+4)^6\,dx = \frac{(x+4)^7}{7} + C.$$

**Пример 1.** *Да се најде интегралот*

$$\int (4x+5)^3\,dx.$$

Со воведување на смената: $4x + 5 = t,\ 4dx = dt$, се добива:

$$\int (4x+5)^3\,dx = \int t^3\,\frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int t^3 dt = \frac{1}{4}\frac{t^4}{4} + C = \frac{t^4}{16} + C.$$

Заменувајќи $t = 4x+5$, се добива:

$$\int (4x+5)^3\,dx = \frac{(4x+5)^4}{16} + C.$$

**Пример 2.**

$$\int e^{x+3}dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{x+3} + C.$$

Смена: $t = x+3$, $dt = dx$.

**Пример 3.**

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{dt}{t} = ln\, t + C = ln\,(x+1) + C.$$

Смена: $x+1 = t$, $dx = dt$.

**Пример 4.**

$$\int \frac{dx}{5x-1} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5} ln\,(5x-1) + C.$$

Смена: $5x-1 = t$, $5\, dx = dt$, $dx = \frac{1}{5} dt$.

**Пример 5.**

$$\int xe^{x^2} dx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C\,.$$

Смена: $x^2 = t$, $2xdx = dt$, $xdx = \frac{dt}{2}$.

**Пример 6.** Интегралот

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$$

со смената $x=at$ се сведува на табличен интеграл.

Со диференцирање на смената се добива $dx = a\, dt$ и заменувајќи во интегралот се добива:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{a\,dt}{a^2t^2 + a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C\,.$$

**Пример 7.** Интегралот

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$$

со неколку трансформации се разложува на два едноставни интеграли:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a}.$$

Со смена $x-a = t$ за првиот интеграл и смена $x+a = t$ за вториот интеграл, се добива:

$$\frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} = \frac{1}{2a}\ ln\ (x-a); \qquad \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} = \frac{1}{2a}\ ln\ (x+a),$$

односно конечно:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \frac{x-a}{x+a} + C.$$

**Пример 8.** Интегралот

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

со смената $x=at,\ dx=a\ dt$ се сведува на табличен интеграл, т.е.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}} = arcsin\ t + C = arcsin \frac{x}{a} + C.$$

**Пример 9.** Интегралот

$$\int sin^2 x\, dx$$

многу едноставно ќе се најде ако подинтегралната функција се изрази во друг облик со тригонометриската врска

$$sin^2 x = \frac{1-cos\,2x}{2}.$$

Постапката е како што следува:

$$\int sin^2 x\, dx = \int \frac{1-cos\,2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int (1-cos\,2x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int cos\,2x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{sin\,2x}{4} + C.$$

Аналогно интегралот

$$\int cos^2 x\, dx$$

се наоѓа со помош на тригонометриската врска

$$cos^2 x = \frac{1 + cos\, 2x}{2}.$$

Конечно се добива:

$$\int cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{sin\, 2x}{4} + C.$$

## 5. МЕТОД НА ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА

Методот на парцијална интеграција многу често се користи при наоѓањето на неопределените интеграли. Со овој метод наоѓањето на еден интеграл се сведува на наоѓање на друг, при што овој добиен интеграл може да се најде полесно.

Ако $u$ и $v$ се две диференцијабилни функции, познато ни е дека за нив важи релацијата

$$d\,(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du,$$

од каде што следува:

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du.$$

Ако се интегрираат двете страни одделно, се добива:

$$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du,$$

односно

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

*Добиената равенка е* ***формула за парцијална интеграција****.*

Примената на овој метод ќе ја прикажеме на интегралот

$$\int xe^x dx.$$

Ќе избереме:

$$u = x, \quad dv = e^x dx.$$

Потребно е да се најде $du$ (ќе се добие од $u=x$ преку диференцирање), а имено $du = dx$ и $v$ (ќе се добие од $dv=e^x dx$ со интегрирање), имено $v = \int e^x dx = e^x$. Заменувајќи ги изразите за избраното $u$ и $dv$ и најдените изрази за $v$ и $du$ во формулата за парцијална интеграција, се добива:

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\,\underbrace{dx}_{du} \;.$$

Очигледно интегралот на десната страна лесно се наоѓа и конечниот резултат е:

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C = e^x\,(x-1) + C.$$

Изборот на $u$ и $dv$ во подинтегралниот израз не е наполно произволен. Во случајов не би била корисна примената на овој метод, ако се земе:

$$u = e^x, \qquad du = e^x dx;$$

$$dv = xdx, \qquad v = \int xdx = \frac{x^2}{2},$$

што доведува до

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}\,e^x - \int \frac{x^2}{2}\,e^x dx\,.$$

Интегралот до кој се доаѓа со овој метод треба да биде поедноставен, а при овој избор на $u$ и $dv$ е обратно, тој е посложен.

Не постои општо правило по кое би знаеле да ги избереме $u$ и $dv$. Ако една комбинација не доведува до поедноставен интеграл, обично се проба со другата варијанта.

**Пример 1.**

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{xdx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

При овој интеграл избираме:

$$u = \ln x, \qquad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx, \qquad v = x.$$

**Пример 2.** *Да се најде интегралот*

$$\int x\sin x\,dx$$

Ќе избереме: $u = x, \qquad dv = \sin x\,dx.$

Пресметуваме: $du = dx\,, \quad v = \int \sin x\,dx \ = -\cos x.$

Согласно формулата за парцијална интеграција се добива:

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

**Пример 3.** *Да се најде интегралот*

$$\int arctg\ x\ dx$$

Ќе избереме: $u = arctg\ x, \quad dv = dx,$ тогаш

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad v = x.$$

Според тоа,

$$\int arctg\ x\ dx \ = x\ arctg\ x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Интегралот што се добива ќе го најдеме со смена:

$$1+x^2 = t, \quad 2x\,dx = dt, \quad x\,dx = \frac{dt}{2},$$

па се добива:

$$\int arctg\ x\ dx \ = x\ arctg\ x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = x\,arctg\ x - \frac{1}{2}\ln\,(1+x^2) + C.$$

**Пример 4.** Интегралот

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$$

сега ќе го најдеме по методот на парцијална интеграција, при што ќе земеме:

$$u = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{и} \quad dv = dx,$$

од каде што:

$$du = \frac{-\,x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad v = x.$$

Заменувајќи во формулата за парцијална интеграција, се добива:

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx,$$

додавајќи во броителот на интегралот на десната страна $+a^2$ и $-a^2$, следува:

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{\left(a^2 - x^2\right) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} .$$

Првиот добиен интеграл на десната страна е дадениот интеграл $I$, а вториот е од **т.4** , пример 8. , па

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 arcsin\, \frac{x}{a} + C_{1,}$$

од каде што решавајќи по $I$, се добива:

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} arcsin\, \frac{x}{a} + C.$$

**Пример 5.** Наоѓањето на интегралот од вид

$$\int e^x \sin x\, dx$$

доведува до наоѓање и на интегралот

$$\int e^x \cos x\, dx .$$

Поради пократко испишување ќе ги воведеме ознаките $I_1$ за интегралот $\int e^x \sin x\, dx$ и $I_2$ за интегралот $\int e^x \cos x\, dx$.

Применувајќи го методот на парцијална интеграција за интегралот $\int e^x \sin x\, dx$ при избор

$$u = e^x, \quad dv = \sin x\, dx; \qquad du = e^x dx, \quad v = -\cos x,$$

се добива:

$$I_1 = \int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx,$$

односно:

$$I_1 = \int e^x \sin x \, dx = -\, e^x \cos x + I_2.$$

За да добиеме уште една врска помеѓу интегралите, ќе го примениме методот на парцијална интеграција и на вториот интеграл, па се добива:

$$I_2 = \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx,$$

односно:

$$I_2 = e^x \sin x - I_1.$$

Со решавање на системот

$$I_1 = -\, e^x \cos x + I_2.$$

$$I_2 = e^x \sin x - I_1,$$

се добиваат разгледуваните интеграли:

$$I_1 = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x); \qquad \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C,$$

$$I_2 = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x); \qquad \int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

## Задачи за вежбање

Да се најдат следниве интеграли:

| | |
|---|---|
| **1)** $\int 2x^3 dx$; | Одг.: **1)** $\frac{x^4}{2} + C.$ |
| **2)** $\int 3 \sin x \, dx$; | **2)** $-3 \cos x + C.$ |
| **3)** $\int \left(x^2 + 3\cos x\right) dx$; | **3)** $\frac{x^3}{3} + 3 \sin x + C.$ |
| **4)** $\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x}\right) dx$; | **4)** $\frac{x^3}{3} + x^2 + \ln x + C.$ |
| **5)** $\int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx$; | **5)** $2x^5 - \frac{1}{x^3} + C.$ |

| | |
|---|---|
| **6)** $\int \frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^3}\,dx$; | **6)** $\frac{x^2}{2} + 2\,ln\,x - \frac{1}{2x^2} + C.$ |
| **7)** $\int \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$; | **7)** $x\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x}\right) + C.$ |
| **8)** $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$; | **8)** $2\,\sqrt{x}\, - 4\,\sqrt[4]{x}\, + C.$ |
| **9)** $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x}\,dx$; | **9)** $\frac{2x\sqrt{x}}{3} - 3x + 6\sqrt{x}\, - lnx + C.$ |
| **10)** $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$; | **10)** $e^x + \frac{1}{x} + C.$ |
| **11)** $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx$; | **11)** $\frac{a^x}{ln\,a} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$ |
| **12)** $\int \frac{cos\,2x}{cos^2 x\; sin^2 x}\,dx$; | **12)** $-\,ctg\,x - tg\,x + C.$ |
| **13)** $\int ctg^2 x\;dx$; | **13)** $-\,ctg\,x - x + C.$ |
| **14)** $\int \frac{dx}{sin^2 x\;\; cos^2 x}$ ; | **14)** $tg\,x - \;ctg\,x + C.$ |
| **15)** $\int sin^2 \frac{x}{2}\,dx$; | **15)** $\frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C.$ |
| **16)** $\int cos^2 \frac{x}{2}\,dx$; | **16)** $\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C.$ |

| | |
|---|---|
| **17)** $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$; | **17)** $2\,arctg\,x - 3\,arcsin\,x + C$. |
| **18)** $\int\frac{x^4}{1+x^2}\,dx$; | **18)** $\frac{x^3}{3}\ -x + arctg\,x + C$. |
| **19)** $\int\left(sin\frac{x}{2}+cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$; | **19)** $x + cos\,x + C$. |
| **20)** $\int tg^2x\,dx$ ; | **20)** $tg\,x - x + C$. |
| **21)** $\int\left(m\,sh\,x + n\,ch\,x\right)dx$; | **21)** $m\,ch\,x + n\,sh\,x + C$. |
| **22)** $\int th^2x\,dx$; | **22)** $x - th\,x + C$. |
| **23)** $\int 5^x 3^{-x}\,dx$; | **23)** $\left(\frac{5}{3}\right)^x \frac{1}{ln\frac{5}{3}} + C$. |

Користејќи го методот на замена да се најдат следниве интеграли:

| | |
|---|---|
| **1)** $\int x\left(x^2-12\right)^{23}dx$; | Одг.: **1)** $\frac{1}{48}(x^2-12)^{24} + C$. |
| **2)** $\int\frac{xdx}{3-2x^2}$; | **2)** $\frac{1}{4}\ ln\,(3-2x^2) + C$. |
| **3)** $\int x^2\sqrt{x^3-9}\ dx$ | **3)** $\frac{2}{9}\left(x^3-9\right)^{\frac{3}{2}} + C$. |
| **4)** $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; | **4)** $-\sqrt{1-x^2}\ + C$. |

| | |
|---|---|
| **5)** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-9}}\,dx$; | **5)** $\sqrt{x^2+2x-9}+C.$ |
| **6)** $\int \frac{dx}{2x+3}$; | **6)** $\frac{1}{2}\,ln\,(2x+3)+C.$ |
| **7)** $\int tgx\,dx$; | **7)** $-ln\,cos\,x+C.$ |
| **8)** $\int \frac{sin\,x}{a+b\,cos\,x}\,dx$; | **8)** $-\frac{1}{b}\,ln\,(a+bcos\,x)+C.$ |
| **9)** $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)arctg\,x}$; | **9)** $ln\,(arctg\,x)+C.$ |
| **10)** $\int \frac{dx}{x\,ln^5\,x}$; | **10)** $-\frac{1}{4\,ln^4\,x}+C.$ |
| **11)** $\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2}$; | **11)** $\frac{1}{4}\,arctg^4 x+C.$ |
| **12)** $\int \frac{dx}{sin\,x}$; | **12)** $ln\left(tg\frac{x}{2}\right)+C.$ |
| **13)** $\int \frac{dx}{cos\,x}$; | **13)** $ln\left(tg\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C.$ |
| **14)** $\int \frac{sin\,2x}{sin^2\,x+3}\,dx$; | **14)** $ln\,(sin^2x+3)+C.$ |

Со примена на методот на парцијална интеграција да се најдат следниве интеграли:

| | |
|---|---|
| **1)** $\int x\,ln^2\,x\,dx$; | Одг.: **1)** $\frac{x^2}{4}(2\,ln^2x-2\,ln\,x+1)+C.$ |
| **2)** $\int x\,ln\left(x^2-1\right)dx$; | **2)** $\frac{1}{2}(x^2-1)\,ln\,(x^2-1)-\frac{1}{2}\,x^2+\mathrm{C}.$ |

| | |
|---|---|
| **3)** $\int x^2e^{-x}dx$; | **3)** $-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$. |
| **4)** $\int x^3e^{-x^2}dx$; | **4)** $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}+C$. |
| **5)** $\int x\cos x\,dx$; | **5)** $x\sin x+\cos x+C$. |
| **6)** $\int \sin(\ln x)\,dx$; | **6)** $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$. |
| **7)** $\int e^{-x}\sin x\,dx$; | **7)** $-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+C$. |
| **8)** $\int \arcsin x\,dx$; | **8)** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. |
| **9)** $\int arctg\sqrt{x}\,dx$; | **9)** $-\sqrt{x}+(1+x)\,arctg\sqrt{x}+C$. |
| **10)** $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; | **10)** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$. |

## 6. ИНТЕГРИРАЊЕ НА НЕКОИ ФУНКЦИИ

**6. 1.** Нека е даден интегралот

$$I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

кој може да се напише во следниов облик:

$$I=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

Ако ставиме $x+\frac{b}{2a}=t$, $dx=dt$, тогаш може да настапат три случаи:

**а)** $b^2 - 4ac < 0$ , може да се стави:

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2} = -k^2, \qquad k = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$$

и

$$I = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+k^2} = \frac{1}{ka}arctg\frac{t}{k} + C,$$

а по замена на $t$ и $k$

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}arctg\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C.$$

На пример:

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+5} = \int\frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2} + C.$$

**б)** $b^2 - 4ac > 0$, тогаш може да се стави:

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2} = k^2, \qquad k = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

и

$$I = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2-k^2} = \frac{1}{a}\frac{1}{2k}ln\frac{t-k}{t+k} + C,$$

а по замена на $t$ и $k$

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ ln\frac{2x+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2x+b+\sqrt{b^2-4ac}} + C.$$

На пример:

$$I = \int\frac{dx}{x^2-5x+6} = \int\frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+6-\frac{25}{4}} = \int\frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)},$$

земаме: $t = x - \frac{5}{2}$, $dt = dx$ , па

$$I = \int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot ln \frac{t - \frac{1}{2}}{t + \frac{1}{2}} + C = ln \frac{x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}}{x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}} + C =$$

$$= ln \ \frac{x-3}{x-2} + C.$$

**в)** $b^2 - 4ac = 0$, тогаш интегралот

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{at} + C = -\frac{2}{2ax+b} + C.$$

На пример:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2},$$

земајќи: $x+2 = t$, $dx = dt$, тогаш

$$I = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x+2} + C.$$

**6. 2.** Нека е даден интегралот

$$I = \int \frac{mx+n}{ax^2 + bx + c} dx,$$

каде што $m$, $n$, $a$, $b$ и $c$ се реални константи; ќе го разделиме на два интеграла:

$$I = m\int \frac{x\,dx}{ax^2 + bx + c} + \int \frac{n\,dx}{ax^2 + bx + c} .$$

Во првиот интеграл броителот да го трансформираме така, што тој да претставува извод од именителот, имено:

$$I = \frac{m}{2a} \int \frac{(2ax+b) - b}{ax^2 + bx + c} dx + \int \frac{n\,dx}{ax^2 + bx + c} .$$

$$I = \frac{m}{2a} \int \frac{2ax+b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(n - \frac{mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} .$$

Првиот интеграл се наоѓа со смената:

$$ax^2 + bx + c = t, \quad (2ax + b)\,dx = dt,$$

а вториот интеграл е интеграл од претходната **т. 6. 1**, па

$$I = \frac{m}{2a}\int\frac{dt}{t} + \frac{2an-bm}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

$$I = \frac{m}{2a}\ln t + \frac{2an-bm}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Враќајќи се на старата променлива се добива:

$$I = \frac{m}{2a}\ln(ax^2+bx+c) + \frac{2an-bm}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

**6. 3.** Нека е даден интегралот

$$I = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}},$$

каде што $k$ е произволна реална константа. Тој се наоѓа со смена:

$$\sqrt{x^2+k} = t - x.$$

Квадрирајќи и решавајќи по $x$, се добива:

$$x = \frac{t^2-k}{2t}, \quad t - x = \frac{t^2+k}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+k}{2t^2}\,dt.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \int\frac{\frac{t^2+k}{2t^2}}{\frac{t^2+k}{2t}}\,dt = \int\frac{dt}{t} = \ln t + C.$$

Заменувајќи за $t = x + \sqrt{x^2+k}$, се добива:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\,(x + \sqrt{x^2+k}\,) + C.$$

При наоѓање интеграли од овој облик, ќе го користиме крајниот резултат, без да ја изведуваме секогаш целата постапка на решавањето.

**6. 4.** Нека е даден интегралот

$$I = \int\sqrt{x^2+k}\;dx,$$

каде што $k$ е произволна реална константа.

Множејќи го именителот и броителот со $\sqrt{x^2+k}$ се добива:

$$I = \int \frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}}\,dx + k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}.$$

Првиот интеграл на десната страна ќе го најдеме со методот на парцијална интеграција, при што:

$$u = x, \quad dv = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+k}};$$

$$du = dx, \quad v = \sqrt{x^2+k},$$

а вториот интеграл е интегралот од **т.6.3**, па

$$I = x\sqrt{x^2+k} - \int \sqrt{x^2+k}\,dx + k\,ln\,(x + \sqrt{x^2+k}).$$

Интегралот што го добивме е почетниот интеграл $I$ и решавајќи ја алгебарската равенка

$$I = x\sqrt{x^2+k} - I + k\,ln\,(x + \sqrt{x^2+k}),$$

се добива:

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\,ln\,(x + \sqrt{x^2+k}) + C.$$

**6. 5.** Да го разгледаме интегралот

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (*)$$

каде што ќе разликуваме два случаја:

**а)** $a > 0$, тогаш по смените: $t = x + \frac{b}{2a}$, $\frac{b^2-4ac}{4a^2} = -k^2$,

се добива:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}}} =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-k^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}ln\left(t+\sqrt{t^2+k^2}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}ln\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)+C\,.$$

На пример:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}}=ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+4}\right)+C=$$

$$=ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right)+C\,.$$

**б)** $a<0$, тогаш интегралот (*) може да се напише по воведување на смените

$$t=x+\frac{b}{2a},\qquad \frac{b^2-4ac}{4a^2}=k^2,$$

во следниов вид:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}arcsin\frac{t}{k}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C.$$

На пример:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2+2x-3\right)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3-\left[(x+1)^2-1\right]}}=$$

$$=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}}=arcsin\frac{x+1}{2}+C.$$

**6. 6.** Интегралот

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\;dx$$

на веќе изложениот начин се сведува на еден од интегралите:

$$\int \sqrt{t^2 \pm k^2}\;dt\,, \qquad \int \sqrt{k^2-t^2}\;dt\,.$$

**а)** Ако $a > 0$, тогаш по смените:

$$t = x + \frac{b}{2a}, \qquad \frac{b^2-4ac}{4a^2} = -\,k^2,$$

се добива:

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\;dx = \sqrt{a}\int \sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}}\;dx =$$

$$= \sqrt{a}\int \sqrt{t^2+k^2}\;dt\,,$$

а тоа е интегралот решен во **т. 6. 4.**

**б)** Ако $a < 0$, тогаш по смените:

$$t = x + \frac{b}{2a}, \qquad \frac{b^2-4ac}{4a^2} = k^2,$$

дадениот интеграл се сведува на:

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\;dx = \sqrt{-a}\int \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2} - \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\;dx =$$

$$= \sqrt{-a}\int \sqrt{k^2-t^2}\;dt\,,$$

кој може да се најде аналогно како претходниот.

Интегралот

$$\int \sqrt{k^2-t^2}\;dt$$

може да се реши и со примена на методот на замена, ако се стави $t{=}k\sin z$ ( **т. 9**).

**6. 7.** Нека се дадени интегралите

$$\int sin^n x\,dx\,, \qquad \int cos^{\,n} x\,dx\,.$$

Нека $n$ е цел позитивен број. Ќе го најдеме интегралот

$$I_n = \int cos^{\,n} x\,dx$$

со методот на парцијална интеграција земајќи:

$$u = cos^{n-1}x, \qquad du = -(n-1)\,cos^{n-2}x\,sin\,x\,dx,$$

$$dv = cos\,x\,dx, \qquad v = sin\,x.$$

$$I_n = \int cos^{\,n-1}x\,cos\,x\,dx = sin\,x\,cos^{\,n-1}x + (n-1)\int cos^{n-2}x\,sin^2 x\,dx =$$

$$= sin\,x\,cos^{\,n-1}x + (n-1)\int cos^{n-2}x\cdot\left(1-cos^2 x\right)dx =$$

$$= sin\,x\,cos^{\,n-1}x + (n-1)\int cos^{n-2}x\,dx - (n-1)\int cos^n x\,dx\,.$$

Вториот интеграл на десната стран е $I_n$ па следува:

$$I_n = sin\,x\,cos^{\,n-1}x + (n-1)\int cos^{n-2}x\,dx - (n-1)\,I_n.$$

Решавајќи ја оваа равенка по $I_n$, се добива:

$$I_n = \frac{sin\,x\,cos^{\,n-1}x}{n} + \frac{(n-1)}{n}\int cos^{n-2}x\,dx\,,$$

т.е. $$I_n = \frac{sin\,x\,cos^{\,n-1}x}{n} + \frac{(n-1)}{n}\,I_{n-2}\,.$$

На ист начин се наоѓа дека

$$\int sin^n x\,dx = -\frac{sin^{n-1}x\,cos\,x}{n} + \frac{(n-1)}{n}\int sin^{n-2}x\,dx \qquad (**)$$

На пример, ќе го разгледаме интегралот :

$$\int sin^6 x\,dx\,.$$

Со последователна примена на формулата (**), се добива:

$$I_6 = \int sin^6 x\,dx = -\frac{sin^5 x\,cos\,x}{6} + \frac{5}{6}\,I_4\,,$$

$$I_4 = \int sin^4 x\, dx = -\frac{sin^3 x\, cos\, x}{4} + \frac{3}{4} I_2 ,$$

$$I_2 = \int sin^2 x\, dx = -\frac{sin\, x\, cos\, x}{2} + \frac{1}{2} I_0 ,$$

$$I_0 = \int dx = x.$$

Врз основа на овие резултати, се добива:

$$I_2 = -\frac{sin\, x\, cos\, x}{2} + \frac{x}{2},$$

$$I_4 = -\frac{sin^3 x\, cos\, x}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{sin\, x\, cos\, x}{2} - \frac{x}{2}\right)$$

и конечно

$$I_6 = \int sin^6 x\, dx = -\frac{1}{6} sin^5 x\, cos\, x - \frac{5}{24} sin^3 x\, cos\, x -$$

$$- \frac{5}{16} sin\, x\, cos\, x + \frac{5x}{16} + C.$$

**6. 8.** Нека е даден интегралот

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n} , \qquad (n \in N).$$

За $n = 1$, $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = arctg\, x + C,$

што е познато од порано.

Нека е $n > 1$. Во броителот ако додадеме и одземеме $x^2$, се добива:

$$I_n = \int \frac{\left(x^2+1\right) - x^2}{\left(x^2+1\right)^n} dx = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} - \int \frac{x^2\, dx}{\left(x^2+1\right)^n} .$$

Вториот интеграл на десната страна ќе го најдеме по методот на парцијална интеграција, ставајќи:

$$u = x, \quad dv = \frac{x\, dx}{\left(x^2+1\right)^n};$$

$$du = dx, \quad v = \int \frac{x\, dx}{\left(x^2+1\right)^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} ,$$

затоа

$$\int \frac{x^2\,dx}{\left(x^2+1\right)^n} = -\frac{x}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}\,.$$

Имаме:

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\,I_{n-1}$$

или

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\,I_{n-1}.$$

# 7. ИНТЕГРИРАЊЕ НА РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

## 7. 1. Раставување на полином на множители

Во алгебрата се докажува дека секој реален полином $Q(x)$ може да биде претставен во вид

$$Q(x) = A(x-\alpha)\,(x-\beta)\,\ldots\,(x-\gamma),$$

каде што $A$ е коефициент пред највисокиот степен на полиномот, а $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ се корени на равенката $Q(x) = 0$. *Множителите* $x-\alpha, x-\beta, \ldots, x-\gamma$ *се викаат* ***прости множители*** *ако* $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ *се два по два различни меѓу себе.* Ако некои од множителите се еднакви, тогаш полиномот пократко може да се напише во вид

$$Q(x) = A(x-\alpha)^{r}\,(x-\beta)^{s}\,\ldots\,(x-\gamma)^{t},$$

каде што $r, s, \ldots, t$ се природни броеви и $r+s+\ldots+t = n$, каде што $n$ е степенот на полиномот $Q(x)$. Броевите $r, s, \ldots, t$ се викаат кратност на корените $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ соодветно.

Од алгебрата е познато: *ако* $a+ib$ *е комплексен корен на полиномот, тогаш тој го има за корен и конјугирано-комплексниот број* $a-ib$.

Измножувајќи ги множителите $x-(a+ib)$ и $x-(a-ib)$, се добива:

$$[x-(a+ib)]\,[\,x-(a-ib)] = (x-a)^{2} + b^{2} = x^{2} + px + q,$$

каде што $p = -2a$, $q = a^{2} + b^{2}$.

На секој пар коњугирано-комплексни корени во разложениот полином му одговара множител квадратен трином.

$$Q(x) = A(x-\alpha)^{r}\,(x-\beta)^{s} \ldots\ (ax^{2}+bx+c)^{t}\,(dx^{2}+ex+f)^{k} \ldots$$

$r, s, \ldots$ се кратности на реалните корените $\alpha$ и $\beta$, $\ldots$, а $t$ и $k$ се кратностите на паровите коњугирано-комплексни корени.

Примери:

**1.** $x^{2}-3x + 2 = (x-2)\,(x-1),$

**2.** $x^{3} + 1 = (x+1)\,(x^{2}-x+1),$

**3.** $x^{4} - 1 = (x^{2}+1)\,(x-1)\,(x+1),$

**4.** $x^{3} - 2x^{2} - x + 2 = (x-1)\,(x-2)\,(x+1)$

## 7. 2. Раставување на рационални функции на прости дропки

Ако степенот на полиномот во броителот од рационалната функција $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ е поголем или еднаков со степенот на полиномот во именителот, тогаш извршувајќи делење, се добива:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

каде што $W(x)$ е полином-количник, а $R(x)$ остаток при делењето, полином со степен помал од степенот на полиномот $Q(x)$.

Примери:

**1.** $\dfrac{x^{4}+x+2}{x^{2}+1} = x^{2} - 1 + \dfrac{x+3}{x^{2}+1},$

**2.** $\dfrac{x^{3}+2x^{2}+3x+2}{x^{3}+1} = 1 + \dfrac{2x^{2}+3x+1}{x^{3}+1}.$

Нека $\frac{P(x)}{Q(x)}$ е дадена рационална функција, каде што $P(x)$ и $Q(x)$ се полиноми со реални коефициенти, и полиномот $Q(x)$ нека е раставен на множители.

**Теорема.** *Ако степенот на броителот во рационалната функција* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *е помал од степенот на именителот, тогаш таа функција може да се претстави во вид*:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^r}+\frac{B}{(x-\alpha)^{r-1}}+\ ...+\frac{C}{x-\alpha}+\frac{D}{(x-\beta)^s}+\frac{E}{(x-\beta)^{s-1}}+\ ...$$

$$...\ +\frac{F}{x-\beta}+\ ...\ +\frac{Gx+H}{\left(ax^2+bx+c\right)^t}+\frac{Ix+K}{\left(ax^2+bx+c\right)^{t-1}}+\ ...$$

$$...\ +\frac{Lx+M}{ax^2+bx+c}+\frac{Nx+R}{\left(dx^2+ex+f\right)^k}+\ ...\ \frac{Sx+T}{dx^2+ex+f}+\ ... \qquad (1)$$

$A, B, C, \ldots S, T$ се константи (теоремата нема да ја докажуваме). *Разложувањето* (1) *се вика* ***разложување на рационална функција на прости дропки***.

Равенството (1) важи за сите реални вредности на $x$, освен за вредностите $x = \alpha, \beta, \ldots$ , т.е. реалните корени на равенката $Q(x) = 0$.

Секој множител на полиномот $Q(x)$ во именителот од разложувањето (1) се појавува на сите степени почнувајќи со степенот што го има во раставениот полином и завршувајќи со прв степен.

Броителите на дропките во (1) се или константи или полиноми од прв степен, во зависност од тоа дали е именителот некој степен на полином од прв или втор степен. За определување на броевите $A, B, C, \ldots$ се множат двете страни на равенството (1) со $Q(x)$. Потоа, полиномот на десната страна се подредува по степените на $x$. Бидејќи равенството меѓу полиномот $P(x)$ на левата страна и полиномот на десната старана важи за сите вредности на $x$ различни од $\alpha, \beta, \ldots$ по условот, а за $x=\alpha, \beta,..$ поради идентичноста, следува дека коефициентите при еднаквите степени на $x$ се еднакви меѓу себе.

На тој начин се добива систем од линеарни равенки со чие решавање ќе ги најдеме непознатите $A, B, C, \ldots$ .

Ќе забележиме дека пред да се растави дадена рационална функција на прости дропки потребно е да се провери:

**1⁰** *дали степенот на полиномот во броителот е понизок од степенот на полиномот во именителот;*

**2⁰** *дали броителот и именителот се релативно прости.*

**Пример 3.** *Да се растави на прости дропки рациооналната функција:*

$$\frac{2x-1}{x^2-3x+2}.$$

Корени на равенката

$$x^2-3x+2=0 \quad \text{се:} \quad x_1=1, \quad x_2=2,$$

т.е.

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2).$$

Дадената рационална функција може да се растави на прости дропки

$$\frac{2x-1}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}.$$

Ако двете страни ги помножиме со $x^2-3x+2$, се добива:

$$2x-1=A(x-2)+B(x-1)$$

или

$$2x-1=(A+B)x-2A-B.$$

Со изедначување на коефициентите од лево и од десно за определување на константите $A$ и $B$ се добиваат равенките:

$$A+B=2,$$

$$-2A-B=-1.$$

Од двете равенки се добива: $A=-1, \quad B=3$, така што

$$\frac{2x-1}{x^2-3x+2}=-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-2}.$$

**Пример 4.** *Да се растави на прости дропки функцијата*

$$\frac{x^4+2x+6}{x^3-x^2-2x}.$$

Бидејќи степенот на полиномот во броителот е повисок од степенот на полиномот во именителот, со делење се добива:

$$\frac{x^4+2x+6}{x^3-x^2-2x} = x+1 + \frac{3x^2+3x+6}{x^3-x^2-2x}.$$

Нули на полиномот

$$x^3 - x^2 - 2x$$

се:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1.$$

Затоа

$$\frac{3x^2+3x+6}{x^3-x^2-2x} = \frac{3x^2+3x+6}{x(x-2)(x+1)}.$$

Добиената рационална функција може да се растави на прости дропки

$$\frac{3x^2+3x+6}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}.$$

По множење на равенството со $x(x–2)(x+1)$, се добива:

$$3x^2 + 3x + 6 = A(x–2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x–2).$$

За определување на константите $A$, $B$ и $C$ ќе примениме друг метод кој побрзо нѐ води кон целта кога именителот има само реални еднократни нули.

Ако земеме по ред : $x = 0$, $x = 2$, $x = –1$ ќе се добие:

$$6 = –2A, \quad 24 = 6B, \quad 6 = 3C,$$

од каде што

$$A = –3, \quad B = 4, \quad C = 2.$$

Значи,

$$\frac{x^4+2x+6}{x^3-x^2-2x} = x + 1 - \frac{3}{x}+\frac{4}{x-2}+\frac{2}{x+1}.$$

**Пример 5.** *Да се растави на прости дропки функцијата*

$$\frac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)^2}.$$

Имаме:

$$\frac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Ако ги помножиме двете страни на равенството со $x(x+1)(x-1)^2$, се добива:

$$x^2+1 = A(x+1)(x-1)^2+Bx(x-1)^2+Cx(x+1)+Dx(x+1)(x-1)$$

или ако десната страна ја подредиме по степените од $x$, имаме:

$$x^2+1 = (A+B+D)x^3+(-A-2B+C)x^2+(-A+B+C-D)x+A.$$

Изедначувајќи ги коефициентите пред еднаквите степени од $x$ лево и десно, се добива системот равенки:

$$A+B+D=0,\quad -A-2B+C=1,\quad -A+B+C-D=0,\quad A=1,$$

чие решение е:

$$A=1,\quad B=-\frac{1}{2},\quad C=1,\quad D=-\frac{1}{2}.$$

Според тоа, функцијата се раставува на прости дропки :

$$\frac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}.$$

**Пример 6.** *Да се растави на прости дропки функцијата*

$$\frac{x^2+2x-1}{x(x^2+1)}.$$

Дадената функција може да се растави во вид:

$$\frac{x^2+2x-1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

По множење на ова равенство со $x(x^2+1)$, имаме:

$$x^2+2x-1=A(x^2+1)+Bx^2+Cx$$

или

$$x^2 + 2x - 1 = (A+B)x^2 + Cx + A.$$

Со изедначување на коефициентите пред еднаквите степени на $x$, се добива:

$$A+B = 1, \quad C = 2, \quad A = -1,$$

од каде што: $A = -1, \quad B = 2, \quad C = 2.$

Добиваме:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x\left(x^2 + 1\right)} = -\frac{1}{x} + 2\frac{x+1}{x^2+1}.$$

## 7. 3. Интеграли од рационални функции

Рационална функција се интегрира откако претходно ќе се разложи на прости дропки. Со тоа интегралот се сведува на сума од интеграли од видот:

**а)** $$\int \frac{A\,dx}{x-\alpha} = A\,ln\,(x-a) + C,$$

**б)** $$\int \frac{A\,dx}{(x-\alpha)^r} = -\frac{A}{(r-1)(x-\alpha)^{r-1}} + C,$$

**в)** $$\int \frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^r}\,dx,$$

при што полиномот $ax^2+bx+c$ нема реални корени, т.е.

$$b^2 - 4ac < 0.$$

За да го најдеме интегралот од видот **в)**, претходно триномот ќе го запишеме во вид:

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Ако ставиме:

$$\frac{4ac-b^2}{4a^2} = k^2 \quad \text{и} \quad \frac{x+\frac{b}{2a}}{k} = t,$$

се добива:

$$ax^2+bx+c = a\,k^2\,(t^2+1)$$

и

$$\int \frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^r}\,dx = \int \frac{Mt+N}{\left(t^2+1\right)^r}\,dt =$$

$$= M\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+1\right)^r} + N\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^r},$$

каде што $M$ и $N$ се некои константи.

Првиот интеграл на десната страна се наоѓа со смената:

$$t^2+1 = z,$$

па следува:

$$\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+1\right)^r} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^r} = -\frac{1}{2(r-1)}\cdot\frac{1}{z^{r-1}} + C =$$

$$= -\frac{1}{2(r-1)}\cdot\frac{1}{\left(t^2+1\right)^{r-1}} + C, \qquad (r \neq 1).$$

За $r = 1$ имаме:

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} ln\left(t^2+1\right) + C.$$

Вториот интеграл на десната страна го најдовме порано во **6. 8.**

**Пример 1.** *Да се најде интегралот*

$$\int \frac{x^3dx}{x+1}.$$

Претходно ќе го поделиме броителот со именителот:

$$x^3 : (x+1) = x^2 - x+1 - \frac{1}{x+1},$$

$$\begin{array}{r}
\underline{-x^3 \pm x^2} \\
-x^2 \phantom{\mp x} \\
\underline{\mp x^2 \mp x} \\
x \\
\underline{-x \pm 1} \\
-1
\end{array}$$

па имаме:

$$\int \frac{x^3 dx}{x+1} = \int \left( x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - ln\,(x+1) + C.$$

**Пример 2.** *Да се најде интегралот*

$$\int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}\, dx\,.$$

Именителот на подинтегралната функција има нули: $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3 = -2$.

Подинтегралната функција се разложува на прости дропки:

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}\,,$$

По множење на ова равенство со $x(x-2)(x+2)$ се добива:

$$4x^2 + 16x - 8 = A(x^2-4) + Bx(x+2) + Cx(x-2).$$

Ова идентично равенство важи за секоја вредност на $x$, па и за нулите на именителот.

Ако ги замениме едно по друго за $x$ вредностите $0$, $2$ и $-2$ од добиените изрази ќе ги определиме константите $A$, $B$ и $C$.

За $x = 0$; се добива: $-8 = -4A$, $A = 2$,

За $x = 2$; се добива: $40 = 8B$, $B = 5$,

За $x = -2$; се добива: $-24 = 8C$, $C = -3$.

Конечно се добива разложувањето:

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}+\frac{-3}{x+2}.$$

Тогаш имаме:

$$\int\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\,dx=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}+\frac{-3}{x+2}\right)dx=$$

$$=2\ ln\ x+5\ ln\ (x–2)\ –3\ ln\ (x+2)+C=ln\ \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}+C.$$

**Пример 3.** *Да се најде интегралот*

$$\int\frac{x\,dx}{(x+1)^2}.$$

Именителот на подинтегралната функција има два реални и еднакви корени $x_{1,2}=-1$, па подинтегралната функција се разложува во вид:

$$\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}.$$

Ослободувајќи се од именителот, го добиваме идентитетот:

$$x=A(x+1)+B.$$

Да ги извршиме назначените операции на десната страна и добиениот полином да го подредиме по степените на $x$,

$$x=Ax+(A+B).$$

За да биде исполнето ова идентично равенство (за секоја вредност на $x$) потребно и доволно е коефициентите пред истите степени од двете страни на равенството да се еднакви т.е.

$$1=A,$$

$$0=A+B.$$

Решение на добиениот систем е:

$$A=1,\quad B=–1.$$

Решение на интегралот е:

$$\int\frac{x\,dx}{(x+1)^2}=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}=2\ ln\ (x+1)+\frac{1}{x+1}+C.$$

**Пример 4.** *Да се најде ин̅те̅г̅ралоӣ*

$$I = \int \frac{x}{x^3 - 1}\, dx$$

Именителот на подинтегралната функција има нули $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Подинтегралната функција ќе се разложи на елементарни дропки на следниов начин:

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{x}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1},$$

Ослободувајќи се од именителот, се добива идентитетот:

$$x = A(x^2+x+1) + (Bx+C)\ (x–1).$$

Да ги извршиме назначените операции на десната страна и добиениот полином да го подредиме по степените на $x$

$$x = (A+B)\, x^2 + (A+C–B)\, x + A - C.$$

Споредувајќи ги коефициентите пред истите степени од $x$ на левата и десната страна од равенството се добива:

$$0 = A - C,$$

$$1 = A+C–B,$$

$$0 = A+B.$$

Решавајќи го овој систем се добива:

$$A = C = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}$$

Според тоа,

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{-x+1}{3(x^2 + x + 1)}.$$

Тогаш

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2 + x + 1}\, dx,$$

каде што вториот интеграл е интеграл од облик $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx$, па решението на интегралот е:

$$I = \frac{1}{3}\,ln\,(x-1)\; - \frac{1}{6}\,ln\,(x^2+x+1)\; + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

# 8. ИНТЕГРИРАЊЕ НА ИРАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

Понапред видовме дека интегрирање на рационални функции се врши со разложување на елементарни дропки. Меѓутоа, интегрирација на ирационални функции не е секогаш можна, т.е. таа е можна само во специјални случаи. Интеграцијата на ирационални функции, со погодна смена, обично се сведува на интеграција на рационалните функции.

Овде ќе разгледаме неколку случаи на ирационални функции, чии интеграли со помош на замена се сведуваат на интеграли од рационални функции.

## 8. 1. Интеграл од вид

$$\int R\left( x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}} \right) dx,$$

каде што $R$ е рационална функција од $x$ и степени од $x$.

Со $k$ нека го означиме најмалиот заеднички именител на дропките $\frac{m}{n}$, … , $\frac{r}{s}$.

Дадениот интеграл со смената

$$x = t^k, \quad dx = k\,t^{k-1}\,dt,$$

се сведува на интеграл од дробно-рационална функција.

**Пример 1.** *Да се најде интегралот*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

Во случајов, со смената:

$$x = t^6, \quad dx = 6\,t^5\,dt,$$

дадениот интеграл се сведува на интеграл од рационална функција (пример 1, **т. 7.3**),

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{t^5}{t^3+t^2}\,dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt,$$

чие решение е:

$$I = 6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-ln\,(t+1)\right] + C.$$

Враќајќи се на старата променлива се добива:

$$I = 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right) + C.$$

**Пример 2.** *Да се најде интегралот*

$$I = \int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

Како и во претходниот пример се трудиме да ја избегнеме ирационалноста во подинтегралната функција, што го постигнуваме со смената:

$$1+x = t^6, \quad x = t^6-1, \quad dx = 6\,t^5\,dt.$$

Дадениот интеграл се сведува на интеграл од рационална функција

$$I = 6\int \frac{t^6-1+t^3}{t^2}\,t^5\,dt = 6\int \left(t^6+t^3-1\right)t^3\,dt =$$

$$= \frac{3}{5}t^{10}+\frac{6}{7}t^7-\frac{3}{2}t^4 + C.$$

Враќајќи се на старата променлива се добива:

$$\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} = \left(1+x\right)^{2/3}\left(\frac{3}{5}x-\frac{9}{10}+\frac{6}{7}\sqrt{1+x}\right) + C.$$

## 8. 2. Интеграли од вид

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx.$$

Во овој случај интегралот се сведува на интеграл од рационална функција со смената:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^{k},$$

каде што $k$ е најмал заеднички содржател на $n,\ \dots\ ,\ s$.

**Пример 1.** *Да се најде интегралот*

$$I=\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx.$$

Дадениот интеграл со смената:

$$\frac{x-1}{x+1}=t^{2},\quad \text{од каде што}\quad x=\frac{t^{2}+1}{1-t^{2}},\qquad dx=\frac{4t\,dt}{\left(1-t^{2}\right)^{2}}.$$

се сведува на интеграл од рационална функција

$$I=\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx=\int t\,\frac{4t}{\left(1-t^{2}\right)^{2}}\cdot\frac{1}{\frac{1+t^{2}}{1-t^{2}}}\,dt=\int\frac{4t^{2}\,dt}{\left(1-t^{2}\right)\left(1+t^{2}\right)},$$

чие решение е

$$I=ln\,\frac{t-1}{t+1}+2\,arctg\,t+C.$$

Но бидејќи $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, враќајќи се на старата променлива се добива:

$$I=ln\,\frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}+2\,arctg\,\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C,$$

односно

$$I = ln\ \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} + 2\ arctg\ \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C.$$

**Пример 2.** *Да се најде интегралот*

$$\int \frac{x^3}{1+\sqrt[3]{x^4+2}}\,dx\,.$$

Дадениот интеграл се решава со смената $x^4 + 2 = t^3$, затоа што треба да се изгуби коренот во подинтегралната функција и бидејќи во броителот се содржи извод од подкорениот израз

$$x^3\,dx = \frac{3}{4}\ t^2\,dt,$$

се добива:

$$\int \frac{x^3}{1+\sqrt[3]{x^4+2}}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{t^2}{1+t}\,dt\,,$$

а тоа е интеграл од рационална функција. Решавајќи го овој интеграл и враќајќи се на старата променлива, се добива:

$$\int \frac{x^3}{1+\sqrt[3]{x^4+2}}\,dx = \frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{\left(x^4+2\right)^2} - 2\sqrt[3]{x^4+2} + 2\,ln\left(1+\sqrt[3]{x^4+2}\right)\right] + \mathrm{C}.$$

## 8. 3. Интеграл од биномен диференцијал

Биномен диференцијал се вика изразот

$$x^m\,(a+bx^n)^p,$$

каде што $m$, $n$ и $p$ се рационални броеви, а $a$ и $b$ произволни константи различни од нула.

Интеграл од биномен диференцијал

$$\int x^m\left(ax+b^n\right)^p dx$$

може да се интегрира во конечен облик со помош на елементарни функции во следниве случаи:

***Прв случај.*** *ако $p$ е цел број (позитивен, негативен или нула).*

Кога $p$ е цел позитивен број, тогаш биномот $x^{m}(a+bx^{n})^{p}$ треба да се развие по биномната формула, потоа да се изврши множење со $x^{m}\,dx$ и да се изврши интегрирање на член по член.

**Пример 1.** *Да се најде интегралот*

$$\int x^{\frac{3}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{2}dx\,.$$

По развивање на биномот во подинтегралниот израз се добива:

$$\int x^{\frac{3}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{2}dx\;=\;\int x^{\frac{3}{2}}\left(1+2x^{\frac{1}{2}}+x\right)dx\;=$$

$$=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+2x^{2}+x^{\frac{5}{2}}\right)dx=\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{3}+\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\;+C.$$

Кога $p$ *е цел негативен број*, се зема смената $x = t^{s}$, каде што $s$ е заеднички именител на дропките $m$ и $n$ и се сведува на интеграл од рационална функција.

**Пример 2.** *Да се најде интегралот*

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{2}}\,.$$

Корените во подинтегралниот израз ќе ги запишеме во вид на степени

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{2}}\;=\;\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{-2}dx\,.$$

Со смената $x = t^{4}$ се добива:

$$I=\;\int t^{-2}\left(1+t\right)^{-2}4t^{3}dt=4\int\frac{t\,dt}{\left(1+t\right)^{2}}\,,$$

$$I\;=4\;ln\;(1+t)+\;\frac{4}{1+t}\;+C.$$

Со замена $t=\sqrt[4]{x}$ се враќаме на старата променлива и се добива:

$$I=4\;ln\;(1+\sqrt[4]{x}\,)+\;\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}\;+C.$$

***Втор случај.*** *Ако бројот* $q = \dfrac{m+1}{n}$ *е цел број (позитивен, негативен или нула), тогаш се користи смената:* $a+bx^n = z^r$, *каде што* $r$ *е именител на дропката* $p$.

**Пример 3.** *Да се најде интегралот*

$$\int \frac{x^3 dx}{\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Бидејќи $m = 3$, $n = 2$, $q = \dfrac{m+1}{n} = 2$ е цел број, ќе ја користиме смената: $1+2x^2 = t^2$, од каде што

$$x^2 = \frac{t^2-1}{2}, \quad x\,dx = \frac{t}{2}\,dt,$$

па следува:

$$\int \frac{x^3 dx}{\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4}\int \left(t^2-1\right)dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{3}-t\right) + C =$$

$$= \frac{t}{12}\left(t^2-3\right)+C = \frac{1}{6}\sqrt{1+2x^2}\left(x^2-1\right)+C.$$

***Трет случај.*** *Ако* $p+q$ *е цел број (позитивен, негативен или нула), тогаш ја користиме смената:*

$$a\,x^{-n} + b = t^r,$$

*каде што* $r$ *е именител на дропката* $p$.

**Пример 4.** *Да се најде интегралот*

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

Во овој интеграл $m$=0, $n$=3, $p= -\dfrac{1}{3}$, па $p+q = -\dfrac{1}{3}+\dfrac{0+1}{3}$=0 и ќе ја земеме смената:

$$x^{-3} + 1 = t^3, \quad x^3 = \frac{1}{t^3-1}.$$

Да ја трансформираме подинтегралната функција на следниов начин:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}} = \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^{-3}+1}}.$$

Гледаме дека смената може директно да се користи, а со диференцирање на смената се добива:

$$-\frac{dx}{x^4} = t^2 dt, \quad \text{од каде што} \quad \frac{dx}{x} = -x^3 t^2 dt = -\frac{t^2 dt}{t^3-1}.$$

Подинтегралната функција добива облик:

$$-\int \frac{\frac{t^2}{t^3-1}}{t} dt = -\int \frac{t}{t^3-1} dt =$$

(интегралот е решен во **пример 4**, **т.7. 3**).

$$I = \frac{1}{3} ln \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

## 9. ИНТЕГРАЛИ КОИ СЕ РЕШАВААТ СО ТРИГОНОМЕТРИСКИ СМЕНИ

### 9. 1. Интрграл од видот:

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx$$

се решава со смената:

$$x = a\ sin\ t, \quad dx = a\ cos\ t\ dt.$$

**Пример 1.** *Да се најде интегралот*

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx.$$

Со смената: $x = a\ sin\ t, \quad dx = a\ cos\ t\ dt.$

интегралот се сведува на облик:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2-a^2 sin^2 t}\ a\,cos\,t\ dt = a^2 \int cos^2 t\ dt.$$

Со оваа смена коренот во подинтегралната функција се изгуби, а тоа беше и нашата цел.

$$I = \frac{a^2}{4}\ (2t + sin\ 2t) + C.$$

Враќајќи се на старата променлива, каде што $t = arcsin\frac{x}{a}$, а

$$sin2t = 2sint\ cos\ t = 2\ sin\ t\sqrt{1-sin^2 t} = 2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = 2\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\ ,$$

се добива:

$$I = \frac{a^2}{4}\left(2arcsin\frac{x}{a}+\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right) + C.$$

и конечно

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\ arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\ + C.$$

(види **т. 5**, **пример 4.**).

## 9. 2. Интеграл од видот

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$$

се решава со смената:

$$x = a\ tg\ t, \quad dx = \frac{a\,dt}{cos^2 t}\ .$$

**Пример 1.** *Да се најде интегралот*

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}.$$

Интегралот се решава со смената :

$$x = 2\ tg\ t, \quad dx = \frac{2\,dt}{\cos^2 t},$$

со цел да го отстраниме коренот во подинтегралната функција:

$$I = \int\frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}} = \int\frac{\frac{2dt}{cos^2 t}}{\sqrt{\left(4+4tg^2 t\right)^3}} = 2\int\frac{dt}{cos^2 t\cdot a\frac{1}{cos^3 t}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int cos\,t\ dt = \frac{1}{4}sin\,t + C\ .$$

Враќајќи се на старата променлива,

$$tg\ t = \frac{x}{2}, \quad sin\ t = \frac{tg\ t}{\sqrt{1+tg^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}},$$

се добива:

$$I = \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C.$$

## 10. ИНТЕГРИРАЊЕ НА НЕКОИ ПОПРОСТИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

### 10. 1. Интеграл од видот

$$\int R(sin\,x, cos\,x)dx$$

каде што $R$ е рационална функција од аргументите $sin\,x$ и $cos\,x$.

Интегралот од овој вид со смената $t = tg\frac{x}{2}$ се трансформира во интеграл од рационална функција по $t$.

По познатите формули од тригонометрија

$$sin\,x = 2\,sin\frac{x}{2}\ cos\frac{x}{2} = 2\,tg\frac{x}{2}\ cos^2\frac{x}{2} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},$$

$$cos\,x = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = cos^2\frac{x}{2}(1-tg^2\frac{x}{2}) = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},$$

т.е.

$$sin\,x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad cos\,x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Од равенството $x = 2\,arctg\,t$ имаме $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

Според тоа,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Подинтегралната функција е рационална функција по $t$.

**Пример 1.** *Да се најде интегралот*

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 3}.$$

Даденииов интеграл со смената

$$tg\frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

се сведува на интеграл од рационална функција

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} = \int \frac{2dt}{4t - 1 + t^2 + 3 + 3t^2} =$$

$$= 2\int \frac{2dt}{4t^2 + 4t + 2} = \int \frac{dt}{2t^2 + 2t + 1} =$$

$$= arctg\,(2t+1) + C = arctg\,(2\;tg\;\frac{x}{2} + 1) + C.$$

Интегрирањето на функцијата $R(\sin x, \cos x)$ со помош на наведената смена не е секогаш и наједноставно. Постојат интеграли од овој вид кои со некоја друга смена се решаваат побрзо.

Ако на пример $\sin x$ и $\cos x$ во изразот на функцијата $R$ се само со парни степенови показатели, интегралот побрзо ќе се најде со смената $t = tgx$. Тогаш

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

По заменување ќе се добие интеграл од рационална функција.

Интегралите од видот:

$$\int R(tgx)dx$$

се решаваат, исто така, со смената $t = tg\ x$.

**Пример 2.** *Да се најде интегралот*

$$I = \int \frac{sin^2 x}{1+cos^2 x}\, dx$$

Овој интеграл се решава со смената:

$$tg\ x = t, \quad sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

и се сведува на интеграл од дробно-рационална функција, т.е.

$$I = \int \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)\left(2+t^2\right)}\, dt\,.$$

Подинтегралната функција се разложува во вид:

$$\frac{t^2}{\left(1+t^2\right)\left(2+t^2\right)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{2+t^2}\,.$$

Ослободувајќи се од именителот, се добива идентитетот

$$t^2 = (At+B)\,(t^2+2) + (Ct+D)\,(1+t^2).$$

Кога ќе се извршат назначените операции на десната страна и полиномот се подреди по степените од $t$, се добива:

$$t^2 = (A+C)\,t^3 + (B+D\,)\,t^2 + (2A+C)\,t + 2B + D.$$

Со изедначување на коефициентите пред еднаквите степени на $t$, се добива системот равенки:

$$\begin{aligned} A + C &= 0, \\ B + D &= 1, \\ 2A + C &= 0, \\ 2B + D &= 0. \end{aligned}$$

Решение на добиениот систем е:

$$A = 0, \quad B = -1, \quad C = 0, \quad D = 2.$$

Според тоа,

$$I = -\int \frac{dt}{1+t^2} + 2\int \frac{dt}{2+t^2} = -arctg\, t + \sqrt{2}\ arctg\ \frac{t}{\sqrt{2}} + C.$$

Враќајќи се на старата променлива, се добива:

$$I = \sqrt{2}\ arctg\ \left(\frac{tg\, x}{\sqrt{2}}\right) - x + C.$$

## 10. 2. Интеграли од видот

$$\int sin\, ax\ cos\, bx\ dx; \quad \int sin\, ax\ sin\, bx\ dx; \quad \int cos\, ax\ cos\, bx\ dx.$$

Овие интеграли може да се трансформираат во интеграли од сума или разлика на тригонометриски функции со помош на равенствата:

$$sin\ ax\ cos\ bx = \frac{1}{2}[sin(a+b)x + sin(a-b)x],$$

$$sin\ ax\ sin\ bx = \frac{1}{2}[cos(a-b)x - cos(a+b)x]$$

$$cos\ ax\ cos\ bx = \frac{1}{2}[cos(a+b)x + cos(a-b)x].$$

На пример:

$$\int sin\, 3x\ sin\, 2x\ dx = \frac{1}{2}\int (cos\, x - cos\, 5x)dx = \frac{1}{2} sin\, x - \frac{1}{10} sin\, 5x + C.$$

## 10. 3. Интеграли од видот

$$\int sin^n\ x\ cos^m\ x\ dx\ ,$$

каде што $m$ и $n$ се цели броеви.

**а)** Барем еден од броевите $m$ и $n$ е позитивен непарен број. Нека $m = 2k + 1$, тогаш

$$\int sin^n\ x\ cos^{2k+1}\ x\ dx = \int sin^n\ x\ cos^{2k}\ x\ cos\, x\ dx =$$

$$= \int sin^n x(1 - sin^2\ x)^k\ cos\, x\ dx.$$

Очигледно е дека овој интеграл се решава со смената:

$$sinx = t, \qquad cos\ x\ dx = dt.$$

Заменувајќи во интегралот, се добива:

$$\int sin^n x\left(1-sin^2 x\right)^k cos\, x\; dx \;=\; \int t^n\left(1-t^2\right)^k dt\,,$$

а тоа е интеграл од рационална функција по $t$.

Ако $n$ е непарен број, тогаш интегралот се наоѓа со смената $cos\, x = t$.

**Пример 1.** *Да се најде интегралот*

$$\int \frac{cos^3 x}{sin^4 x}\, dx\,.$$

Подинтегралната функција ќе ја трансформираме:

$$\int \frac{cos^3 x}{sin^4 x}\, dx \;=\; \int \frac{cos^2 x\, cos\, x}{sin^4 x}\, dx = \int \frac{\left(1-sin^2 x\right)cos\, x}{sin^4 x}\, dx\,.$$

Заменувајќи во интегралот $sin\, x = t$, $cos\, x\, dx = dt$, се добива:

$$I = \int \frac{\left(1-t^2\right)dt}{t^4} = \int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^2}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t}+C = -\frac{1}{3sin^3 x}+\frac{1}{sin\, x}+C.$$

**б)** Нека $m$ и $n$ се парни броеви, тогаш дадениот интеграл се наоѓа со примена на формулите од тригонометријата:

$$sin\,\alpha\; cos\,\alpha = \frac{1}{2}\; sin\, 2\alpha,$$

$$sin^2\alpha \;=\; \frac{1}{2}\;(1-cos\, 2\alpha), \quad cos^2\alpha \;=\; \frac{1}{2}\;(1+cos\, 2\alpha).$$

**Пример 2.**

$$\int sin^2 x\, cos^4 x\; dx \;=\; \int \frac{1}{2}\left(1-cos\,2x\right)\left(\frac{1+cos\,2x}{2}\right)^2 dx \;=$$

$$= \frac{1}{8}\int sin^2 2x\left(1+cos\,2x\right)dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-cos\,4x}{2}\,dx +$$

$$+\;\frac{1}{8}\int sin^2 2x\; cos\,2x\; dx = \frac{1}{16}-\frac{1}{64}sin\,4x+\frac{1}{48}sin^3 2x\;+C.$$

**в)** Ако $m$ и $n$ се негативни и нивната сума е парна интегралот се наоѓа со смената:

$$tg\,x = t \qquad \text{или} \qquad ctg\,x = t,$$

притоа

$$sin\,x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad cos\,x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

**Пример 3.** *Да се најде интегралот*

$$\int \frac{dx}{sin^3 x\, cos\, x} = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\cdot \frac{t^3}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{\frac{1}{2}}}} =$$

$$= \int \frac{1+t^2}{t^3}\, dt = -\frac{1}{2t^2} + ln t + C = -\frac{1}{2tg^2 x} + ln\left| tg\, x \right| + C.$$

## 11. ИНТЕГРАЛИ ШТО НЕ СЕ ИЗРАЗУВААТ ПРЕКУ ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

Разгледавме класи на функции чии интеграли се изразуваат преку елементарни функции. Меѓутоа, не секоја примитивна функција, дури и тогаш кога таа постои, може да се изрази во конечен вид преку елементарни функции. Такви се интегралите:

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int sin\, x^2\, dx, \quad \int cos\, x^2\, dx, \quad \int \frac{dx}{ln\, x}, \quad \int \frac{e^x}{x} dx,$$

$$\int \frac{sin\, x}{x} dx, \quad \int \frac{cos\, x}{x} dx, \quad \int \sqrt{1-k^2 sin^2 x}\; dx \quad (k \neq 1).$$

## Задачи за вежбање

**1.** Да се најдат следниве интеграли од рационалните функции:

**1)** $\int \frac{dx}{x^2+5x}$; Одг.: **1)** $\frac{1}{5} \, ln \left| \frac{x}{x+5} \right| + C.$

**2)** $\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$; **2)** $ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C.$

**3)** $\int \frac{x^6}{x^2-1} dx$; **3)** $\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \, ln \, \frac{x-1}{x+1} + C.$

**4)** $\int \frac{2x-3}{(x-2)^3} dx$; **4)** $-\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} + C.$

**5)** $\int \frac{x^4}{x^3-1} dx$; **5)** $\frac{x^2}{2} + ln \sqrt{(x^3-1)(x-1)} +$

$+ \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \, \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$

**2.** Да се најдат следниве интеграли од ирационалните функции:

**1)** $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} dx$; Одг.: **1)** $-6\sqrt[6]{x} - 2\sqrt{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} -$

$-\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - 3 \, ln \, \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1} + C.$

**2)** $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$; **2)** $6t–3t^2–2t^3 + \frac{3}{2} t^4 + \frac{6}{5} t^5 - \frac{6}{7} t^7 +$

$+3 \, ln(1+t^2) –6 \, arctg \, t + C, \; t = \sqrt[6]{x+1}.$

**3)** $\int \sqrt{\frac{x}{2-x}} \, dx$; **3)** $2 \, arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{2x-x^2} + C.$

**4)** $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}$; **4)** $\frac{1}{3} \, ln \, \frac{\sqrt[4]{1+x^3}-1}{\sqrt[4]{1+x^3}+2} + \frac{2}{3} arctg \sqrt{1+x^3} + C.$

**3.** Да се најдат интегралите од биномниот диференцијал:

**1)** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; Одг.: **1)** $-\frac{1}{2}\left( x\sqrt{1-x^2} - arctg\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right) + C.$

**2)** $\int \frac{x^3}{\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,dx$; **2)** $\frac{\left(x^2-1\right)\sqrt{1+2x^2}}{6} + C\,.$

**3)** $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$; **3)** $\frac{1}{3}\sqrt{\left(x+x^2\right)^3} - \frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2} +$

$+\frac{1}{8}\,ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right) + C.$

**4.** Да се најдат интегралите од тригонометриските функции:

**1)** $\int \frac{dx}{2+cos\,x}$; Одг.: **1)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\frac{tg\,\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$

**2)** $\int \frac{cos\,x}{1+cos\,x}\,dx$; **2)** $x - tg\,\frac{x}{2} + C.$

**3)** $\int \frac{dx}{5-4sin\,x+3cos\,x}$; **3)** $\frac{1}{2-tg\,\frac{x}{2}} + C.$

**4)** $\int sin\,5x\;cos\,x\;dx$; **4)** $-\frac{1}{8}\;cos\;4x - \frac{1}{12}\;cos\;6x + C.$

**5)** $\int cos\,3x\;cos\,x\;dx$; **5)** $\frac{1}{2}\left(\frac{sin\,4x}{4} + \frac{sin\,2x}{2}\right) + C.$

**5.** Да се најдат интегралите од видот: $\int R\left(x,e^x\right)dx$ (смена: $e^x = t$)

**1)** $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$; Одг.: **1)** $e^x - ln\,(1+e^x) + C.$

**2)** $\int \frac{e^{2x} - 2e^{x}}{e^{2x} + 1}\,dx$; Одг.: **2)** $\frac{1}{2}\,ln\,(\mathrm{e}^{2x}+1) - 2\,arctg\,x + C.$

**3)** $\int \frac{xe^{x}}{\left(e^{x} - 1\right)^{3}}\,dx$; **3)** $-\frac{x}{2\left(e^{x}-1\right)^{2}} - \frac{1}{2\left(e^{x}-1\right)} -$

$$- \frac{1}{2}\,ln\,(1-e^{-x}) + C.$$

**6.** Да се најдат интегралите од хиперболичните функции:

При наоѓање на интеграли од хиперболични функции се користат основните релации шот важат меѓу нив, (гл. III, **т.5.7)**.

**1)** $\int sh^{3}x\,dx$; Одг.: **1)** $\frac{1}{3}\;ch^{3}x - ch\,x + C.$

**2)** $\int ch^{2}x\,dx$; **2)** $\frac{1}{4}(sh\,2x+2x) + C.$

**3)** $\int \frac{dx}{sh\,x\;ch\,x}$; **3)** $ln\,th\,x + C.$

**4)** $\int \frac{dx}{th^{2}x}$; **4)** $-\,cth\,x + x + C.$

**5)** $\int \frac{dx}{1 + ch\,x}$; **5)** $th\frac{x}{2} + C.$

# ГЛАВА VIII

# ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Како за воведувањето на поимот извод на функција, така и за воведувањето на поимот определен интеграл нѐ наведуваат различни задачи: задачата за определување плоштината на лик во рамнина, задачата за определување работа на променлива сила на изминат пат, наоѓање патот при зададена променлива брзина за пресметување должината на лак на крива и др. Определениот интеграл е еден од важните поими во математиката. Тој наоѓа примена во физиката, механиката, техниката и други научни области.

## 1. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ПЛОШТИНА НА КРИВОЛИНИСКИ ТРАПЕЗ

*Дел од рамнина, ограничен со* $x$*-оската, правата* $x=a$*, правата* $x=b$ *и лакот на кривата* $y=f(x)$*, каде што* $f(x)$ *е функција непрекината, ненегативна на сегментот* $[a,b]$*, се вика* ***криволиниски трапез****.*

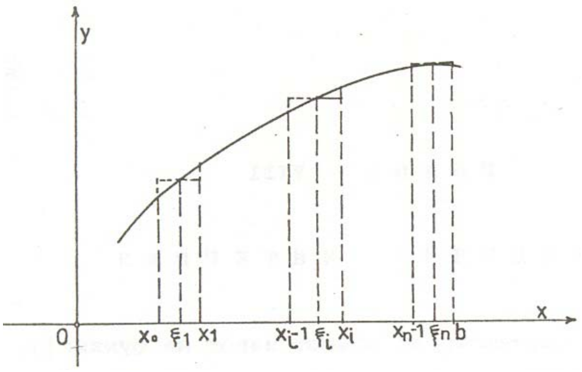
Очигледно е дека овде не можат да се користат формулите за пресметување на плоштината, што ни се познати од планиметријата, затоа ќе постапиме на следниов начин:

Сегментот $[a,b]$ ќе го поделиме на $n$ потсегменти со точките: $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n = b$ кои го задоволуваат условот:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

Во секоја од поделбените точки ќе повлечеме прави паралелни со $y$-оската. Со тоа криволинискиот трапез го разделуваме на $n$ криволиниски трапези на сегментите

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ \dots,\ [x_{i-1},x_i],\ \dots,\ [x_{n-1},x_n] \quad \text{(црт.8.1).}$$



Црт. 8. 1.

Разбирливо е дека плоштината на криволинискиот трапез ќе биде рамна на сумата од плоштините на овие помали криволиниски трапези, чија плоштина, исто така, не сме во состојба да ја пресметаме. Во секој сегмент $[x_{i-1}, x_i]$ избираме по една која и да било точка $\xi_i$, $(x_{i-1} < \xi_i < x_i\}$. Плоштината на правоаголникот со основа $[x_{i-1}, x_i]$ и висина $f(\xi_i)$ е рамна на производот $f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Сумата на плоштините $P_n$ на сите така формирани правоаголници ќе биде приближно рамна на плоштината на криволинискиот трапез,

$$P_n = f(\xi_1)\,(x_1 - x_0) + f(\xi_2)\,(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)\,(x_n - x_{n-1})$$

или кратко, со симблот $\sum$ (знак за сума) изразот за $P_n$ може да се напише во вид:

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Ако се означи $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, изразот за $P_n$ го добива следниов вид:

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Разликата помеѓу вредноста на $P_n$ и вистинската вредност на плоштината на криволинискиот трапез ќе стане помала ако се земе поголемо $n$ (сегментот $[a,b]$ да се подели на поголем број потсегменти), при што се намалува и должината на секој потсегмент.

За плоштина на криволинискиот трапез природно е да се земе границата на оваа сума кога $n\to\infty$ и притоа сите $\Delta x_i$ едновремено да тежат кон нула.

Ако со $P$ се означи плоштината на криволинискиот трапез, според горе наведеното имаме:

$$P = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i\to 0}} P_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

*Ако постои граничната вредност, независно од начинот на делењето на сегментот* $[a,b]$ *на потсегменти и независно од изборот на точките* $\xi_i$*, кога сите потсегменти истовремено тежат кон нула,* $(max\ \Delta x_i\to 0)$ *ќе претставува* ***плоштина на криволинискиот трапез*** *ограничен со лакот на кривата* $y=f(x)$*, правите* $x=a$*,* $x=b$ *и* $x$*-оската.*

## 2. ПРЕСМЕТУВАЊЕ РАБОТАТА НА ПРОМЕНЛИВА СИЛА

Материјална точка се движи под дејство на променлива сила $\left|\vec{F}\right| = f(x)$ по $x$-оската. Се поставува задача, да се најде работата $A$, што се извршува при поместување на единица маса по $x$-оската од точката $x=a$ во точката $x=b$ $(a<b)$. За функцијата $f(x)$ претпоставуваме дека е непрекината на сегментот $[a,b]$.

Ако силата $F$ е константна големина, тогаш работата (по дефиниција) е рамна на производот од силата и изминатиот пат.

Во случај на променлива сила, работата може да се пресмета на следниов начин: сегментот $[a,b]$ се дели на $n$ потсегменти : $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, … , $[x_{n-1},x_n]$ и на секој потсегмент $[x_{i-1}, x_i]$, $i= 1,2, \dots , n$ се избира по една која и да било точка $\xi_i$. Силата што дејствува на сегментот $[x_{i-1}, x_i]$ се менува од точка во точка, но ако е должината на сегментот мала, нејзината вредност во точките на сегментот $[x_{i-1}, x_i]$ малку се разликува од нејзината вредност во точката $\xi_i$, бидејќи функцијата $f(x)$ е непрекината.

Работата $A$, што ја извршува силата $F$ на сегментот $[x_{i-1}, x_i]$ приближно е еднаква на работата што ја извршува на тој сегмент силата со постојана вредност рамна на вредноста на силата во точката $\xi_i$ :

$$A_i \approx f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Работата што ја извршува силата на сегментот $[a,b]$ приближно е рамна на сумата од работата што ја извршува на секој сегмент, земајќи дека силата на секој сегмент е постојана и рамна на $f(\xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$A \approx f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n.$$

Работата што ја извршува силата на сегментот $[a,b]$ ќе ја добиеме како граница на оваа сума, кога бројот на делење $n \to \infty$ и секој потсегмент $\Delta x_i \to 0$ ,

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

## 3. ДЕФИНИЦИЈА НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Може да се наведат уште многу конкретни проблеми, чие решавање се сведува на истата низа од математички операции што ги извршивме при пресметувањето на плоштината на криволинискиот трапез и при работата на променлива сила.

Апстрахирајќи се од конкретната содржина на задачата што се решава, постапката се состои во следново:

**1)** интервалот $[a,b]$ во кој е зададена непрекинатата функција $y=f(x)$ се разделува на $n$ парцијални интервали (потсегменти) со точките:

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i\ \ldots,\ x_n = b,$$

кои го задоволуваат условот:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b;$$

**2)** во секој потсегмент $[x_{i-1}, x_i]$ избираме по една која и да било точка $\xi_i$. Вредноста на функцијата во таа точка $f(\xi_i)$ се помножува со должината на соодветниот интервал $\Delta x_i$;

**3)** се формира сумата од сите тие производи:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

*Оваа сума се вика* ***интегрална сума на функцијата*** $f(x)$ *во интервалот* $[a,b]$. Интегралната сума на дадена функција во даден интервал зависи од $n$-бројот на подинтервалите, од начинот на делење на подинтервалите, како и од изборот на точките $\xi_i$;

**4)** се определува границата $I$ на сумата $I_n$, кога $n\to\infty$ и кога должината на секој подинтервал $\Delta x_i \to 0$.

*Ако при каква и да било поделба на интервалот* $[a,b]$ *на подинтервали* $[x_{i-1}, x_i]$ *и за каков и да било избор на точките* $\xi_i$ *постои иста гранична вредност на интегралните суми* $I_n$, *кога* $n\to\infty$ *и кога должината на секој подинтервал* $[x_{i-1}, x_i]$ *тежи кон нула* (*подинтервалот со најголема должина* $\Delta x_i \to 0$),

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

*тогаш таа гранична вредност се вика* ***определен интеграл на функцијата*** $f(x)$ ***во интервалот*** $[a,b]$ *и симболично се означува со*

$$\int_a^b f(x)dx .$$

Значи:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx .$$

*Функцијата* $f(x)$ *се вика* ***подинтегрална функција,*** $x$-***променлива на интегрирањето***, *бројот* $a$-***долна граница***, *а бројот* $b$-***горна граница на интегралот***. Симболот $\int$ потекнува од буквата $S$ (првата буква од латинскиот збор *summa*) и не потсетува на операцијата собирање и определување на граничната вредност.

*Определениот интеграл е реален број.*

*За функцијата што има определен интеграл во интервалот* $[a,b]$ *велиме дека е* ***интеграбилна функција*** *во тој интервал.*

Непрекинатите функции се интеграбилни.

**Теорема.** *Ако* $f\,(x)$ *е непрекината функција на интервалот* $[a,b]$, *тогаш таа е интеграбилна на тој интервал.*

⌈**Доказ:** Нека функцијата $f\,(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$. Отсечката $[a,b]$ да ја поделиме на $n$ делови со точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b. \tag{1}$$

На секоја отсечка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, непрекинатата функција $f\,(x)$ во некои точки ја достигнува својата најмала вредност $m_i$ и најголемата вредност $M_i$ на таа отсечка. Ќе ги составиме интегралните суми

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i\ \Delta x_i\,, \qquad S = \sum_{i=1}^{n} M_i\ \Delta x_i\,.$$

*Сумата* $s$ *се вика* ***долна интегрална сума***, *а сумата* $S$ *се вика* ***горна интегрална сума*** *или* ***суми на Дарбу***. Ако $\xi_i$ се кои и да било точки од интервалите $[x_{i-1}, x_i]$, за нив важат неравенствата

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i.$$

Затоа, за секоја друга интегрална сума $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$ имаме

$$s \leq \sigma \leq S. \tag{2}$$

Сумите на Дарбу ги имаат следниве својства:

***прво својство***: ако на точките на делење им придружиме нови поделбени точки, тогаш долната сума на Дарбу може само да се зголеми, а горната сума само да се намали.

За да го докажеме тоа својство доволно е да се ограничиме на дополнување со уште една поделбена точка $x'$. .

Нека таа нова точка е во сегментот $[x_{i-1}, x_i]$,

$$x_{i-1} < x' < x_i.$$

Ако со $S\,'$ ја означиме новата горна сума, тогаш таа ќе се разликува од претходната сума $S$ со тоа што на интервалот $[x_{i-1}, x_i]$ на сумата $S$ ѐ одговара собирокот

$$M_i\,(x_i - x_{i-1}),$$

а во новата сума $S\,'$ на тој интервал ќе му одговараат два собирка

$$\overline{M}_i\,(x'-x_{i-1}) + \overline{\overline{M}}_i\,(x_i-x'),$$

каде што

$$\overline{M}_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x']} f(x), \qquad \overline{\overline{M}}_i = \sup_{x\in[x',x_i]} f(x).$$

Бидејќи

$$\overline{M}_i \le M_i \quad \text{и} \quad \overline{\overline{M}}_i \le M_i,$$

имаме:

$$\overline{M}_i\,(x'-x_{i-1}) \le M_i\,(x'-x_{i-1}) \quad \text{и} \quad \overline{\overline{M}}_i\,(x_i-x') \le M_i\,(x_i-x').$$

Оттука следува дека

$$S' \le S.$$

За долната сума доказот е сличен;

***второ својство:*** секоја долна сума на Дарбу не е поголема од секоја горна сума, која одговара и на некоја друга поделба на интервалот.

Да го поделиме интервалот $[a,b]$ на делови при која и да било поделба. При таа поделба сумите на Дарбу нека се $s_1$ и $S_1$. Притоа, да го поделиме интервалот $[a,b]$ на делови при некоја друга поделба која не е во врска со првата поделба. На таа поделба нека ѐ одговараат сумите на Дарбу $s_2$ и $S_2$.

Потребно е да докажеме дека $s_1 < S_2$.

За таа цел земаме унија од двете поделби на која ѐ одговараат сумите на Дарбу $s_3$ и $S_3$.

Според првото својство имаме $s_1 \le s_3$, затоа што третата поделба ја добиваме со придружување на нови поделбени точки кон првата поделба.

Исто така, $S_3 \le S_2$, затоа што третата поделба ја добиваме со придружување на нови поделбени точки на втората поделба. Но $s_3 \le S_3$, затоа од добиените неравенства следува:

$$s_1 < S_2,$$

што требаше да се докаже.

Од докажаното следува дека множеството $\{s_n\}$ на долните суми е ограничено одозгора, на пример со секоја горна сума $S$. Значи низата од сумите $s_n$, $(s_n)$ монотоно расте и е ограничена одозгора, а од тоа следува дека има граница $\underline{I} = sup\, S$.

Аналогно се докажува дека сумите на Дарбу $S$ образуваат бесконечна низа која монотоно опаѓа (поточно не расте) и е ограничена, т.е. таа ќе конвергира кон некој број $\bar{I} = inf\, S$.

Очигледно е дека

$$s \le \underline{I} \le \bar{I} \le S \qquad (3)$$

за кои и да било долни и горни суми на Дарбу. Сега треба да докажеме дека $\bar{I} = \underline{I}$. За таа цел од неравенството (3) следува дека е доволно да докажеме дека:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i \to 0}} (S-s) = 0. \qquad (4)$$

$$S-s = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Од непрекинатоста на функцијата на подинтервалот $[x_{i-1},x_i]$ следува дека постојат точките $x_i'$ и $x_i''$, така што

$$M_i = f(x_i'), \qquad m_i = f(x_i'')$$

па следува:

$$S - s = \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i') - f(x_i'')\right](x_i - x_{i-1}).$$

Функцијата $f(x)$ непрекината на интервалот $[a,b]$ е исто така и рамномерно непрекината во тој интервал. Затоа, за произволно $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$, таков што кога

$$|x'-x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Ако поделбата на интервалот $[a,b]$ ја извршиме така што $\left|x_i - x_{i-1}\right| < \delta$ за кој и да било $i$, тогаш и $\left|x' - x''\right| < \delta$, а потоа и $\left| f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon$, па имаме:

$$\left|S - s\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left| f(x_i') - f(x_i'')\right| \left|x_i - x_{i-1}\right| \leq \varepsilon\,(b-a),$$

а тоа значи дека

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ max(x_i - x_{i-1})\to 0}} (S-s) = 0,$$

т.е.

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ max(x_i - x_{i-1})\to 0}} S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max(x_i - x_{i-1})\to 0}} s = \bar{I} = \underline{I} = I.$$

Ако условот (4) е исполнет, тогаш од (3) веднаш следува дека $\bar{I} = \underline{I} = I$,

$$s \leq I \leq S \qquad (*)$$

Ако е $\sigma$ една вредност на интегралната сума при истата поделба за која се добиени $s$ и $S$, знаеме дека

$$s \leq \sigma \leq S.$$

Од условот (4), ако се претпостави дека $\Delta x_i$ се доволно мали, сумите $s$ и $S$ се разликуваат за некое произволно земено $\varepsilon>0$. Во тој случај тоа е исполнето и за вклучените меѓу нив $\sigma$ и $I$:

$$\left|\sigma - I\right| < \varepsilon,$$

така што $I$ е граница на $\sigma$, т.е. определен интеграл.

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i\to 0}} \sigma = I = \int_a^b f(x)dx\,.\rfloor$$

Докажавме дека секоја функција $f(x)$, непрекината на интервалот $[a,b]$, е интеграбилна во тој интервал. Обратното не важи, т.е. функцијата $f(x)$, интеграбилна во интервалот $[a,b]$, не мора да биде непрекината во тој интервал. На пример класата на функции што се ограничени и имаат конечен број прекини на сегментот $[a,b]$ е интеграбилна на тој сегмент.

При дефинирањето на определениот интеграл претпоставивме дека $a < b$. Да ги разгледаме случаите кога $a = b$ и $a > b$.

По дефиниција,

**1⁰** *ако* $a > b$, *тогаш*:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

*при претпоставка дека постои* $\int_a^b f(x)dx$, *т.е. при заемна замена на горната и долната граница на определениот интеграл неговата вредност ќе го промени знакот*;

**2⁰** *ако* $a = b$, *тогаш*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Постапката што ја спроведовме при дефинирањето на определен интеграл ќе ја примениме на неколку конкретни примери.

**Пример 1.** *Да се пресмета интегралот*

$$\int_a^b dx.$$

Подинтегралната функција е $f(x) = 1$. Ќе ја составиме интегралната сума за таа функција на сегментот $[a,b]$. Сегментот $[a,b]$ го делиме на кој и да било начин на $n$ потсегменти

$$[a,x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots\ ,\ [x_{i-1}, x_i],\ \ldots\ ,\ [x_{n-1}, b].$$

Во секој потсегмент $[x_{i-1}, x_i]$ избираме по една која и да било точка $\xi_i$. Очигледно дека $f(\xi_i) = 1$, за секој $\xi_i$. Според тоа,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = b - a.$$

Границата на оваа сума, кога должината на секој потсегмент $\Delta x_i \to 0$, е

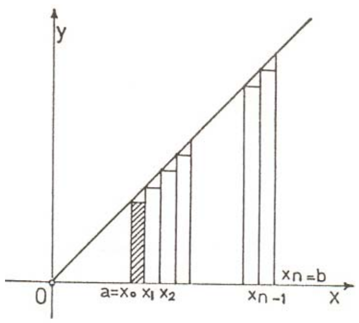
$$\int_a^b dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_{i-1}\right) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$$

затоа што $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$ е сума од должините на потсегментите на кои е разбиен сегментот $[a,b]$.

**Пример 2.** *Да се пресмета интегралот*

$$\int_a^b x\,dx .$$

Геометриски задачата е еквивалентна на барањето да се пресмета плоштината на трапезот, ограничен со правите $y=x$, $x=a$, $x=b$ и апсцисната оска (црт.8.2).



Црт. 8. 2.

Функцијата $f\,(x) = x$ е непрекината на секој сегмент $[a,b]$, затоа таа е интеграбилна.

За да се пресмета определениот интеграл, сегментот $[a,b]$ ќе го поделиме на $n$ еднакви делови, така што должината на кој и да било од нив ќе биде:

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x.$$

Поделбените точки ги имаат следниве координати:

$x_0 = a, \quad x_1 = a+\Delta x, \quad x_2 = a+2\cdot\Delta x, \; \ldots$

$\ldots, \quad x_i = a+ i\cdot\Delta x, \; \ldots, \quad x_n = a + n\cdot\Delta x = b.$

Во секој потсегмент $[x_{i-1}, x_i]$ во својство на точки $\xi_i$ ќе се земе левиот крај на потсегментот

$\xi_1 = a, \; \xi_2 = a+\Delta x, \; \ldots, \; \xi_i = a+ (i-1)\,\Delta x \;, \; \ldots, \; \xi_n = a+(n-1)\,\Delta x,$

а $f(\xi_i) = \xi_i$.

Да ја составиме интегралната сума

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \;\Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^{n} \xi_i \; =$$

$$= \Delta x\{ a + (a+\Delta x) +(a+2\Delta x) +\ldots+[ a+(i-1)\Delta x] + \ldots + [ a+(n-1)\Delta x]\} =$$
$$=\Delta x \{ na+\Delta x\, [1+2+ \ldots + (n-1) ]\}.$$

Бидејќи

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad , \quad 1+2+3+ \ \ldots \ +(n-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

се добива:

$$I_n = \frac{b-a}{n}\left[na+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right]$$

т.е.

$$I_n = (b-a)\left[a+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{b-a}{2}\right].$$

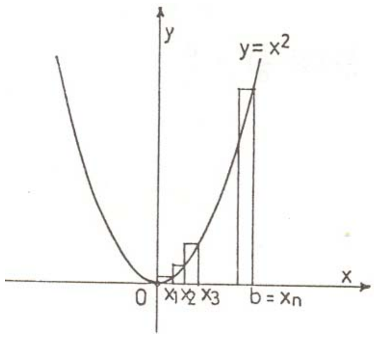
Границата на интегралната сума $I_n$ е:

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} (b-a)\left[a+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{b-a}{2}\right] = \frac{b^2-a^2}{2},$$

бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n} = 1.$

**Пример 3.** *Да се пресмета интегралот*

$$\int_0^b x^2\,dx.$$



Црт. 8. 3.

Вредноста на овој интеграл е рамна на плоштината на криволинискиот трапез ограничен со параболата $y=x^2$, правата $x=b$ и $x$-оската (црт.8.3).

Бидејќи функцијата $f(x)=x^2$ е непрекината на целата реална оска, таа е непрекината на сегментот $[0,b]$, затоа функцијата е интеграбилна на тој сегмент.

За да го пресметаме интегралот, ќе ја составиме интегралната сума на функцијата $f(x) = x^2$ на сегментот $[0,b]$.

Сегментот $[0,b]$ ќе го поделиме на $n$-еднакви потсегменти со точките

$$x_0 = 0,\ \ x_1 = \Delta x,\ \ x_2 = 2\cdot\Delta x,\ \dots\ ,\ \ x_i = i\cdot \Delta x,\ \dots\ ,\ \ x_n = n\cdot\Delta x = b.$$

каде што $\Delta x = \dfrac{b}{n}$.

За точки $\xi_i$ ќе ги земеме десните крајни точки во секој сегмент,

$$\xi_i = x_i = i\cdot\Delta x, \quad \text{a} \quad f(\xi_i) = \xi_i^2 = x_i^2\,.$$

Интегралната сума

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\xi_i^{\,2}\ \Delta x = \sum_{i=1}^{n} i^2(\Delta x)^2\cdot\Delta x =$$

$$= (\Delta x)^3 \sum_{i=1}^{n} i^2 = (\Delta x)^3\cdot(1^2 + 2^{\,2} + \dots + n^2).$$

Бидејќи

$$1^2 + 2^{\,2} + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \Delta x = \frac{b}{n}$$

имаме

$$I_n = \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

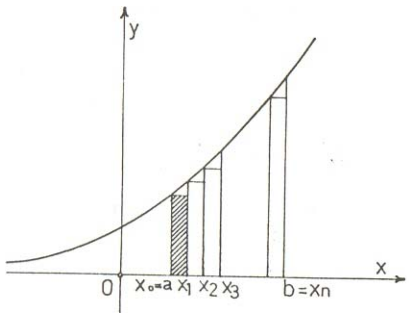
Границата на интегралната сума кога $n\to\infty$ е

$$\int_0^b x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\ \frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{3}.$$

**Пример 4.** *Да се пресмета интегралот*

$$\int_a^b e^x\,dx\,.$$

Вредноста на интегралот е рамна на плоштината на криволинискиот трапез ограничен со кривата $y=e^x$, правите $x=a$, $x=b$ и $x$-оската (црт.8.4).



Функцијата $f(x) = e^x$ е непрекината на сегментот $[a,b]$ затоа таа е интеграбилна.

Сегментот $[a,b]$ го делиме на $n$ еднакви делови. Поделбените точки ги имаат следниве координати:

$$x_0=a, \quad x_1=a+\Delta x, \quad x_2 = a+2\cdot\Delta x, \ \ldots$$

$$\ldots, x_i=a+i\cdot\Delta x, \ldots, x_n=a+n\cdot\Delta x= b.$$

Црт. 8. 4.

За точки $\xi_i$ ги земаме левите крајни точки на потсегментите $\xi_i=x_{i-1}$. Вредностите на функцијата во овие точки соодветно се:

$$y_0 = e^{a}, \quad y_1 = e^{a+\Delta x}, \ \ldots \ , \quad y_i = e^{a+i\cdot\Delta x}, \ \ldots \ , \quad y_{n-1} = e^{a+(n-1)\Delta x}.$$

Формираме интегрална сума

$$I_n = e^{a}\cdot\Delta x + e^{a+\Delta x}\cdot\Delta x + \ \ldots \ + e^{a+i\cdot\Delta x}\cdot\Delta x + \ \ldots \ e^{a+(n-1)\Delta x}\cdot\Delta x =$$

$$= e^{a}\cdot\Delta x + e^{a}\cdot e^{\Delta x}\cdot\Delta x + \ldots + e^{a}\cdot e^{i\cdot\Delta x}\cdot\Delta x + \ldots + e^{a}\cdot e^{(n-1)\Delta x}\cdot\Delta x =$$

$$= e^{a}\cdot\Delta x\,(1+e^{\Delta x} + \ldots + e^{i\cdot\Delta x} + \ldots + e^{(n-1)\Delta x}).$$

Со оглед на тоа дека изразот во заградата е сума на членовите на една геометриска прогресија, со количник $q= e^{\Delta x}$, а прв член $a_1=1$ согласно формулата за сума на геометриска прогресија

$$S_n = a_1\,\frac{q^n-1}{q-1},$$

се добива

$$I_n = e^{a}\cdot\Delta x\,\frac{e^{n\Delta x}-1}{e^{\Delta x}-1} = e^{a}(e^{n\Delta x}-1)\,\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1} =$$

$$= e^{a}(e^{b-a}-1)\,\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}, \quad (\Delta x = \frac{b-a}{n}).$$

Вредноста на интегралот ќе биде:

$$\int_a^b e^x\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i\to 0}} I_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i\to 0}} e^a(e^{b-a}-1)\,\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1} = e^b - e^a,$$

бидејќи $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1} = 1$, според Лопиталовото правило.

Пресметувањето на определените интеграли не се врши непосредно по дефиницијата како што беше спроведено во претходните примери. Тоа го направивме само да ја потенцираме дефиницијата на определениот интеграл. Но, од овие примери може да се заклучи дека пресметувањето на определен интеграл по дефиниција е поврзано со прилични тешкотии. На пример, ако подинтегралната функција е една од основните елементарни функции, не е сосема лесно да се пресмета определениот интеграл. Постапката станува посложена, ако за подинтегрална функција се земе која и да било сложена функција. Определените интеграли се во тесна врска со неопределените интеграли. Врската помеѓу нив е откриена од Њутн и Лајбниц, со што е најден многу практичен и едноставен начин за пресметување на определени интеграли. Имено, пресметувањето на определен интеграл се сведува на наоѓање соодветен неопределен интеграл, т.е. на определување на примитивната функција. Со откривањето на оваа врска определениот интеграл го добива она значење што денеска го има во математиката, механиката, техниката, астрономијата и во другите науки.

## 4. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Својствата на определените интеграли што овде ги наведуваме ќе ги користиме за решавање на определените интеграли и за оценување на нивната вредност.

**$1^0$** *Ако функцијата* $f(x)$ *е интеграбилна на интервалот* $[a,b]$, *тогаш функцијата* $k\,f(x)$, *каде што* $k=const$, *исто така, е интеграбилна на истиот интервал, при што*

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

*т.е. константен множител може да се изнесе пред знакот на определениот интеграл.*

Според дефиницијата за определен интеграл и својствата на границите, имаме:

$$\int_a^b k\,f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} k\,f(\xi_i)\,\Delta x_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i\to 0}} k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= k \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = k\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

**2⁰** *Определен интеграл од сума на конечен број функции е рамен на сумата од интегралите од одделните функции, т.е.*

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)]\,dx =$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_m(x)dx\,.$$

По дефиниција е

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)]\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} [f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i) + \ldots + f_m(\xi_i)]\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} [f_1(\xi_i)\,\Delta x_i + f_2(\xi_i)\,\Delta x_i + \ldots + f_m(\xi_i)\,\Delta x_i]\,.$$

Врз основа на својството за граница на сума (гл. IV **т. 3.1**), имаме:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\,\Delta x_i + \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\,\Delta x_i + \ldots$$

$$\ldots + \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f_m(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_m(x)dx\,.$$

**$3^0$** *Ако интервалот на интегрирање* $[a,b]$ *се раздели на два дела* $[a,c]$ *и* $[c,b]$, (*каде што* $a < c < b$), *тогаш*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Ќе составиме интегрална сума за функцијата $y=f(x)$, над интервалот $[a,b]$, водејќи притоа сметка точката $x=c$ да биде една од поделбените точки, на пример $x_m$. Интегралната сума на функцијата $f(x)$ над сегментот $[a,b]$ може да ја разгледаме како две суми, едната сума над сегментот $[a,c]$ и другата сума над сегментот $[c,b]$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \ .$$

Преминувајќи на граница, кога $n\to\infty$ и сите $\Delta x_i \to 0$, се добива:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \lim_{\substack{m\to\infty \\ max\,\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Равенството важи и за случајот ако точката $x=c$ е надвор од интервалот $[a,b]$.

Ако е $a < b < c$, тогаш од докажаното равенство следува:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx .$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Слично се докажува и за $c < a < b$.

**4⁰** *Ако* $f\,(x)$ *е интеграбилна, ненегативна функција на сегментот* $[a,b]$, $(a < b)$, *тогаш*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Навистина, при која и да било поделба на сегментот $[a,b]$ на потсегменти и за кој и да било избор на точките $\xi_i$ во потсегментите, ќе имаме:

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,\Delta x_i \;\geq 0$$

бидејќи сите разлики $\Delta x_i$ се позитивни и бидејќи $f\,(x) \geq 0$, сите вредности $f\,(\xi_i)$ се позитивни. Ако интегралната сума е позитивна, тогаш и нејзината граница кога $max\Delta x_i \to 0$ не може да биде негативен број:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,\Delta x_i \;\geq 0,$$

т.е.

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Со тоа својството е докажано.

Аналогно се докажува, *ако* $f\,(x)$ *е интеграбилна и непозитивна функција на сегментот* $[a,b]$, *тогаш*

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0.$$

Од докажаното својство следува:

**а)** *ако функциите* $f\,(x)$ *и* $\varphi(x)$ *се интеграбилни на сегментот* $[a,b]$ *и на тој сегмент* $f\,(x) \leq \varphi\,(x)$, *тогаш*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx\,.$$

Навистина, од $f(x) \leq \varphi(x)$, имаме $\varphi(x) - f(x) \geq 0$, а од докажаното својство **4⁰** следува:

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\, dx \geq 0$$

а од својството **2⁰**:

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx - \int_a^b f(x) \geq 0,$$

односно:

$$\int_a^b f(x) \leq \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Значи, *неравенството меѓу интеграбилни функции се задржува во иста насока и при интегралите на тие функции*:

**б)** *ако функцијата* $f(x)$ *е непрекината на сегментот* $[a,b]$, *тогаш*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b | f(x)| dx.$$

Ова својство може да биде докажано врз основа на интеграбилноста на функцијата $f(x)$,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} | f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) | ,$$

ако минеме на граница се добива:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b | f(x)| dx.$$

**5⁰** *Нека* $f(x)$ *е интеграбилна функција на сегментот* $[a,b]$ *и ако е*

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \qquad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

*тогаш за вредноста на определениот интеграл важи:*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Бидејќи

$$M - f(x) \geq 0,$$

според претходното својство

$$\int_a^b [M - f(x)]dx \geq 0,$$

$$\int_a^b M\,dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0,$$

$$M\int_a^b dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0,$$

и **примерот 1** од **т.3**

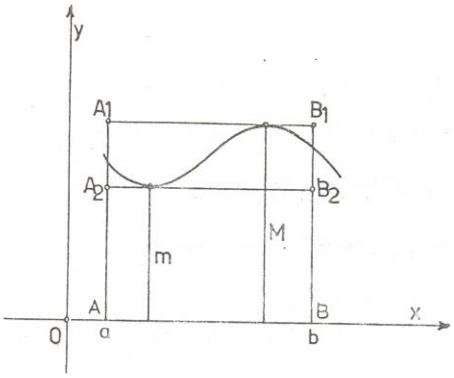
$$M(b-a) - \int_a^b f(x)dx \geq 0,$$

$$M(b-a) \geq \int_a^b f(x)dx\,.$$

Ако се формира разликата $m - f\,(x) \leq 0$ и се повтори постапката се добива:

$$\int_a^b [m - f(x)]dx \leq 0, \qquad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx\,.$$

Двата резултата го потврдуваат горенаведеното неравенство.



Црт. 8. 5.

Ако $f\,(x) \geq 0$, ова својство се илустрира геометриски. Плоштината на криволинискиот трапез се наоѓа помеѓу плоштините на правоаголниците $ABB_2A_2$ и $ABB_1A_1$ (црт. 8.5).

Ова својство на определениот интеграл ни овозможува да ја оцениме вредноста на интегралот, а се користи и за приближно пресметување на определениот интеграл.

**Пример 1.** *Да се оцени вредноста на интегралот*

$$\int_{0}^{2} \frac{5-x}{9-x^2}\,dx.$$

Познато е дека во интервалот $[0,2]$ максималната вредност на подинтегралната функција е $M = 0,6$, а минималната вредност $m = 0,5$.

Според тоа,

$$0,5 \cdot (2–0) < \int_{0}^{2} \frac{5-x}{9-x^2}\,dx < 0,6 \cdot (2–0),$$

$$1,0 < \int_{0}^{2} \frac{5-x}{9-x^2}\,dx < 1,2.$$

Значи, вредноста на определениот интеграл е помеѓу 1,0 и 1,2. Може да се земе дека приближната вредност е аритметичка средина, а имено 1,1.

**Пример 2.** *Да се пресмета приближно вредноста на интегралот*

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Познато е дека функцијата $y = \dfrac{\sin x}{x}$ опаѓа во интервалот $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, па според тоа, максималната вредност на функцијата е во точката $\frac{\pi}{4}$, а минималната вредност во точката $\frac{\pi}{2}$.

Според формулата го имаме овој однос:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx < \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

односно

$$\frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Приближната вредност на интегралот ќе биде $\frac{0{,}5+0{,}7}{2} = 0{,}6.$

Ќе споменеме дека ова не е најпогоден начин за приближно пресметување на определен интеграл. Во точката 7 ќе укажеме на начините за пресметување на определен интеграл со кои вредноста се добива со многу поголема точност.

**$6^0$ Теорема за средна вредност.** *Ако функцијата* $f(x)$ *е непрекината на сегментот* $[a,b]$ *тогаш постои барем една вредност* $\xi$, $a< \xi < b$, *за која важи равенството*:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\, f(\xi). \tag{1}$$

Ако $m$ и $M$ се соодветно најмалата, односно најголемата вредност на функцијата во интервалот $[a,b]$, според претходното својство ќе биде:

$$m < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx < M,$$

што може да се напише и во вид:

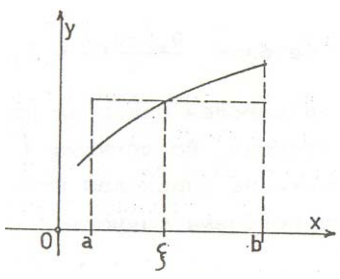
$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \mu,$$

каде што $\mu$ е една вредност помеѓу $m$ и $M$ ($m<\mu<M$). Бидејќи $f(x)$ е непрекината функција во интервалот $[a,b]$, таа ги прима сите вредности помеѓу $m$ и $M$. Следователно, за некоја вредност на $x=\xi$ ќе биде $\mu = f(\xi)$, т.е.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(\xi)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\, f(\xi).$$



Црт. 8. 6.

Равенството (1) го има следново геометриско значење: Плоштината на криволинискиот трапез ограничен со кривата $y=f(x)$, ( $f(x)>0$) и правите $x=a$, $x=b$ и $y=0$ е еднаква на плоштината на правоаголникот со иста основа и висина еднаква на ординатата во точката $\xi$ од таа крива (црт.8.6).

## 5. ВРСКА ПОМЕЃУ ОПРЕДЕЛЕН И НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Нека функцијата $f(x)$ е интеграбилна на сегментот $[a,b]$, т.е. постои $\int_a^b f(x)dx$. Од самата дефиниција на определен интеграл ако е зададена функцијата $f(x)$ и границите на интегрирањето $a$ и $b$, тогаш интегралот е еднозначно определен. Вредноста на определениот интеграл не зависи од означувањето на променливата на интегрирањето, затоа променливата на интегрирањето може да се означи со која и да било буква, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz.$$

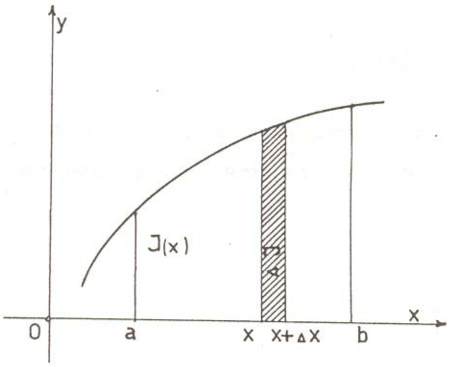
Ќе го разгледаме определениот интеграл $\int_a^x f(x)dx$, каде што $a\leq x\leq b$.

Променливата на интегрирањето ќе ја означиме со $t$, за разлика од горната граница на интегралот, за да не дојде до недоразбирање.

На секоја вредност за $x$ од сегментот $[a,b]$ ќе одговара еден определен број: $\int_a^x f(t)\,dt$.

Значи, разгледуваниот интеграл е некоја функција од горната граница $x$. Таа функција да ја означиме со $I(x)$,

$$I\,(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$



Црт. 8. 7.

Функцијата $I(x)$ ја изразува плоштината на криволинискиот трапез, ограничен со кривата $y=f\,(x)$, правата $x=a$ и правата паралелна со $y$-оската на растојание $x$ од координатниот почеток (црт.8.7).

$$I\,(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt\,.$$

Нараснувањето на функцијата $\Delta\, I(x)$ е:

$$\Delta\, I = I\,(x+\Delta x) - I\,(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)\,dt =$$

$$= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\,,$$

т.е.

$$\Delta\, I = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\,.$$

Применувајќи ја теоремата за средна вредност (својство **6⁰**), се добива:

$$\Delta\, I = (x+\Delta x - x)\, f(\xi), \qquad x < \xi < x+\Delta x,$$

односно:

$$\Delta\, I = \Delta x\, f(\xi).$$

Нараснувањето $\Delta\, I$ го делиме со нараснувањето на независно променливата и ја определуваме границата на количникот $\dfrac{\Delta I}{\Delta x}$ кога $\Delta\, x \to 0$.

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\, f(\xi)}{\Delta x} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$$

бидејќи од соодносот $x < \xi < x+\Delta x$, кога $\Delta x \to 0$, следува $\xi \to x$, така што конечно добиваме дека $I'(x) = f(x)$, односно

$$\left( \int_a^x f(t)dt \right)' = f(x),$$

т.е. *изводот на интегралот по горната граница* (*кога таа е променлива*) *е подинтегралната функција во зависност од горната граница* $x$.

Од $I'(x) = f(x)$ добиваме дека:

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C,$$

каде што $F(x)$ е примитивна функција на функцијата $y=f(x)$, така што

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C,$$

претставува еден идентитет за соодветен избор на вредноста на интеграционата константа $C$. За определување на константата ќе замениме $x = a$ и добиваме:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

или

$$0 = F(a) + C; \qquad \mathrm{C} = -F(a),$$

па следува:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Ставајќи $x = b$, се добива формулата на Њутн и Лајбниц во вид:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

или заменувајќи ја ознаката на променливата на интеграцијата со $x$, во вид:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

Формулата на Њутн–Лајбниц може да се изрази во следниов вид:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Оваа формула го дава, практички, погодниот метод за пресметување на определените интеграли. Тој се сведува на определување на примитивната функција, т.е. на наоѓање на соодветниот неопределен интеграл и пресметување на разликата на вредностите на примитивната функција во горната и долната граница.

**Пример 1.** *Да се пресмета определениот интеграл*

$$\int_1^4 \left(x^2+1\right)dx.$$

Согласно со формулата на Њутн–Лајбниц

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

постапката ќе се изврши на следниов начин:

$$\int_1^4 \left(x^2+1\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_1^4 = \left(\frac{4^3}{3}+4\right)-\left(\frac{1^3}{3}+1\right) = 24.$$

**Пример 2.** *Да се пресмета определениот интеграл*

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1}.$$

Претходно ќе го најдеме неопределениот интеграл:

Непределениот интеграл ќе го најдеме со смената:

$$x^2 + 1 = t, \quad 2x\,dx = dt, \quad x\,dx = \frac{dt}{2}.$$

Се добива:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\,ln\,t\,.$$

Примитивната функција $F(x)$ ја добиваме по враќање на старата променлива:

$$F(x) = \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+1),$$

па според тоа,

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\,ln\,2.$$

**Пример 3.** *Да се пресмета определениот интеграл*

$$\int_1^2 x\,ln\,x\,dx\ .$$

Со оглед на тоа дека интегралот не е табличен, претходно ќе го најдеме соодветниот неопределен интеграл.

Интегралот се решава со парцијална интеграција. За таа цел ќе избереме:

$$u = ln\,x; \quad dv = x\,dx$$

и пресметуваме:

$$du = \frac{dx}{x}; \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Според формулата за парцијална интеграција, се добива:

$$\int x\,ln\,x\,dx = \frac{x^2}{2}\,ln\,x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\,ln\,x - \frac{1}{2}\int x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\,ln\,x - \frac{1}{4}x^2\,.$$

Понатаму се пресметува определениот интеграл

$$\int_1^2 x\,ln\,x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}ln\,x - \frac{1}{4}x^2\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{4}{2}ln\,2 - \frac{1}{4}\cdot 4\right) - \left(0 - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 2\,ln\,2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\,ln\,2 - \frac{3}{4}.$$

**Пример 4.** *Да се пресмета определениот интеграл*

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

Наспроти **примерот 2**, овде ќе вршиме замена во определениот интеграл. Ќе замениме:

$$x = R\,sin\,t; \quad dx = R\,cos\,t\,dt,$$

ќе извршиме и замена на границите.

Од равенството $x = R\ sin\ t$, по замена за $x$ вредноста на долната граница $x=0$ се добива:

$$0 = R\,sin\,t, \quad sin\,t = 0, \quad t = 0.$$

По замена на вредноста на горната граница $x=R$, во равенството $x = R\ sin\ t$, се добива:

$$R\,sin\,t = R, \quad sin\,t = 1, \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

Според тоа, следува:

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\,sin^2\,t}\ R\,cos\,t\ dt =$$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\,t\ dt = R^2\left(\frac{t}{2} + \frac{sin\,2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2\,\frac{\pi}{4}.$$

**Пример 5.** *Да се пресмета определениот интеграл*

$$\int_0^1 xe^x\,dx.$$

За разлика од примерот 3, овде ќе ја примениме парцијалната интеграција врз определениот интеграл. Формулата го има следниов вид:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du\,.$$

Според тоа, следува:

$$\int_0^1 xe^x dx\ = x\,e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \left(xe^x\right)\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

каде што избираме:

$$u\ =\ x, \qquad du = dx,$$

$$dv\ = e^x dx, \qquad v = e^x.$$

## 6. СИНГУЛАРНИ ИНТЕГРАЛИ

При дефинирањето на определениот интеграл претпоставивме дека интервалот на интегрирањето е конечен и подинтегралната функција е непрекината во интервалот. Меѓутоа, во примена се сретнуваат определени интеграли при кои барем еден од овие услови не е исполнет. Овие интеграли за разлика од досега проучените се викаат сингуларни (небитни) интеграли.

### 6. 1. Интеграли кај кои интервалот на интегрирањето е бесконечен

Нека функцијата $f\,(x)$ е определена на бесконечниот полусегмент $[a,\ +\infty)$ и интеграбилна на кој и да било конечен дел $[a,t],\ \ (a < t < \infty)$.

Ќе го разгледаме интегралот

$$\int_a^t f(x)\,dx\,, \qquad (t > a).$$

Ако постои

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx,$$

тогаш

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx.$$

Возможни се два случаја:

*Ако постои гранична вредност, тогаш за интегралот* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *велиме дека* ***конвергира****. Ако наведената гранична вредност не постои, тогаш велиме дека функцијата во интервалот* $[a,+\infty)$ *нема интеграл, односно интегралот* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ***дивергира****.*

Дали еден сингуларен интеграл ќе биде конвергентен или дивергентен зависи од поведението на подинтегралната функција, кога $x\to\infty$.

Аналогно се определува и сингуларниот интеграл за функцијата $f(x)$ зададена на бесконечниот интервал $(-\infty,b]$ и интеграбилна на секој сегмент $[u,b]$, каде што $-\infty < u < b$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^b f(x)dx, \qquad (u < b).$$

*Ако постои оваа гранична вредност за функцијата* $f(x)$ *во интервалот* $(-\infty,b]$, *велиме дека има интеграл, односно интегралот* $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ ***конвергира****. Ако наведената гранична вредност не постои, велиме дека функцијата* $f(x)$ *во интервалот* $(-\infty,b]$ *нема интеграл или дека интегралот* $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ ***дивергира****.*

За функцијата $f(x)$ непрекината во интервалот $(-\infty,+\infty)$ сингуларниот интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ се определува со равенството

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{c} f(x)dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{c}^{t} f(x)dx,$$

каде што $c$ е кој и да било реален број (најчесто $c = 0$).

**Пример 1.** *Да се пресмета вредноста на интегралот*

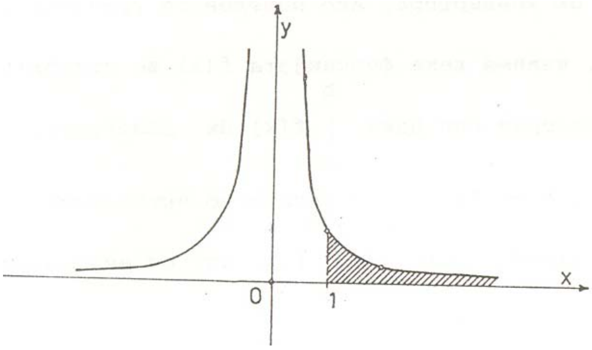
$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}.$$

Графикот на подинтегралната функција $y=\frac{1}{x^2}$ е претставен на црт.8.8.

Согласно со дефиницијата

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty}\int_{1}^{t}\frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{t} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right) = 1.$$

На примерот лесно се објаснува и геометриското значење на сингуларниот интеграл. Ако интегралот $\int_{1}^{t}\frac{dx}{x^2}$ ја изразува плоштината на ликот, ограничен со кривата $y=\frac{1}{x^2}$, $x$-оската и правите $x=1$ и $x=t$, тогаш е природно да се смета дека интегралот $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ ја изразува плоштината на криволинискиот трапез помеѓу кривата, $x$-оската и правата $x=1$ ( кога $t\to\infty$, правата $x=t$ се поместува на десно). Во случајов исенчениот криволиниски трапез има плоштина 1.



Црт. 8. 8.

**Пример 2.** Интегралот

$$\int_{0}^{+\infty} \sin x\,dx$$

дивергира затоа што

$$\int_{0}^{+\infty} \sin x\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{1}^{t} \sin x\,dx = \lim_{t\to+\infty} (-\cos x)\Big|_{0}^{t} = -\lim_{t\to+\infty} (\cos t - 1),$$

но $\lim\limits_{t\to+\infty} \cos t$ не постои.

**Пример 3.** Интегралот

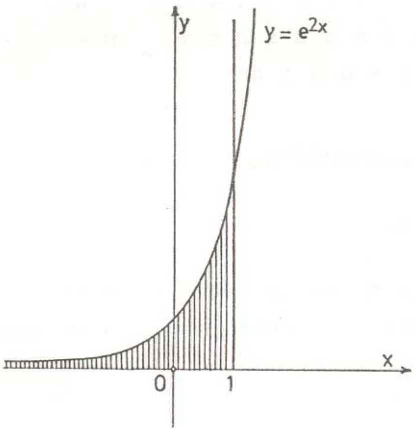
$$\int_{-\infty}^{1} e^{2x}dx$$

конвергира затоа што

$$\int_{-\infty}^{1} e^{2x}dx = \lim_{u\to-\infty} \int_{u}^{1} e^{2x}dx = \lim_{u\to-\infty} \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)\Bigg|_{u}^{1} = \lim_{u\to-\infty} \frac{1}{2}\,(e^{2}-e^{2u}) = \frac{1}{2}\,e^{2},$$

бидејќи $\lim\limits_{u\to-\infty} e^{2u} = 0$.

Добиената вредност ја изразува плоштината на ликот ограничен со кривата $y = e^{2x}$, $x$-оската и правата $x = 1$ (црт.8.9).



Црт. 8. 9.

**Пример 4.** *Да се пресмета интегралот*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}\ ,\ \text{каде што}\quad a>0.$$

Бидејќи

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{a^2+x^2}=\lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{0}\frac{dx}{a^2+x^2}=\lim_{u\to-\infty}\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}\Bigg|_{u}^{0}=\frac{\pi}{2a}$$

и

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}=\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t}\frac{dx}{a^2+x^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}\Bigg|_{0}^{t}=\frac{\pi}{2a},$$

следува:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{a^2+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{2a}+\frac{\pi}{2a}=\frac{\pi}{a}.$$

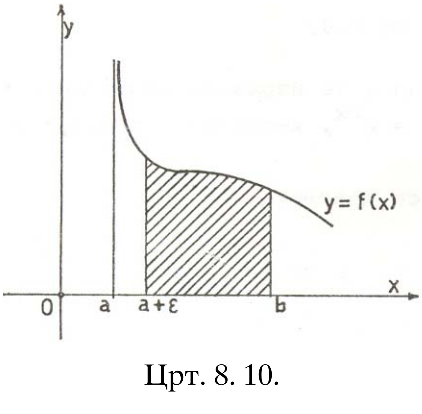
т.е. интегралот е конвергентен.

## 6. 2. Интеграли кај кои подинтегралната функција е неограничена во точка од интервалот на интеграција

**а)** Нека е даден интеграл од видот

$$\int_{a}^{b}f(x)dx \tag{*}$$

каде што подинтегралната функција $f(x)$ станува бескрајна за $x=a$, што го прави овој интеграл сингуларен (црт.8.10).



Црт. 8. 10.

Ако постои граничната вредност

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \qquad (\varepsilon > 0)$$

т.е. интегралот е конвергентен, тогаш по дефиниција е

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Аналогно за интерграл од видот

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

каде што подинтегралната функција $f(x)$ станува бескрајна во точката $x=b$, се зема

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx, \qquad (\varepsilon > 0)$$

**б)** Нека функцијата $f(x)$ во некоја точка $c$ од сегментот $[a,b]$ станува бескрајна, а по претпоставка е интеграбилна на сегментите $[a,c-\varepsilon]$, $[c+\delta,b]$ и интегралите

$$\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx, \qquad \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx$$

имаат конечни граници кога големините ε и δ независно една од друга тежат кон нула, т.е. интегралите

$$\int_{a}^{c} f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \int_{c}^{b} f(x)dx$$

се конвергентни. Тогаш по дефиниција се зема:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0} \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx$$

и се вика дека сингуларниот интеграл конвергира.

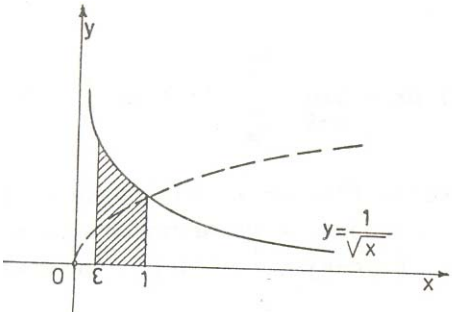
Ако барем еден од интегралите $\int_a^c f(x)dx$ ; $\int_c^b f(x)dx$ дивергира, тогаш и за интегралот $\int_a^b f(x)dx$ ќе викаме дека е дивергентен.

**Пример 5.** *Да се пресмета вредноста на интегралот*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Графикот на функцијата $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ е претставен на црт.8.11.

Функцијата има прекин за $x$=0.



Црт. 8. 11.

Според дефиницијата

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to0} \left(2\sqrt{x}\right)\Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0} \left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2-2\lim_{\varepsilon\to0} \sqrt{\varepsilon} = 2,$$

т.е. интегралот конвергира.

**Пример 6.** *Да се пресмета определениот интеграл*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Подинтегралната функција $y = \frac{1}{x^2}$ има прекин во точката $x=0$.

Интегралот ќе се пресметува за интервал $(\varepsilon,1)$. Според дефиницијата следува:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_\varepsilon^1 = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty ,$$

т.е. интегралот е дивергентен.

**Пример 7.** *Да се пресмета вредноста на интегралот*

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} .$$

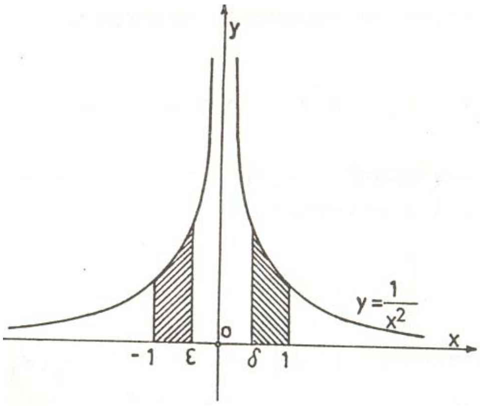
Бидејќи функцијата $y = \frac{1}{x^2}$ е прекината во интервалот $[-1,1]$ за $x=0$, интегралот треба да се претстави во вид:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\delta\to 0} \int_\delta^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_\delta^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) + \lim_{\delta\to 0}\left(-1+\frac{1}{\delta}\right) = \infty .$$

Според тоа интегралот дивергира.

На црт.8.12 се претставени новите интервали на интеграцијата.



Црт. 8. 12.

# 7. НУМЕРИЧКО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Определените интеграли како што наведовме порано, се пресметуваат, главно, со формулата на Њутн–Лајбниц. Притоа, нивното пресметување се сведува на определување на примитивната функција и пресметување на разликата на вредноста на примитивната функција за горната и долната граница. Но, не ретки се случаите кога оваа постапка е отежната поради тешкотиите да се определи примитивната функција, т.е. не може да се изрази преку елементарни функции во конечен вид или може да се изрази во конечен вид, но се изразува многу сложено или не е лесно да се пресмета нејзината вредност за горната и долната граница. Во вакви случаи се применуваат нумерички методи за приближно пресметување на определениот интеграл. Овие методи се базираат врз основа на неговото геометриско својство, а имено дека $\int_a^b f(x)dx$ ја претставува плоштината на криволинискиот трапез, ограничен со кривата $y=f(x)$, правите $x=a$, $x=b$ и $x$-оската. Врз основа на тоа својство може да се дадат неколку приближни формули, со чија помош определениот интеграл може да се пресмета со доста голема точност. Посебно ќе нагласиме дека нумеричките методи многу често се применуваат кога определениот интеграл се пресметува со помош на компјутер. Овде ќе изложиме неколку методи за приближно пресметување на определен интеграл.

## 7. 1. Метод на правоаголници

Нека над интервалот $[a,b]$ е зададена непрекината функција $y=f(x)$ и е потребно да се пресмета

$$\int_a^b f(x)dx .$$

Интервалот $[a,b]$ ќе го поделиме со точките

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n$$

на $n$ еднакви делови со должина $h$, каде што $h=\dfrac{b-a}{n}$.

Вредностите на функцијата во наведените точки ќе ги означиме со

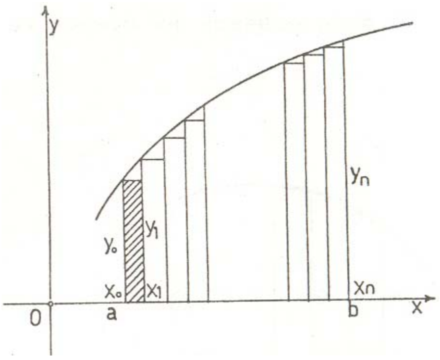
$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \dots\ ,\ y_n,$$

т.е.

$$y_0 = f(x_0),\quad y_1 = f(x_1),\quad y_2 = f(x_2),\quad \dots\quad y_n = f(x_n).$$

Криволиниските трапези ќе ги замениме со правоаголници, со тоа што за висина ќе се земе вредноста на функцијата во левиот или во десниот крај од интервалот. За вредност на определениот интеграл може да се земе, приближно, сума на плоштините на правоаголниците (црт.8.13). Таа ќе биде

$$P_n = y_0 \cdot h + y_1 \cdot h + y_2 \cdot h + \dots + y_{n-1} \cdot h,$$



Црт. 8. 13.

а бидејќи $h = \dfrac{b-a}{n}$, тогаш

$$P_n = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}).$$

Ако се земе вредноста на функцијата во десниот крај од интервалот $[a,b]$, вредноста за $P_n$, ќе биде:

$$P_n = \frac{b-a}{n}(\ y_1 + y_2 + \dots + y_n),$$

така што за приближна вредност на интегралот се добива:

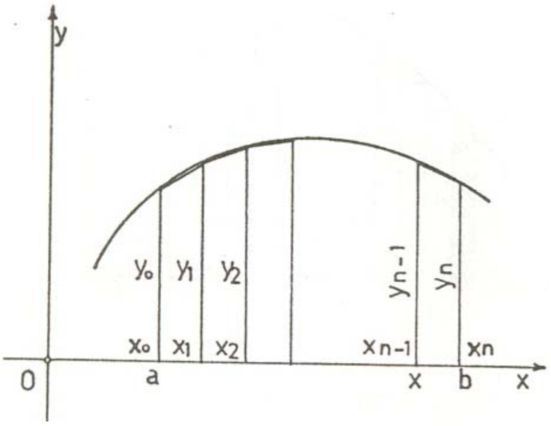
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}( y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

### 7. 2. Метод на трапези

Поточни резултати се добиваат ако во секој криволиниски трапез лакот на кривата се замени со тетивите што ги сврзуваат крајните точки (црт.8.14). Приближната вредност на интегралот ќе биде еднаква на сумата на плоштините на трапезите.



Црт. 8. 14.

Согласно со формулата за пресметување плоштина на трапез, ќе биде:

$$P_n = \frac{y_0 + y_1}{2}\cdot h + \frac{y_1 + y_2}{2}\cdot h + \frac{y_2 + y_3}{2}\cdot h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\cdot h,$$

односно:

$$P_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \dots y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right],$$

каде што

$$y_i = f(x_i), \quad \text{а} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Така што се добива:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+y_3+\ldots y_{n-1}\right]$$

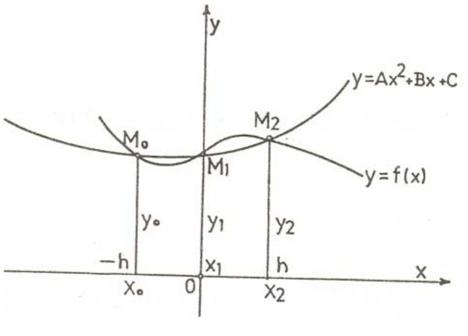
## 7. 3. Метод на Симпсон

Тоа е метод кој дава многу поточни резултати од двата претходни.

При овој метод лакот на кривата над парцијалните криволиниски трапези се заменува со лак од парабола од втор ред. Интервалот на интегрирањето, во овој случај, се дели на парен број делови (на пример $2m$), а растојанието ќе биде $h=\dfrac{b-a}{2m}$. Над секои два интервала кривата ќе се замени со параболата од вид $y = Ax^2 + Bx + C$. Над првите два интервала $(x_0,x_1)$ и $(x_1,x_2)$ ќе се повлече парабола што минува низ точките $(x_0,f(x_0))$, $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$ и над секој пар интервали се повлекува парабола што минува низ крајните точки на тие интервали.

Приближната вредност на интегралот сега ќе биде еднаква на сумата на плоштините на добиените на опишаниот начин "параболични" трапези.

Најнапред да ја пресметаме плоштината на првите два "параболични" трапеза. Координатниот систем ќе го поставиме како што е прикажано на црт. 8.15.



Црт. 8. 15.

Ако видот на параболата е

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

тогаш плоштината ќе биде:

$$P_{1-2} = \int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C\right)dx = \left(\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right)\Bigg|_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

Коефициентите $A$, $B$ и $C$ се определуваат од условот, параболата да минува низ трите точки, па следува дека тие ќе се определат од системот:

$$\begin{aligned} y_0 &= Ah^2 - Bh + C \qquad \text{за} \qquad && x = -h, \\ y_1 &= C, && x = 0, \\ y_2 &= Ah^2 + Bh + C && x = h. \end{aligned}$$

Бидејќи

$$2Ah^2 + 6C = y_0 + 4y_1 + y_2,$$

следува дека

$$P_{1-2} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

На сличен начин, со соодветна замена на индексите се добива дека плоштината на двата следни "параболични" трапеза ќе биде:

$$P_{3-4} = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4).$$

Сумирајќи ги овие плоштини се добива:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\Big[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots$$

$$\ldots + (y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})\Big],$$

односно:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\Big[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) +$$

$$+ 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})\Big],$$

при што

$$h = \frac{b-a}{2m}.$$

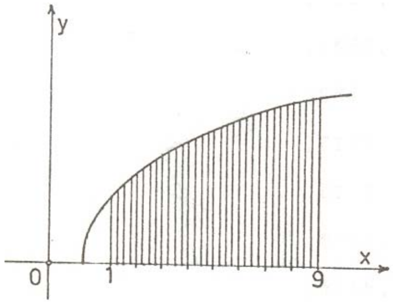
*Оваа формула е позната под името* ***Симпсонова формула***.

При делење на интервалот на $n$ делови формулата на Симпсон дава значително поточни резултати од формулата на трапезите и формулата на правоаголниците. Тоа е затоа што на подинтервал лакот на некоја парабола во општ случај е поблиску до лакот на кривата на тој подинтервал отколку тетивата што ги сврзува краевите на делот од лакот на кривата. тогаш и плоштините на соодветните криволиниски трапези, ограничени со лаците на параболите, се поблиски до плоштините на соодветните елементарни криволиниски трапези отколку плоштините на соодветните праволиниски трапези.

**Пример 1.** *Да се пресмета интегралот*

$$\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx$$

*по формулата на Њутн–Лајбниц и по приближните формули* (правоаголници, трапези и Симпсон), *делејќи го интервалот* $[1,9]$ *на* 8 *еднакви делови.*



Црт. 8. 16.

По формулата на Њутн –Лајбниц се добива:

$$\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx = \int_1^9 (6x-5)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_1^9 (6x-5)^{\frac{1}{2}}\,d(6x-5) = 38{,}00.$$

За да се применат приближните методи, ќе биде потребно да се пресметаат вредностите на функцијата $\sqrt{6x-5}$ во поделбените точки:

$$x = 1, 2, 3, 4, \ \ldots\ , 9.$$

Ја добиваме следнава табела:

| | |
|---|---|
| $x_0 = 1$ | $y_0 = \sqrt{1} = 1{,}0000$ |
| $x_1 = 2$ | $y_1 = \sqrt{7} = 2{,}6458$ |
| $x_2 = 3$ | $y_2 = \sqrt{13} = 3{,}6056$ |
| $x_3 = 4$ | $y_3 = \sqrt{19} = 4{,}3589$ |
| $x_4 = 5$ | $y_4 = \sqrt{25} = 5{,}0000$ |
| $x_5 = 6$ | $y_5 = \sqrt{31} = 5{,}5678$ |
| $x_6 = 7$ | $y_6 = \sqrt{37} = 6{,}0828$ |
| $x_7 = 8$ | $y_7 = \sqrt{43} = 6{,}5574$ |
| $x_8 = 9$ | $y_8 = \sqrt{49} = 7{,}0000$ |

Заменувајќи ги овие вредности во формулите за приближно пресметување на определениот интеграл се добива:

| | |
|---|---|
| по формулата на правоаголници | $I \approx 34{,}8183,$ |
| по формулата на трапези | $I \approx 37{,}8183,$ |
| по формулата на Симпсон | $I \approx 37{,}9655.$ |

Очигледно е дека формулата на Симпсон дава најточни резултати. Точноста по сите методи ќе се наголеми ако интервалот $[1,9]$ се подели на поголем број делови.

**Пример 2.** *Да се пресмета приближно интегралот*

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

*со метод на трапези и метод на Симпсон, делејќи го интервалот* $[0,1]$ *на десет еднакви дела.*

За да се применат приближните методи, потребно е да се пресметаат вредностите на функцијата $y = e^{x^2}$ во поделбените точки. Должината на подинтервалите е $h = \frac{b-a}{10} = \frac{1}{10}$. Земајќи ги вредностите на функцијата $y = e^{x^2}$, од готови табели се добива:

| | |
|---|---|
| $x_0 = 0{,}0$ | $y_0 = 1{,}0000$ |
| $x_1 = 0{,}1$ | $y_1 = 0{,}9900$ |
| $x_2 = 0{,}2$ | $y_2 = 0{,}9608$ |
| $x_3 = 0{,}3$ | $y_3 = 0{,}9139$ |
| $x_4 = 0{,}4$ | $y_4 = 0{,}8521$ |
| $x_5 = 0{,}5$ | $y_5 = 0{,}7788$ |
| $x_6 = 0{,}6$ | $y_6 = 0{,}6977$ |
| $x_7 = 0{,}7$ | $y_7 = 0{,}6126$ |
| $x_8 = 0{,}8$ | $y_8 = 0{,}5273$ |
| $x_9 = 0{,}9$ | $y_9 = 0{,}4449$ |
| $x_{10} = 1{,}0$ | $y_{10} = 0{,}3679$ |

Заменувајќи ги овие вредности во формулите, се добива:

по формулата на трапези $I \approx 0{,}7462$,

по формулата на Симпсон $I \approx 0{,}7468$.

# ГЛАВА IX

# ПРИМЕНА НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

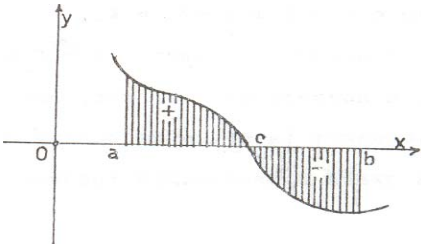
## 1. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКА ФИГУРА

Покажавме дека плоштината (квадратурата) на криволинискиот трапез, ограничен со лакот на кривата $y=f\ (x)$, каде што $f\,(x)$ е непрекината ненегативна функција во сегментот $[a,b]$, $x$-оската и правите $x=a$ и $x=b$, се пресметува по формулата

$$P = \int_a^b f(x)dx\,.$$

Поради тоа пресметувањето на определен интеграл, исто така, се вика и квадратура.

Но, ако $f\ (x) \leq 0$ над интервалот на интегрирањето $[a,b]$, криволинискиот трапез ќе биде под $x$-оската, вредноста на интегралот ќе биде негативна, па апсолутната вредност ја дава вредноста на плоштината на тој криволиниски трапез. Поради ова, треба да се води сметка при пресметување на плоштини кога функцијата во еден дел од интервалот $[a,b]$ е позитивна, а на другиот дел негативна, на пример, како што е на цртежот 9.1.



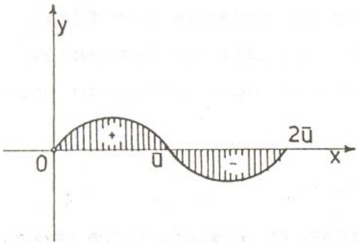
Црт. 9. 1.

Во ваков случај потребно е да се определи пресечната точка C на кривата со $x$-оската и плоштината, да се пресмета одделно за двата интервала $[a,c]$ и $[c,b]$ и да се земе сумата на апсолутните вредности, т.е.

$$P = \int_a^c f(x)dx + \left| \int_c^b f(x)dx \right| .$$

Во спротивно определениот интеграл $\int_a^b f(x)dx$ ќе ја даде разликата на означените плоштини.

**Пример 1.** *Да се пресмета плоштината на ликот ограничен со кривата* $y=\sin x$ *и* $x$*-оската за интервалот* $[0,2\pi]$ (црт.9.2).



Црт. 9. 2.

Бидејќи

$\sin x>0$ за $0<x<\pi$,

и

$\sin x<0$ за $\pi<x<2\pi$,

следува:

$$P = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx \right| .$$

Пресметуваме:

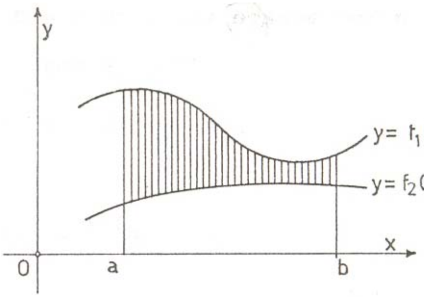
$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -(\cos x)\Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2;$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = -(\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos\pi) = -(1+1) = -2.$$

Според тоа, плоштината е $P = 2 + |-2| = 4$.

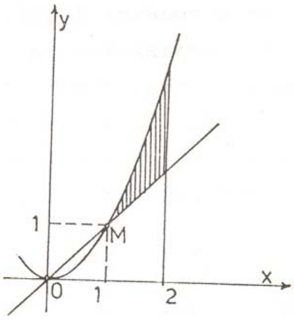
Плоштината на ликот, ограничен со кривите $y=f_1(x)$, ($f_1(x)\geq 0$), $y=f_2(x)$, ($f_2(x)\geq 0$), и правите $x=a$ и $x=b$, при услов $f_2(x)<f_1(x)$ во интервалот $[a,b]$ ќе се пресмета како разлика на плоштините на двата криволиниски трапеза (црт.9.3), т.е.:

$$P = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx .$$



Црт. 9. 3.

**Пример 2.** *Да се пресмета плоштината на ликот ограничен со параболата* $y = x^2$ *и правите* $y=x$ *и* $x=2$.



Црт. 9. 4.

На цртежот 9.4 е исенчен ликот, чија плоштина треба да се пресмета. Очигледно е дека за долна граница на интегралот треба да се земе апсцисата на пресечната точка на правата $y=x$ и параболата $y=x^2$, а горната граница е 2. Бидејќи од $x^2=x$, добиваме дека пресечната точка има апсциса еднаква на 1, за пресметување на плоштината ќе го формираме интегралот:

$$\int_1^2 \left(x^2 - x\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6} .$$

**Пример 3.** *Да се пресмета плоштината на ликот, ограничен со кривите* $y=x^2$ *и* $y = \sqrt{x}$ .

На црт.9.5 е означен ликот што го ограничуваат двете параболи. Ќе го определиме пресекот на параболите.

Од $x^2 = \sqrt{x}$ , следува: $x^4 = x^2$, $x^2(x^2 - 1) = 0$,

се добива дека апсцисите на пресечните точки се :

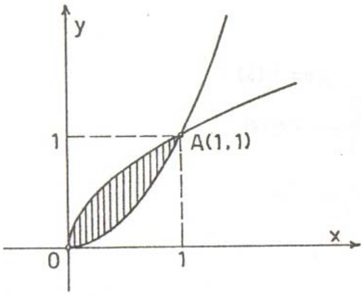
$$x = 0 \quad \text{и} \quad x = 1.$$

Според тоа,

$$P = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$



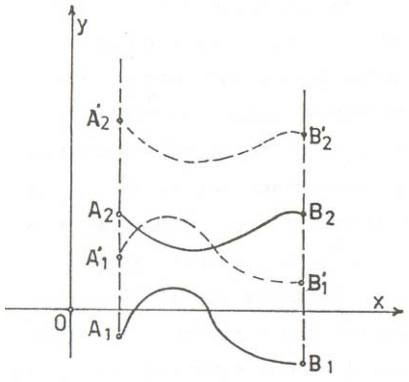
Црт. 9. 5.

Случајот кога функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$, $(f_1(x) < f_2(x))$ на дадениот сегмент $[a,b]$ го менуваат (конечен број пати) знакот (црт.9.6), се сведува на веќе разгледаниот случај. Бидејќи функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ се непрекинати на сегментот $[a,b]$, тие се и ограничени на тој сегмент. Затоа, постои таков број $M$, што $|f_1(x)| < M$ и $|f_2(x)| < M$ за секој $x \in [a,b]$, а тогаш функциите:

$$\bar{f}_1(x) = f_1(x) + M$$

$$\bar{f}_2(x) = f_2(x) + M,$$

ќе бидат ненегативни функции во сегментот $[a,b]$.

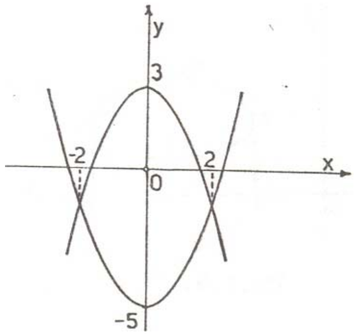


Црт. 9. 6.

Плоштината на фигурата $A_1' \, B_1' \, B_2' A_2'$ што ја ограничуваат кривите $y = \bar{f}_1(x)$ и $y = \bar{f}_2(x)$ и правите $x=a$, $x=b$ е еднаква со плоштината на фигурата $A_1B_1B_2A_2$ и се пресметува со формулата

$$P = \int_a^b \left[\bar{f}_2(x) - \bar{f}_1(x)\right]dx = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx.$$

**Пример 4.** *Да се пресмета плоштината на ликот ограничен со параболите* $y = x^2 - 5$ *и* $y = 3 - x^2$ (црт.9.7).



Црт. 9. 7.

Плоштината на ликот ќе ја пресметаме по формулата

$$P = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx.$$

Во дадениот случај

$$y = f_1(x) = x^2 - 5,$$

$$y = f_2(x) = 3 - x^2.$$

Границите на интегрирањето се апсцисите на пресечните точки на кривите. Со решавањето на системот:

$$y = x^2 - 5,$$

$$y = 3 - x^2,$$

ги добиваме пресечните точки A(−2,−1) и B(2,−1).

Според тоа, плоштината е

$$P = \int_{-2}^{2} \left[\left(3 - x^2\right) - \left(x^2 - 5\right)\right] dx = \int_{-2}^{2} \left(8 - 2x^2\right) dx = \left(8x - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{64}{3}.$$

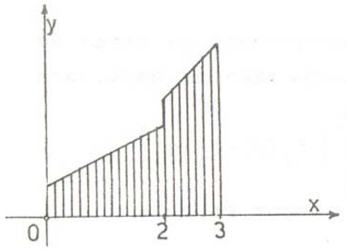
Во продолжение ќе разгледаме уште две прашања што се поврзани со пресметувањето на плоштините: интеграл кога кривата е прекината (прекин од прв вид) и интеграл кога ликот е ограничен со затворена крива.

**Пример 5.** *Нека е зададена функцијата*

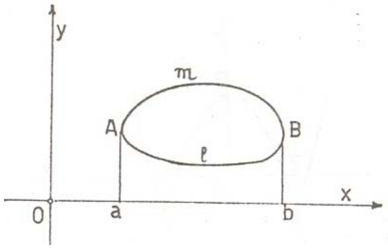
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} & \text{за} \quad 0 \le x < 2 \\ x & \text{за} \quad 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

Плоштината, ограничена со оваа крива, $x$-оската, ординатната оска и правата $x=3$ (црт.9.8), се добива по формулата:

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) dx + \int_2^3 x\, dx = \frac{9}{2}.$$



Црт. 9. 8.



Црт. 9. 9.

Нека е зададена затворена крива, која има таков облик што која и да е права, паралелна со $y$-оската, да ја сече најмногу во две точки (црт.9.9). Правите повлечени паралелно со $y$-оската нека ја тангираат кривата во точките А и В со апсциси соодветно $a$ и $b$. Со точките А и В затворената крива е разделена на два дела (на два лака). Лакот А$\ell$В со равенката $y=y_1(x)$ и лакот А$m$В со равенката $y=y_2(x)$.

Плоштината на ликот, ограничен со затворената крива, се дефинира како разлика од плоштината ограничена со лакот $y=y_2(x)$ над интервалот $[a,b]$ и ординатите на точките А и В и плоштината ограничена со лакот $y=y_1(x)$ над истиот интервал и истите ординати.

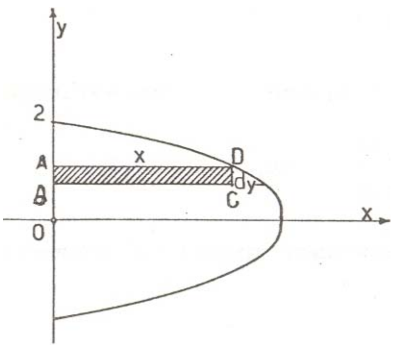
Според тоа, ќе биде:

$$P = \int_a^b y_2(x)\,dx - \int_a^b y_1(x)\,dx = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\,dx .$$

За пресметување плоштина на ликови (фигури) не секогаш е погодно да се користи изведената формула. Таа не важи во случаи кога ликот не е во вид на криволиниски трапез или се отежнува пресметувањето со тоа што тој лик се изразува со сума или разлика на криволиниски трапези.

Во применетите науки, при пресметувањето на механички и физички големини на "посебен" начин се пристапува во примената на интегралот. Таа постапка ќе ја примениме на еден пример:

**Пример 6.** *Да се пресмета плоштината на ликот, ограничен со параболата* $x= 4-y^2$ и $y$-оската (црт.9.10).



Црт. 9. 10.

Интервалот $(-2,2)$ на $y$-оската го делиме на $n$-еднакви делови и повлекуваме прави паралелни со $x$-оската. Со тоа ликот е поделен на $n$ елементи. Да нацртаме само еден од тие елементи. Растојанието $\overline{\mathrm{AD}}$ ќе го означиме со $x$, а $\overline{\mathrm{CD}}$ со $dy$, па при апроксимација на криволинискиот трапез со правоаголник, добиваме дека плоштината (ја означуваме со $dP$) е

$$dP = x\,dy.$$

По ова останува само да се изврши сумирање на овие елементи, што нè доведува до определениот интеграл

$$P = \int_{-2}^{2} x\,dy\,.$$

По замена $x = 4 - y^2$ во интегралот, се добива:

$$P = \int_{-2}^{2}\left(4 - y^2\right)dy = \left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}\,.$$

## 1. 1. Плоштина на криволиниски трапез кога кривата е зададена со параметарски равенки

Нека кривата е зададена со параметарските равенки

$$x = x(t),$$

$$y = y\,(t), \qquad (t_1 \le t \le t_2).$$

Плоштината на криволинискиот трапез се пресметува со определениот интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,\dot{x}(t)\,dt\,.$$

Формулата се добива од претходно изведената, кога ќе се изврши замена:

$$f(x) = f\,[\,x(t)] \;= y(t); \qquad dx = \;\dot{x}\,(t)\;dt.$$

Доколку границите на интегрирањето се познати за променливата $x$, $(a \le x \le b)$, што е чест случај, ќе треба да се определат соодветно вредностите на $t$, $t_1$ и $t_2$. Нив ги определуваме преку равенката $x=x(t)$. Имено, ако замениме $x=a$, од равенката $a=x(t)$ го пресметуваме $t_1$, а кога ќе замениме $x=b$, од равенката $b=x(t)$ ја добиваме вредноста на $t_2$.

**Пример 6.** *Да се пресмета плоштината на ликот што го ограничува елипсата зададена со равенките:*

$$x = a\cos t,$$

$$y = b\sin t.$$

Поради симетрија на ликот, ќе ја пресметаме само плоштината на делот во првиот квадрант. Очигледно е дека границите по променливата $x$ за овој дел се од $x = 0$ до $x = a$ (црт.9.11).

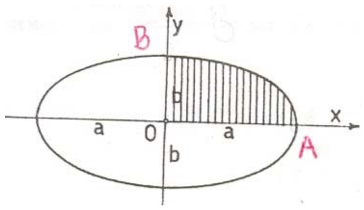
Да ги определиме вредностите на $t_1$ и $t_2$.

Од $x=a\cos t$, заменувајќи $x=0$, се добива $0=a\cos t$, односно $\cos t = 0$. Од равенката следува дека $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$ .

Од истата равенка, по замена $x=a$, се добива $a=a\cos t$, односно $\cos t=1$, од каде што следува дека $t_2=0$.

Границите по променливата $t$ можат да се определат и директно. При конструирањето на делот од елипсата во првиот квадрант се забележува, ако се прави табела на вредности $t$, дека лакот на елипсата од А до В ќе се опише ако параметарот $t$ се менува од $t=0$, (што одговара на точката А) до $t=\dfrac{\pi}{2}$ , (што одговара на точката В).

Вредноста на интегралот за вредности на границите како што ги определивме, ќе биде негативна, па затоа се зема апсолутна вредност.



Црт. 9. 11.

Доколку границите ги определиме на овој начин за целата елипса, во можност сме и одеднаш да ја добиеме вкупната плоштина на елипсата (ако земеме $0 \le t \le 2\pi$).

По определување на границите по променливата $t$ индиректно (преку $x$) или директно, плоштината ќе ја добиеме преку определениот интеграл

$$P = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\,sin\,t\left(-a\,sin\,t\right)dt = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin^2 t\ dt = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1-cos\,2t}{2}\,dt =$$

$$= -ab\left(\frac{t}{2}-\frac{sin\,2t}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = -ab\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{ab\pi}{4}.$$

Вкупната плоштина на ликот ограничен со елипсата е $P=ab\pi$ .

За $a=b=r$, елипсата преминува во круг со радиус $r$. Од $P=ab\pi$, по замена, се добива $P=r^2\pi$, познатата формула за плоштина на круг.

## 1. 2. Плоштина на криволиниски сектор

Нека е зададена крива во поларен координатен систем со равенката $\rho=\rho(\varphi)$, каде што $\rho(\varphi)$ е непрекината функција во сегментот $[\alpha,\beta]$. *Фигурата* OABO (црт.9.12), *ограничена со лакот на кривата* $\rho=\rho(\varphi)$ *и полуправите* $\varphi=a$ *и* $\varphi=b$, *се вика* ***криволиниски сектор***. Плоштината на криволинискиот сектор не сме во можност да ја пресметаме со формулите што ги познаваме од планиметријата, затоа ќе примениме слична постапка на онаа што ја применивме при пресметување на плоштината на криволинискиот трапез.

Со полуправите:

$$\varphi = \alpha \equiv \varphi_0,\ \ \varphi = \varphi_1,\ \ \varphi = \varphi_2,\ \ \dots\ ,\ \ \varphi = \varphi_n \equiv \beta,$$

каде што

$$\alpha \equiv \varphi_0 < \ \varphi_1 < \varphi_2\ \ \dots\ < \varphi_n \equiv \beta,$$

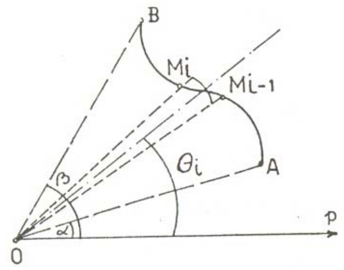
криволинискиот сектор го делиме на $n$ помали криволиниски сектори.

Пресечните точки на тие полуправи со кривата $\rho=\rho(\varphi)$ ќе ги означиме соодветно со

$$A \equiv M_0,\ M_1,\ \ldots\ ,\ M_n \equiv B.$$

Централните агли на тие сектори се:

$$\Delta\varphi_1 = \varphi_1-\varphi_0, \quad \Delta\varphi_2 = \varphi_2-\varphi_1, \quad \ldots\ , \quad \Delta\varphi_n = \varphi_n-\varphi_{n-1}.$$



Црт. 9. 12.

Во секој потсегмент $[\varphi_{i-1},\varphi_i]$ земаме која и да било (произволна) вредност $\theta_i$ на аргументот $\varphi$ и ја пресметуваме вредноста на функцијата $\rho(\theta_i)$. Секој криволиниски сектор $OM_{i-1}M_iO$ $(i=1,2,\ldots,n)$ ќе го замениме со кружен сектор што има радиус $\rho(\theta_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и е ограничен со истите полуправи

$$\varphi=\varphi_{i-1},\ \varphi=\varphi_i\ .$$

Ќе се користиме со формулата за пресметување плоштина на кружен исечок (сектор), позната од планиметријата $P=\dfrac{r^2\alpha}{2}$, каде што $r$ е радиус на кружниот сектор, а $\alpha$ е централниот агол, изразен во радијани.

Ако со $P_n$ ја означиме сумата на плоштините на сите така конструирани кружни сектори, се добива:

$$P_n = \frac{1}{2}\ \rho^2(\theta_1)\,\Delta\varphi_1\ +\ \ldots +\frac{1}{2}\ \rho^2(\theta_i)\,\Delta\varphi_i\ +\ \ \ldots\ \ +\ \frac{1}{2}\ \rho^2(\ \theta_n\ )\,\Delta\varphi_n.$$

Со оглед на истиот вид на членовите на оваа сума, таа може да се запише и во вид:

$$P_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho^2(\theta_i)\Delta\varphi_i\ .$$

Разликата помеѓу вредноста $P_n$ и вистинската вредност на плоштината $P$ на криволинискиот сектор станува помала доколку се земе поголема вредност за $n$ и сите $\Delta\varphi_i$ се намалуваат.

Добиената сума е интегрална сума, составена за функцијата $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ на сегментот $[\alpha,\beta]$. Бидејќи $\rho(\varphi)$ е непрекината на сегментот $[\alpha,\beta]$ постои граница на оваа сума кога $n\to\infty$ и најголемиот од аглите $\Delta\varphi_i \to 0$ и е рамна на

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi .$$

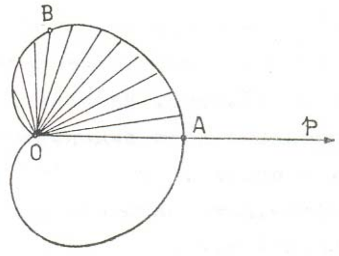
Таа граница се зема за плоштина $P$ на дадениот криволиниски сектор OABO, т.е.

$$P = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta\varphi_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\rho^2(\theta_i)\,\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi .$$

**Пример 7.** *Да се пресмета плоштината на ликот, ограничен со кардиоидата*

$$\rho = a\,(1+\cos\varphi\,).$$

Кардиоидата е симетрична крива во однос на поларната оска (црт.9.13), затоа, вкупната плоштина ќе биде рамна на удвоената плоштина на криволинискиот сектор ABO (исшрафираниот дел).



Црт. 9. 13.

Ќе ги определиме границите. Долната граница е $\alpha=0$ (правец на поларната оска). Горната граница ќе ја определиме од условот $\rho=0$ (бидејќи во точката O радиусот е рамен на нула).

Ако во равенката

$$\rho = a\,(1+\cos\varphi\,)$$

замениме $\rho=0$ се добива:

$$a\,(1+\cos\varphi\,)=0,\ 1+\cos\varphi=0,$$

$\cos\varphi = -1$, па според тоа, $\varphi = \pi$.

Но, границите можеме да ги определиме и на друг начин. Ако формираме таблица на вредности за $\rho$ и $\varphi$ со цел да ја нацртаме кривата, забележуваме дека лакот на кардиоидата што го формира исшрафираниот дел ќе се добие кога аголот $\varphi$ се менува во граници од $\varphi=0$ (што одговара на точкатаA) до $\varphi=\pi$ (што одговара на точката O).

Ако замениме во последната формула за $P$, $\rho = a\,(1+cos\;\varphi\;)$, $\alpha=0$, $\beta=\pi$, се добива:

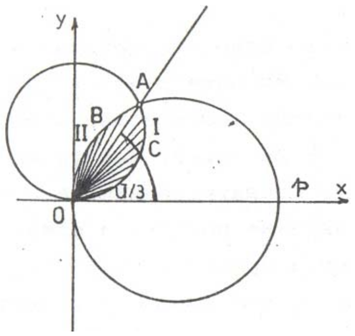
$$P = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi a^2(1+cos\,\varphi)^2\,d\varphi = a^2\int_0^\pi\left(1+2\,cos\,\varphi+cos^2\,\varphi\right)d\varphi =$$

$$= a^2\left[\int_0^\pi d\varphi + 2\int_0^\pi cos\,\varphi\;d\varphi + \int_0^\pi cos^2\,\varphi\;d\varphi\right] =$$

$$= a^2\left[\varphi\Big|_0^\pi + 2\,sin\,\varphi\Big|_0^\pi + \left(\frac{\varphi}{2}+\frac{sin\,2\varphi}{4}\right)\Big|_0^\pi\right] = \frac{3}{2}a^2\pi\,.$$

**Пример 8.** *Да се пресмета плоштината на ликот, ограничен со круговите*

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}\;ax, \quad x^2 + y^2 = 2\;ay, \text{ (црт.9.14).}$$



Црт. 9. 14.

Многу поедноставно ќе ја пресметаме бараната плоштина, ако двата круга ги посматраме во однос на поларен координатен систем.

Равенката на кругот

$$x^2 + y^2 = 2a\sqrt{3}\;x$$

во однос на поларниот координатен систем ќе биде

$$\rho=2a\sqrt{3}\,cos\;\varphi.$$

Равенката ја добиваме кога заменуваме $x = \rho\;cos\varphi$, $y = \rho\;\sin\;\varphi$ (формулите наведени во гл.III **т.8**).

Равенката на вториот круг во однос на поларниот координатен систем е

$$\rho = 2a\;sin\;\varphi.$$

Плоштината што ја ограничуваат круговите е еднаква на сумата на плоштините на криволиниските сектори OCA и OBA. Затоа ќе биде потребно да се определи поларниот агол за точката A. Со оглед на тоа што A е пресечна точка на двата круга од

$$2a\sqrt{3}\,cos\;\varphi = 2a\;sin\;\varphi, \qquad \sqrt{3}\,cos\;\varphi = \;sin\;\varphi, \qquad tg\;\varphi = \sqrt{3}\,,$$

се добива дека вредноста на поларниот агол е $\varphi = arctg\sqrt{3}$, односно $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Според тоа,

$$P_{\mathrm{OCA}} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2a\,sin\,\varphi)^2 d\varphi = 2a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} sin^2\,\varphi d\varphi =$$

$$= 2a^2\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{sin\,2\varphi}{4}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{3}} = a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Границите ги определивме следејќи ја промената на аголот $\varphi$ за да го формира лакот над првиот криволиниски сектор. Лакот што го ограничува вториот сектор АВО се добива кога аголот $\varphi$ се менува од $\varphi = \frac{\pi}{3}$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$, па според тоа,

$$P_{\mathrm{OBA}} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sqrt{3}\;a\,cos\,\varphi\right)^2 d\varphi = 6a^2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\,\varphi\; d\varphi =$$

$$= 6a^2\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{sin\,2\varphi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 3a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Вкупната плоштина е

$$P = a^2\left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right) \approx 0{,}89\;a^2.$$

## Задачи за вежбање

**1.** Да се пресмета плоштината на ликот ограничен со $x$-оската, зададената крива и зададените прави:

**1)** $y = 4 - 3x^2$ од $x = -1$ до $x = 1$; Одг.: **1)** 6.

**2)** $y = \sqrt{x}$ од $x = 0$ до $x = 9$; **2)** 18.

| | |
|---|---|
| **3)** $y = x^2 - x - 6$ од $x = 0$ до $x = 2$; | Одг.: **3)** $\frac{34}{3}$. |
| **4)** $y = x^3$ од $x = -2$ до $x = 4$; | **4)** 68. |
| **5)** $y = x^3 - x$ од $x = -1$ до $x = 1$. | **5)** $\frac{1}{2}$. |

**2.** Да се пресмета плоштината помеѓу:

**1)** параболата $y = 8+2x-x^2$ и $x$-оската,

**2)** параболата $y = x^2+2x+3$, $x$-оската, $x = -2$ и $x = 0$.

Одг.: **1)** 36. **2)** $\frac{14}{3}$.

**3.** Да се нацртаат кривите и да се пресметаат плоштините на ликовите ограничени со нив:

| | |
|---|---|
| **1)** $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$. | Одг.: **1)** 9. |
| **2)** $y = x^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 3$. | **2)** $\frac{35}{3}$. |
| **3)** $y = 4- x^2$, $y = 0$. | **3)** $\frac{32}{3}$. |
| **4)** $y = x^2$, $x+ y = 2$. | **4)** $\frac{9}{2}$. |
| **5)** $y = x^2 - 5x+6$, $y = 2$. | **5)** $\frac{9}{2}$. |
| **6)** $y = x^2 - 5x+6$, $y = 2x$. | **6)** $\frac{125}{6}$. |
| **7)** $4y = x^2$, $4x = y^2$. | **7)** $\frac{16}{3}$. |
| **8)** $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$. | **8)** 12. |
| **9)** $y = x^2$, $y = 2x+ 8$. | **9)** 36. |
| **10)** $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$. | **10)** $4 \cdot ln\, 4$. |

| | |
|---|---|
| **11)** $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$. | Одг.: **11)** $e - 2 + \frac{1}{e}$. |
| **12)** $y = ln\, x$, $x = e$, $y = 0$. | **12)** 1. |
| **13)** $y^2 = x^3$, $y = 8$, $x = 0$. | **13)** 19,2. |
| **14)** $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$. | **14)** $\frac{4a^2}{3}$. |
| **15)** $x = a\, cos^3 t$, $y = a\, sin^3 t$. | **15)** $\frac{3\pi a^2}{8}$. |

**4.** Да се определи плоштината на ликот помеѓу кривата $y = x^3 - 9x$ и правите $x = -2$, $x = 4$. Зошто $\int_{-2}^{4}\left(x^3 - 9x\right)dx$ не дава ист резултат?

**5.** Да се пресмета плоштината на ликот ограничен од една арка на циклоидата $x = a(t - sin\, t)$, $y = a\,(1 - cos\, t)$ и $x$-оската.

Одг.: $3\pi a^2$.

**6.** Да се пресмета плоштината на ликот ограничен со кривата:

| | |
|---|---|
| **1)** $\rho^2 = a^2 cos\, 2\,\varphi$ ; | Одг.: **1)** $a^2$. |
| **2)** $\rho = a\, sin\, 3\,\varphi$ ; | **2)** $\frac{\pi a^2}{4}$. |
| **3)** $\rho = a\, sin\, 2\,\varphi$ ; | **3)** $\frac{\pi a^2}{2}$. |
| **4)** $\rho = \frac{a}{\varphi}$, $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le 2\pi$. | **4)** $\frac{7a^2}{4\pi}$. |

## 2. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ДОЛЖИНА НА ЛАК НА КРИВА

### 2. 1. *Кривата е зададена со равенката* $y = f(x)$.

Нека функцијата $y = f(x)$ е непрекината во сегментот $[a,b]$ и има непрекинат извод во истиот сегмент.

Ќе си поставиме задача да ја определиме должината на лакот од оваа крива помеѓу точките A (со апсциса $a$) и B (со апсциса $b$), (црт.9.15). На лакот AB од кривата ќе ги избереме точките

$$\mathrm{A} \equiv \mathrm{M}_0,\ \mathrm{M}_1,\ \mathrm{M}_2, \ldots ,\ \mathrm{M}_{i-1}, \mathrm{M}_i,\ \ldots ,\ \mathrm{M}_{n-1}, \mathrm{M}_n \equiv \mathrm{B}$$

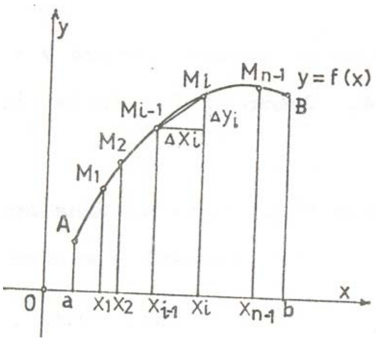
чии апсциси се соодветно:

$$a \equiv x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots ,\ x_{i-1},\ x_i,\ \ldots ,\ x_{n-1},\ x_n \equiv b.$$

Ќе повлечеме тетиви

$$\overline{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1},\ \overline{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2},\ \ldots ,\ \overline{\mathrm{M}_{i-1}\mathrm{M}_i},\ \ldots ,\ \overline{\mathrm{M}_{n-1}\mathrm{M}_n},$$

при што добиваме една искршена линија впишана над лакот AB од кривата $y=f(x)$. Должината $L_n$ на оваа искршена линија е очигледно приближно еднаква со должината на лакот AB со оглед на тоа дека помеѓу секои две точки лакот на кривата е заменет со соодветната тетива.



Црт. 9. 15.

Од цртежот следува дека:

$$L_n = \overline{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1} + \overline{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2} + \ldots + \overline{\mathrm{M}_{i-1}\mathrm{M}_i} + \ldots + \overline{\mathrm{M}_{n-1}\mathrm{M}_n}.$$

Ќе ја пресметаме должината на отсечката $\overline{\mathrm{M}_{i-1}\mathrm{M}_i}$. Оваа отсечка е ограничена со точките $\mathrm{M}_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $\mathrm{M}_i\,(x_i, f(x_i))$, па според формулата за растојание помеѓу две точки се добива:

$$\overline{\mathrm{M}_{i-1}\mathrm{M}_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}\,.$$

За должината на искршената линија се добива:

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}\,.$$

Разликата помеѓу вредноста на $L_n$ и вистинската вредност $L$ на должината на лакот ќе стане помала доколку се наголемува бројот на страните на искршената линија впишана над лакот AB.

Тоа нè наведува на заклучок дека разликата ќе се изгуби доколку се претпостави бројот на страните на искршената линија да клони кон бескрајност и должините на сите тетиви $\overline{\mathrm{M}_{i-1}\mathrm{M}_i}$ да тежат кон нула.

*Ако постои границата на сумата $L_n$, кога $n \to \infty$ и $max\,\overline{\mathrm{M}_{i-1}\mathrm{M}_i} \to 0$, тогаш таа граница е **должина на лакот** AB*, т.е.

$$L = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\mathrm{M}_{i-1}\mathrm{M}_i \to 0}} L_n\,.$$

Да пристапиме кон определување на границата на изразот за $L_n$, а за таа цел ќе го преуредиме.

Користејќи се со Лагранжовата теорема за функцијата $y=f\,(x)$ над парцијалниот интервал $[x_{i-1}, x_i]$ ја добиваме следнава врска:

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f\,'\,(\xi_i), \qquad \text{каде што} \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i.$$

Заменувајќи во изразот за $L_n$,

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})\; f\,'\,(\xi_i),$$

се добива:

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2 \cdot f'^2(\xi_i)}\,,$$

односно:

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i,$$

каде што $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Ќе ја пресметаме границата на $L_n$, кога $n\to\infty$ и најголемата од страните на искршената линија тежи кон нула, т.е.

$$L = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \mathrm{M}_{i-1}\mathrm{M}_i\to 0}} L_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \mathrm{M}_{i-1}\mathrm{M}_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i .$$

Границата на оваа сума е рамна на определениот интеграл

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

по што добиваме дека

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx .$$

**Пример 1.** *Да се пресмета должината на лакот на кривата* $y=\sqrt{x^3}$ *од координатниот почеток до точката* A(1,1).

Изводот на дадената функција е:

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} .$$

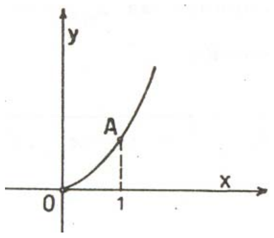
Од црт. 9.16 се гледа дека за да се пресмета должината на лакот OA, $x$ се менува од $0$ до $1$.

Ако замениме во формулата за должина на лак, се добива:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{4+9x}\,dx .$$

За да го решиме интегралот, треба да ја користиме смената:



Црт. 9. 16.

$$4+9x = t^2, \quad dx = \frac{2}{9}\ t\,dt.$$

Границите на интегралот по новата променлива $t$ се добиваат ако во изразот $4+9x = t^2$ се заменат вредностите $x=0$ и $x=1$ и соодветно се пресмета $t$, $t = 2$ и $t = \sqrt{13}$.

$$L = \frac{1}{2}\int_{2}^{\sqrt{13}} t\cdot\frac{2}{9}\,t\,dt = \frac{1}{9}\cdot\frac{t^3}{3}\Bigg|_{2}^{\sqrt{13}} = \frac{1}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right).$$

## 2. 2. Диференцијал на лак

Ако на лакот АВ од кривата зададена со равенката $y=f(x)$ земеме која и да било точка М со апсциса $x$, $a \le x \le b$, должината на лакот АМ се пресметува со формулата:

$$L_{\text{AM}} = \int_a^x \sqrt{1+y'^2}\ dx\,,$$

и зависи од положбата на точката М, т.е. е функција од $x$,

$$L_{\text{AM}} = s(x) = \int_a^x \sqrt{1+y'^2}\ dx\,.$$

Бидејќи подинтегралната функција е непрекината во сегментот $[a,b]$, променливиот лак $s(x)$ има извод по $x$, рамен на изводот на интегралот по горната граница, а тоа е подинтегралната функција (види **т.5**, гл.VIII).

$$s\,'(x) = \sqrt{1+y'^2}\,,$$

т.е.

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$$

или

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\ dx.$$

Тоа е формула за диференцијалот на лакот.

Ако кривата е зададена со параметарски равенки или се разгледува во однос на поларен координатен систем, изразот за $L$ ќе има друг вид. Овие два случаја ќе ги разгледаме одделно.

### 2. 3. *Кривата е зададена со параметарски равенки*

$$x = x(t),$$
$$y = y(t).$$

За определување должината на лакот AB на оваа крива ќе се користиме со формулата

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt\,.$$

Оваа формула се добива од претходната, кога ќе се замени

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\,, \quad dx = \dot{x}\ (t)\, dt.$$

Долната граница $t_1$ е вредност на параметарот што соодветствува на апсцисата на точката A; горната граница $t_2$ е вредноста на параметарот што соодветствува на апсцисата на точката B.

Ако кривата е зададена со параметарски равенки $x{=}x(t)$, $y{=}y(t)$, тогаш диференцијалот на лакот е даден со формулата

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ \ dt.$$

**Пример 2.** *Да се пресмета должината на лакот на астроидата, зададена со равенките*

$$x = a\,cos^3 t,$$
$$y = a\,sin^3 t.$$

Бидејќи кривата е симетрична во однос на двете координатни оски, црт.9.24, ќе ја пресметаме должината на делот од астроидата во првиот квадрант.

За овој дел гранците по $x$ се од $x{=}0$ до $x{=}a$.

Ќе ги определиме вредностите на параметарот што соодветствуваат на $x{=}0$ и $x{=}a$.

Од $x{=}\ a\,cos^3 t$, по замена $x{=}0$, се добива:

$$0 = a\,cos^3 t,\ \ cos^3 t = 0,\ \ \ cos\,t = 0,\ \ \ \ t_1 = \frac{\pi}{2}\ \ .$$

Од истата равенка, по заменување $x{=}a$ се добива:

$$a = a\,cos^3 t,\ \ \ cos^3 t = 1,\ \ cos\,t = 1,\ \ t_2 = 0.$$

Ќе пресметаме

$$\dot{x} = -3a\,cos^2 t\cdot sin\,t,$$
$$\dot{y} = \ \ 3a\,sin^2 t\cdot cos\,t$$

и заменуваме во формулата за $L$:

$$\frac{1}{4}L = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{9a^2\,cos^4 t\ \ sin^2 t + 9a^2\,sin^4 t\ \ cos^2 t}\ dt =$$

$$= 3a\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{sin^2 t\,cos^2 t\left(sin^2 t + cos^2 t\right)}\ dt =$$

$$= 3a\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin\,t\ cos\,t\ dt = \frac{3a}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin\,2t\ \ dt =$$

$$= \frac{3a}{4}\left(-\,cos\,2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = -\frac{3a}{4}\left(cos\,0 - cos\,\pi\right) = \frac{3a}{2}.$$

Вкупната должина е $\quad L\ =\ 4\cdot\dfrac{3a}{2}\ = 6a.$

Определувањето на границите, кога кривата е зададена со параметарски равенки, не мора да се поврзува со границите по променливата $x$. Тие можат да се определат, следејќи ја промената на параметарот $t$ за да се опише лакот, чија должина треба да се пресмета. Во овој пример параметарот $t$ се менува од 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ за да се опише лакот на астроидата во првиот квадрант, па според тоа, границите ќе се земат од $t_1$=0 до $t_2$= $\dfrac{\pi}{2}$. Ако на овој начин се определат границите, во конкретниов пример сме во можност да ја добиеме вкупната должина ако земеме за $t_1$ =0, $t_2$=2$\pi$ ( тоа е интервалот на изменувањето на $t$ за да се опише целата крива).

**2. 4.** ***Кривата е зададена со равенката*** $\rho=\rho(\varphi)$ ***во однос на поларен координатен систем.***

Потребно е да се пресмета должината на лакот АВ од оваа крива (црт.9. 17).

На точките А и В нека им одговараат поларните агли $\alpha$ и $\beta$ соодветно, т.е. кога точката од кривата го опишува лакот АВ, тогаш поларниот агол $\varphi$ се менува од $\alpha$ до $\beta$.

Познато е дека кривата $\rho=\rho(\varphi)$ може да се изрази со следниве параметарски равенки:

$$x = \rho(\varphi)\ \cos\varphi,$$

$$y = \rho(\varphi)\ \sin\varphi.$$

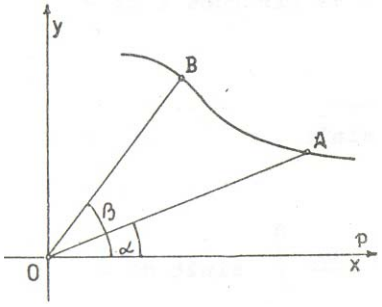
Пресметуваме:

$$\dot{x} = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi,$$

$$\dot{y} = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi.$$

По замена во

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ dt$$



Црт. 9. 17.

и средување, се добива:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\ d\varphi.$$

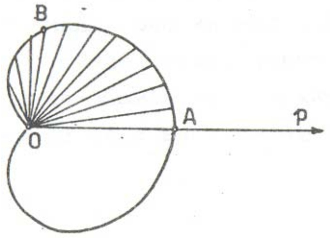
Ако е зададена кривата со равенката $\rho=\rho(\varphi)$ во однос на поларниот координатен систем, диференцијалот на лакот е

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\ d\varphi.$$

**Пример 3.** *Да се пресмета должината на лакот на кардиоидата зададена со равенката*

$\rho=a\,(1+\cos\varphi)$ (црт.9.18).

Кривата е симетрична во однос на поларната оска и затоа ќе ја пресметаме должината на лакот на горната половина (од А до О).



Црт. 9. 18.

Вредностите на поларниот агол $\varphi$ се: за точката А, $\varphi = 0$, а за точката О, $\varphi = \pi$.

Заменувајќи во формулата за должина на лак:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \pi, \qquad \rho = a\,(1 + cos\,\varphi), \quad \rho' = -a\,sin\,\varphi,$$

се добива:

$$L = \int_0^\pi \sqrt{a^2(1+cos\,\varphi)^2 + a^2\,sin^2\,\varphi}\;d\varphi = a\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1+cos\,\varphi}\;d\varphi.$$

Од познатата врска во тригонометријата $cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\,\varphi}{2}}$,

во интегралот ќе замениме $\sqrt{1+cos\,\varphi} = \sqrt{2}\;cos\frac{\varphi}{2}$, па се добива:

$$L = a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\int_0^\pi cos\frac{\varphi}{2}\;d\varphi = 2a\left(2\,sin\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^\pi = 4a\left(sin\frac{\pi}{2} - sin\,0\right) = 4a.$$

Должината на лакот на кардиоидата е $8a$.

## Задачи за вежбање

**1.** Да се определи должината на лакот на кривата $y^2 = (x+1)^3$, што го отсекува правата $x$=4.

Одг.: $\frac{670}{27}$.

**2.** Да се најде должината на лакот на кривата $y$=$lncosx$ помеѓу точките со апсциса $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

Одг.: $ln\,tg\,\frac{3\pi}{8}$.

**3.** Да се најде должината на лакот на кривите:

**а)** $y = ln\,x$ од $x = \frac{3}{4}$ до $x = \frac{12}{5}$;

**б)** $y = a\,ch\,\frac{x}{a}$ од $x = -a$ до $x = a$.

Одг.: **а)** 2,043; **б)** $2\,a\,sh1$.

**4.** Да се најде должината на целата крива $x^2 + y^2 = a^2$.

Одг.: $2a\pi$.

**5.** Да се најде должината на една арка од циклоидата

$$x = a\,(t - sin\,t), \quad y = a\,(1 - cos\,t).$$

Одг.: $8a$.

**6.** Да се најде должината на лакот на кривата

$$x = \frac{t^6}{6}\ , \quad y = 2 - \frac{t^4}{4}\,,$$

помеѓу координатните оски $(t>0)$.

Одг.: $4\frac{1}{3}$.

**7.** Да се пресмета должината на кривата $x = t^2$, $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$ меѓу пресечните точки со $x$-оската.

Одг.: $4\sqrt{3}$.

**8.** Да се најде должината на целата крива $\rho = a\,sin^3\frac{\varphi}{3}$.

Одг.: $\frac{3a\pi}{2}$.

## 3. ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ВОЛУМЕН

### 3. 1. Пресметување волумен на тело по познат напречен пресек

Нека е зададено тело ограничено со една површина и две паралелни рамнини. На пример, обликот на телото нека е таков каков што е зададен на цртежот 9.19. Рамнините што го ограничуваат телото се нормални на $x$-оската. Ќе си поставиме задача да го определиме волуменот на ова тело. Ќе претпоставиме дека е можно да се пресметаат плоштините на пресеците на ова тело со рамнини нормални на $x$-оската.

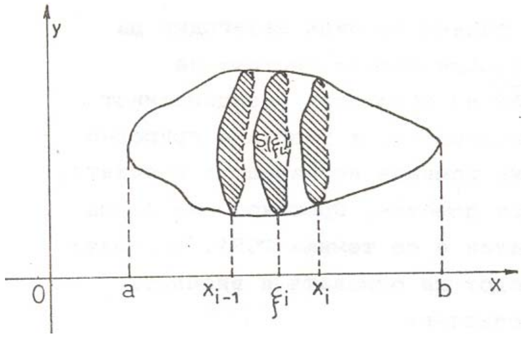
Очигледно е дека за даден вид површина, плоштините на споменатите пресеци ќе зависат од растојанието на рамнината од координатниот почеток. Ако растојанието го означиме со $x$, тогаш плоштината на пресекот ќе биде функција од $x$ што ќе ја означиме со $S(x)$. (на пример, $S(a)$ е плоштина на пресекот на телото со рамнината $x=a$, $S(b)$ е плоштина на пресекот на телото со рамнината $x=b$).

Ќе повлечеме рамнини нормални на $x$-оската низ точките:

$$a \equiv x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_{i-1},\ x_i,\ \ldots\ ,\ x_n \equiv b.$$

Со овие точки интервалот $[a,b]$ е поделен на $n$ делови. Овие рамнини ќе го поделат телото на $n$ "слоеви"– елементи (на цртежот е нацртан еден од нив).

Во секој потсегмент $[x_{i-1}, x_i]$ ќе земеме по една која и да било точка $\xi_i$ . Секој слој ќе го замениме со цилиндар чија основа е пресекот на телото со рамнината што минува низ точката со апсциса $\xi_i$, а висината е должината на сегментот $[x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, ( на црт. 9.19 е нацртан еден од нив).



Црт. 9. 19.

Волуменот на тој цилиндар ќе биде рамен на производот $S(\xi_i)\,\Delta x_i$ (производ на плоштината на основата и висината).

Сумата на волумените на сите такви цилиндри ќе биде

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\,\Delta x_i\,,$$

што претставува приближна вредност на волуменот на разгледуваното тело.

*Границата на таа сума, кога* $n \to \infty$ *и* $max\ \Delta x_i \to 0$, *ако постои и не зависи од начинот на делење и изборот на точките* $\xi_i$ , *се зема за волумен на даденото тело.*

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\,\Delta x_i\,.$$

Бидејќи $V_n$ претставува интегрална сума за функцијата $S(x)$ на сегментот $[a,b]$, при претпоставка функцијата $S(x)$ да е непрекината на сегментот $[a,b]$, таа граница постои и е рамна на определениот интеграл од функцијата $S(x)$ во граници од $a$ до $b$. Значи, волуменот на даденото тело се пресметува со формулата

$$V=\int_a^b S(x)dx\,.$$

**Пример 1.** *Да се пресмета волумен на цилиндричен клин* (црт.9.20) *отсечен од прав кружен полуцилиндар со рамнина повлечена низ дијаметарот на основата под произволен агол* $\alpha$ *во однос на основата. Радиусот на основата е* $r$.

Изборот на координатниот систем е произволен, но се избира така што да биде лесно определувањето на плоштината на напречните пресеци. Во оваа задача ќе биде најзгодно да се избере следнава положба на координатниот систем: за $x$-оската да се земе пречникот $\overline{AB}$ на основата, координатниот почеток во центарот на полуцилиндарот O, а $y$-оската природно нормална на $x$-оската. Ќе повлечеме рамнина нормална на $x$-оската, на растојание $x$ од координатниот почеток. Пресекот има форма на правоаголен триаголник (означен е со темиња PQR) . Неговата плоштина е рамна на полупроизводот на основата и висината. За пресекот на растојание $x$, се добива:

$$S(x)=\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{QR} = \frac{1}{2}\, y\cdot y\cdot tg\alpha$$

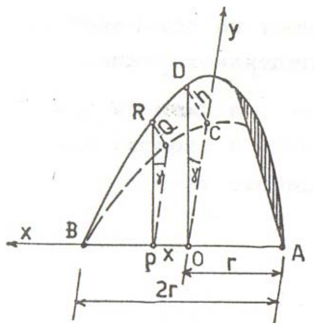
(бидејќи $\overline{QR}=y\cdot tg\alpha$).

Со оглед на тоа дека $y$ е ордината на точка на кружницата

$$x^2+y^2=r^2,$$

со замена $y=\sqrt{r^2-x^2}$ во горниот израз, се добива:

$$S(x)=\frac{1}{2}\,(r^2-x^2)\,tg\,\alpha.$$



Црт. 9. 20.

Очигледно е дека ќе треба да се земе за долна граница $x=-r$, а за горна граница $x=r$. Со оглед на симетријата на телото, за граници од $x=0$ до $x=r$ ќе ја добиеме половината од волуменот на телото.

Според тоа, од $V=\int\limits_a^b S(x)dx$ , се добива:

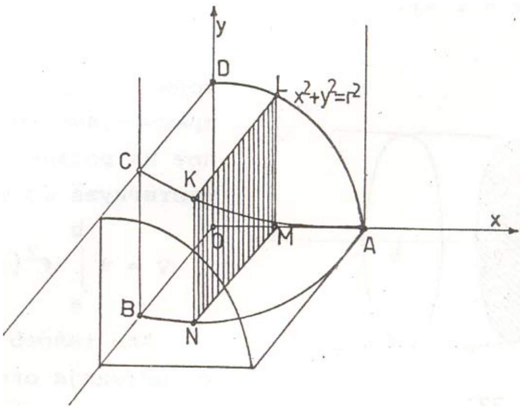
$$V=2\int\limits_0^r\left(r^2-x^2\right)tg\,\alpha\;dx=2tg\,\alpha\int\limits_0^r\left(r^2-x^2\right)dx=$$

$$=2\;tg\;\alpha\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^r=\frac{4}{3}\;r^3\;tg\;\alpha.$$

**Пример 2.** *Да се пресмета волуменот на телото што го ограничуваат два кружни цилиндра со радиус* $r$*, чии оски се сечат под прав агол.*

На цртежот 9.21 е нацртана само $\frac{1}{8}$ од телото чиј волумен треба да го пресметаме.

Апсцисната оска на системот што го избираме, произволно, во овој случај е најзгодно да се избере во правец нормален на оските на цилиндрите, а ординатната оска нормално на неа, низ пресекот на оските на цилиндрите, во правец на оската од едниот цилиндар.



Црт. 9. 21.

Ќе повлечеме рамнина, нормална на $x$-оската на растојание $x$ од координатниот почеток. Оваа рамнина го сече телото по еден квадрат означен со темињата NMKL. Со оглед на тоа дека $\overline{\mathrm{OM}}=x$, а $\overline{\mathrm{ML}}$ е ординатата на таа точка до кругот $x^2+y^2=r^2$, се добива $\overline{\mathrm{ML}}=\sqrt{r^2-x^2}$ .

Плоштината на нормалниот пресек е

$$S(x) = \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 = r^2 - x^2.$$

Според тоа,

$$V = 8 \int_a^b S(x)dx = 8\int_0^r \left(r^2 - x^2\right)dx = 8\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^r = \frac{16}{3} r^3 .$$

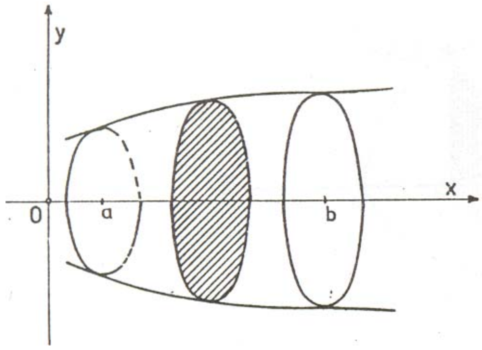
## 3. 2. Волумен на ротационо тело

Ќе разгледаме тело што настанува со ротирање на криволинискиот трапез, ограничен со кривата $y=f(x)$, $x$-оската и правите $x=a$ и $x=b$ околу $x$-оската (црт.9.22).

Во овој случај произволните пресеци на телото со рамнини нормални на $x$-оската ќе бидат кругови, така што плоштината на произволен пресек на растојание $x$ од коорди-натниот почеток ќе биде

$$S(x) = \pi f^{\,2}(x)$$

(по формулата $P=\pi r^2$).



Црт. 9. 22.

Користејќи се со претходно изведените форму-ли пресметувањето на волуменот на ротационото тело се постигнува со формулата

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx .$$

Ако телото се добива со ротација околу $y$-оската на криволинискиот трапез, ограничен со кривата $x = \varphi(y)$, $y$-оската и правите $y = c$, $y=d$, каде што $\varphi(y)$ е непрекината и ненегативна функција на сегментот $[c,d]$, тогаш волуменот на тоа тело се добива по формулата

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy = \pi \int_c^d x^2\, dy .$$

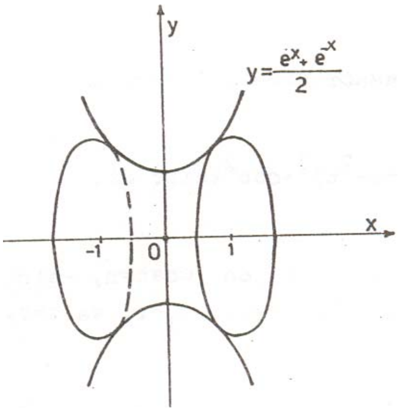
Ако криволинискиот трапез е ограничен со кривата зададена со параметарските равенки $x=x(t)$, $y=y(t)$ (при што $x(t_1)=a$, $x(t_2)=b$), тогаш волуменот на ротационото тело што се добива при ротација на криволиникиот трапез околу $x$-оската се пресметува по формулата

$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\,\dot{x}(t)\,dt\,.$$

При ротација околу $y$-оската волуменот се пресметува по формулата

$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,\dot{y}(t)\,dt\,,$$

каде што $y(t_1)=c$, $y(t_2)=d$.



Црт. 9. 23.

**Пример 1.** *Да се пресмета волуменот на телото што се добива кога ликот ограничен од кривата*

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

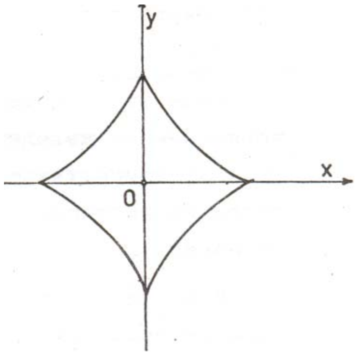
*и правите* $x=\pm1$ *и* $x=0$ *ротира околу* $x$*-оската* (црт.9.23).

Користејќи ја формулата за волумен на ротационо тело, се добива

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx=$$

$$=2\pi\int_{0}^{1}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{1}\left(e^{2x}+2+e^{-2x}\right)dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{2x}}{2}+2x-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{4}\left(e^2+4-e^{-2}\right).$$



Црт. 9. 24.

**Пример 2.** *Да се пресмета волуменот на телото што се добива со ротирање на астроидата*

$$x = a\cos^3 t,$$

$$y = a\sin^3 t,$$

*околу* $x$*-оскатa* (црт.9.24).

Волуменот на телото ќе се пресмета по формулата

$$V = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\,\dot{x}(t)dt.$$

Ќе пресметаме:

$$\dot{x} = -3a\cos^2 t\sin t$$

и ќе замениме во формулата.

$$\frac{V}{2} = -\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t\,dt.$$

Со преуредување на подинтегралниот израз се добива:

$$\frac{V}{2} = -6a^3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(1-\cos^2 t\right)^3\cdot\cos^2 t\sin t\,dt.$$

Ќе извршиме замена на променливата $t$ со смената:

$$\cos t = u, \quad -\sin t\,dt = du$$

и замена на границите.

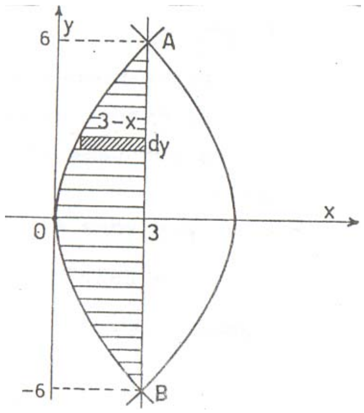
Од $\cos t = u$, за $t = \frac{\pi}{2}$, $u_1 = 1$, а за $t = 0$, $u_2 = 0$.

Според тоа,

$$V = 12a^3\pi\int_1^0\left(1-u^2\right)^3u^2du = 12a^3\pi\int_1^0\left(u^2-3u^4+3u^6-u^8\right)du =$$

$$= \frac{32}{105}\pi a^3.$$

**Пример 3.** *Да се пресмета волуменот на телото што се добива со ротација на ликот ограничен со кривата* $y^2=12x$ *и правата* $x=3$*, околу правата* $x=3$ (црт. 9. 25).



Црт. 9. 25.

Овде не ќе можеме да се користиме со изведената формула за пресметување волумен, затоа ќе постапиме на следниов начин:

Пред сè, ќе ги определиме координатите на пресечните точки A и B на кривата $y^2=12x$ и правата $x$=3. За $x$=3 од равенката $y^2=12x$ се добива $y=\pm 6$. Според тоа, A(3,6) и B(3,–6). Телото се формира со ротација на ликот OAB околу правата $x = 3$. Ликот OAB го делиме на елементи со прави паралелни со $x$-оската.

Еден од елементите нацртан на цртежот, има димензии $3–x$ и $dy$. Елементарниот волумен што се добива со ротација на елементот околу правата $x$=3 е $dV = \pi(3–x)^2 dy$.

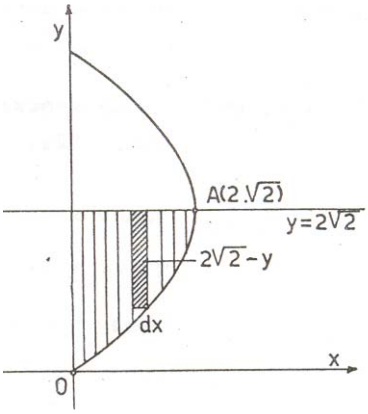
Вкупниот волумен е:

$$V = \pi \int_{-6}^{6} (3-x)^2\,dy = \pi \int_{-6}^{6} \left(3-\frac{y^2}{12}\right)^2 dy =$$

$$= 2\pi \int_{0}^{6} \left(9-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{144}\right) dy = 2\pi\left(9y-\frac{y^3}{6}+\frac{y^5}{720}\right)\Bigg|_0^6 = \frac{288\pi}{5}.$$

**Пример 4.** *Да се пресмета волуменот на телото што се добива со ротација на ликот, ограничен со кривата* $y^2=x^3$ *и правата* $y=2\sqrt{2}$ *околу правата* $y=2\sqrt{2}$, (црт. 9. 26).

Ликот го делиме на елементи со прави паралелни на $y$-оската. Еден од елементите означени на цртежот има димензии $2\sqrt{2}-y$ и $dx$



Црт. 9. 26.

Елементарниот волумен што се добива кога тој елемент ротира околу правата $y = 2\sqrt{2}$ е

$$dV = \pi(2\sqrt{2} - y)^2\ dx.$$

Според тоа,

$$V = \pi\int_0^2 \left(2\sqrt{2} - y\right)^2 dx = \pi\int_0^2 \left(2\sqrt{2} - x^{\frac{3}{2}}\right)^2 dx =$$

$$= \pi\left(8x - \frac{8\sqrt{2}}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{36\pi}{5}.$$

## Задачи за вежбање

Да се нацртаат кривите и да се пресмета волуменот на телото што се добива со ротација на ликот, ограничен со кривите:

**1.** $y = 2x, \quad y = 0, \quad x = 3$ околу $x$-оската.

Одг.: $36\pi$.

**2.** $y = x^2, \ x = 0, \ y = 9$ околу $y$-оската.

Одг.: $\frac{81}{2}\pi$.

**3.** $y^2 = 2px, \quad x = h$ околу $x$-оската.

Одг.: $ph^2\pi$.

**4.** $xy = 4, \ x = 1, \ x = 4, \ y = 0$ околу $x$-оската.

Одг.: $12\pi$.

**5.** $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ околу $x$-оската.

Одг.: $\frac{8}{3}\pi$.

**6.** $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ околу $y$-оската.

Одг.: $\frac{16}{3}\pi$.

**7.** $(y–a)^2 = ax, \quad x = 0, \quad y = 2a$ околу $x$-оската.

Одг.: $\frac{7}{6}\ \pi a^3$.

**8.** $y = cos\,(x–\frac{\pi}{3}), \quad x = 0, \quad y = 0$ околу $x$-оската.

Одг.: $\frac{\pi}{4}\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**9.** За ликот во првиот квадрант, ограничен со кривата $y^2=8x^3$, $y=0$, $x=2$, да се пресмета волуменот на телото, ако ликот ротира:

| | |
|---|---|
| **1)** околу $x$-оската; | Одг.: **1)** $32\pi$. |
| **2)** околу $y$-оската; | **2)** $\frac{128}{7}\pi$ . |
| **3)** околу правата $x = 2$; | **3)** $\frac{256}{35}\pi$ |
| **4)** околу правата $x = 4$; | **4)** $\frac{1152}{35}\pi$. |

## 4. ПЛОШТИНА НА РОТАЦИОНА ПОВРШИНА

Разгледуваме површина што се добива со ротација на лакот АВ на кривата $y = f\,(x)$, $(f\,(x) \geq 0)$ (црт. 9.27). Апсцисите на точките А и В се соодветно $a$ и $b$. Функцијата $y = f\,(x)$ претпоставуваме дека е непрекината и дека има непрекинат извод на сегментот $[a,b]$.

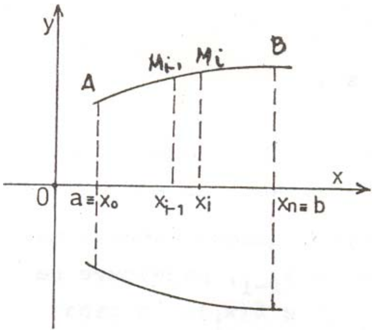
Стереометријата не ни дава формула по која ќе можеме да ја пресметаме плоштината на опишаната ротациона површина. Затоа е потребно да определиме што ќе подразбираме под плоштина на таа површина.

Сегментот $[a,b]$ ќе го поделиме на $n$ потсегменти со произволно избраните точки со апсциси:

$$a \equiv x_0 < x_1 < \ \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n \equiv b.$$

Во поделбените точки повлекуваме нормали на $x$-оската и ги продолжуваме до лакот AB. Тогаш лакот AB го поделуваме на $n$ делови со точките

$$A \equiv M_0,\ M_1,\ M_2,\ \ldots\ ,\ M_{i-1},\ M_i,\ \ldots\ ,\ M_n \equiv B.$$



Црт. 9. 27.

Со сврзување на овие точки се добива полигонална линија. Ако заедно со лакот AB се ротира околу $x$-оската и полгоналната линија, таа ќе опише површина што е составена од обвивки на пресечени конуси, (конуси и цилиндри). Плоштината на површината што ја опишува полигоналната линија може да се пресмета по познатите формули од стереометријата.

Ако бројот $n$ на делењето на сегментот $[a,b]$ неограничено се зголемува, при што тетивите $\overline{M_{i-1}M_i}$ неограничено се смалуваат, тогаш полигоналната линија сè повеќе ќе се доближува кон лакот AB. Тоа нè наведува на мислата што ќе земеме за плоштина на ротационата површина. За плоштина на ротационата површина што се добива со ротација на лакот AB околу $x$-оската ќе ја земеме границата кон која тежи плоштината на површината што се добива со ротација на полигоналната линија околу $x$-оската кога бројот на нејзините страни $n$ неограничено расте и должината на секоја страна $\overline{M_{i-1}M_i}$ тежи кон нула. (Односно, должините на сите парцијални интервали $[x_{i-1},\ x_i]$ тежат кон нула). Плоштината на површината што се добива со ротација на полигоналната линија ќе ја означиме со $S_n$. Секоја страна $\overline{M_{i-1}M_i}$ ќе опише обвивка на пресечен конус чија плоштина се пресметува по формулата

$$P = 2\pi\ \frac{R_1 + R_2}{2}\ s,$$

каде што со $R_1$ и $R_2$ се означени радиусите на основите на пресечениот конус, а со $s$ е означена генератрисата на конусот.

Ќе го разгледаме $i$-тиот конус (одвоено нацртан на црт.9.28). Неговата висина е $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, радиусите на основите соодветно се $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$, а генератрисата е

$$\Delta s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}\ .$$

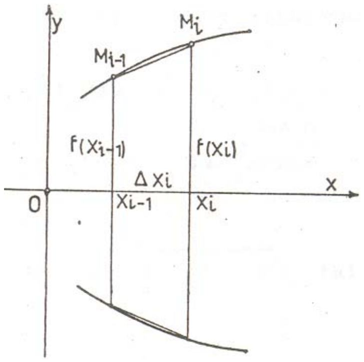
Според тоа, плоштината на $i$-тиот пресечен конус е :

$$2\pi\ \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\ \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}\ .$$

Плоштината $S_n$ ќе биде сума на плоштините на $n$-те пресечени конуси. Ќе ја напишеме во следниов вид:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\ 2\pi\ \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\ \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}\ .$$

Плоштината $S_n$ ни ја претставува приближно плоштината на разгледуваната површина.



Црт. 9. 28.

Пред да ја определиме границата на $S_n$ со цел да ја добиеме вредноста на плоштината, изразот за $S_n$ ќе го преуредиме.

Ќе замениме

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = f(\eta_i).$$

Ова следува од фактот што функцијата $f(x)$ е непрекината и аритметичката средина од $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$ е рамна на вредноста на функцијата $f(x)$ во некоја точка $\eta_i$ од интервалот $x_{i-1} \le \eta_i \le x_i$.

Освен тоа, ќе замениме

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

каде што $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, според Лагранжовата теорема.

Конечно за $S_n$ се добива:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 2\pi\ f(\eta_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\ \Delta x_i .$$

Ќе земеме нова сума, блиска со $S_n$ (ќе ја означиме со $\overline{S}_n$),

$$\overline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} 2\pi\ f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\ \Delta x_i .$$

Границата на $\overline{S}_n$, кога $n \to \infty$ и $max \Delta x_i \to 0$ ни ја дава формулата за пресметување плоштина на ротационо тело,

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i \to 0}} \overline{S}_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\ f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\ \Delta x_i ,$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\, dx . \qquad (1)$$

Се докажува дека сумите $S_n$ и $\overline{S}_n$ клонат кон иста граница.

Ако кривата е зададена со равенка $x = \varphi(y)$ (CD - лак на кривата, $c$ и $d$ се ординати на точките C и D ($c<d$, $\varphi(y) \ge 0$) каде што $\varphi(y)$ е непрекината и има непрекинат извод во сите точки на сегментот $[c,d]$, тогаш плоштината на површината, што се

добива со ротација на лакот CD околу $y$-оската се пресметува по формулата

$$S = 2\pi \int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\, dy = 2\pi \int_c^d x\sqrt{1+x'^2}\ dy . \qquad (2)$$

Ако кривата, чиј лак AB ротира околу $x$-оската, е зададена со параметарски равенки $x=x(t)$, $y=y(t)$, каде што $y(t)\geq 0$ и функциите $x(t)$ и $y(t)$ се непрекинати на сегментот $[t_1, t_2]$, и имаат непрекинат извод по $t$ и $x(t_1)=a$, $x(t_2)=b$, тогаш со замена во формулата (1) се добива:

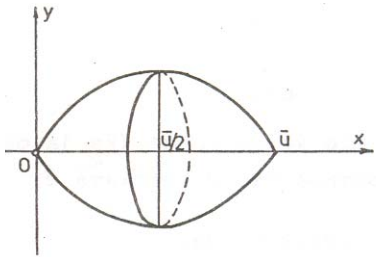
$$S = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt\,.$$

**Пример 1.** *Да се пресмета плоштината на ротационата површина добиена со ротација на синусоидата $y=\sin x$ во интервалот* $[0,\pi]$ (црт.9.29).

Ако замениме $y=\sin x$, $y' = \cos x$ во формулата за плоштина на ротациона површина во границите што се дадени, се добива интегралот

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi\int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\,,$$

кој се решава со смената :



Црт. 9. 29.

$$\cos x = t,\quad -\sin x\,dx = dt,$$

а границите ќе бидат $t=1$ и $t=-1$, кои што се добиваат ако во

$$\cos x = t$$

се замени соодветно $x=0$ и $x=\pi$.

Според тоа,

$$S = -2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}\,dt =$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt\,.$$

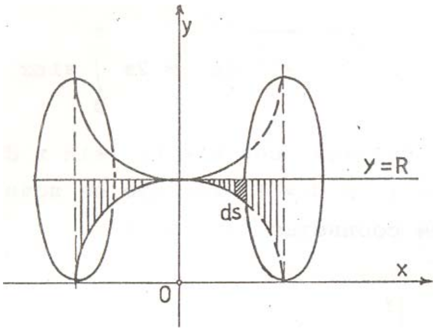
Интегралот оддесно е решен во **т. 6. 4.** гл VII,

$$S = 2\pi\left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]\Bigg|_{-1}^{1} = 2\pi\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right).$$

**Пример 2.** *Да се пресмета плоштината на ротационата површина што се добива со ротација на лакот на кружницата* $x^2+y^2=R^2$; $y \geq 0$, *околу правата* $y = R$.

Во овој случај не ја користиме формулата за пресметување плоштина на ротациона површина.

Интервалот $[-R,R]$ ќе го поделиме на $n$ подинтервали и ќе повлечеме прави паралелни со $y$-оската. Со тоа лакот на кривата е поделен на $n$ парцијални лаци. Еден од нив е нацртан на цртежот 9. 30 и ќе го означиме со $ds$.



Црт. 9. 30.

Плоштината што ќе се добие (ќе ја означиме со $dP$ ), кога елементот $ds$ ротира околу правата $y=R$ е:

$$dP = 2\pi(R-y)\, ds.$$

Вкупната плоштина е:

$$P = 2\pi \int_{-R}^{R} (R-y)\, ds \,.$$

По замена

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}\,, \quad ds = \sqrt{1+y'^2}\; dx\,,$$

се добива:

$$P = 2\pi \int_{-R}^{R} \left(R - \sqrt{R^2 - x^2}\right)\sqrt{1+y'^2}\; dx\,.$$

По замена

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

и по средување на подинтегралната функција, се добива:

$$P = 2\pi\int_{-R}^{R}\left(R-\sqrt{R^2-x^2}\right)\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx,$$

$$P = 2\pi R^2\int_{-R}^{R}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}} - 2\pi R\int_{-R}^{R}dx,$$

$$P = 2\pi\, R^2\, arcsin\frac{x}{R}\Bigg|_{-R}^{R} - 2\pi Rx\Bigg|_{-R}^{R} = 2\pi R^2(\pi-2).$$

## Задачи за вежбање

Да се пресмета плоштина на површината што се добива со ротација на дадените криви околу $x$-оската:

**1)** $x^2+y^2=R^2$; Одг.: **1)** $4R^2\pi$.

**2)** $y = a\,ch\,\dfrac{x}{a},\ x=-a,\ x=a$; **2)** $\pi a^2(sh2+2)$.

**3)** $y = sin\,x,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$; **3)** $2\pi\left\lfloor\sqrt{2}+ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right\rfloor$

**4)** $y=\dfrac{x^3}{3},\ x=-2,\ x=2$; **4)** $\dfrac{34\sqrt{17}-2}{9}\pi$.

**5)** $y^2=4+x,\ x=2$; **5)** $\dfrac{62\pi}{3}$.

**6)** Една арка на циклоидата

$x = a\,(t-sint)$,

$y = a\,(1-cost)$; **6)** $\dfrac{64\pi}{3}a^2$.

**7)** $x = a\cos^3 t,$

$y = a\sin^3 t;$ Одг.: $2{,}4\ \pi a^2.$

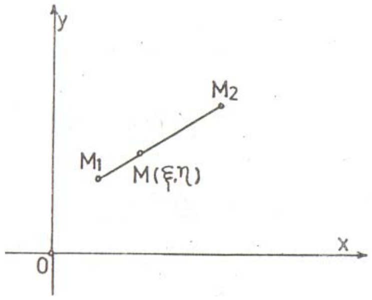
**8)** $x = \dfrac{t^3}{3}, \quad y = 4 - \dfrac{t^2}{2}$ меѓу пресечните точки со координатните оски.

Одг.: $29{,}6\ \pi.$

## 5. ПРЕСМЕТУВАЊЕ СТАТИЧКИ МОМЕНТИ И ТЕЖИШТЕ

Од многукратната примена на определените интеграли во механиката, ќе се задржиме само на определување статички момент на хомогени фигури, хомоген лак и хомогени тела и определување тежиште на наведените, што е непосредно поврзано со статичкиот момент.

Пред да пристапиме кон определување статички момент и тежиште, ќе се потсетиме на формулите за определување на тежиште на систем материјални точки.



Црт. 9. 31.

Ако во рамнината се зададени две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ соодветно со маси $m_1$ и $m_2$ (црт.9.31), координатите на тежиштето на овој систем од две материјални точки ќе бидат

$$\xi = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2},$$

$$\eta = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}.$$

Аналогно за систем од $n$ материјални точки

$$M_1(x_1,y_1),\ M_2(x_2,y_2),\ \ldots,\ M_i(x_i,y_i),\ \ldots,\ M_n(x_n,y_n)$$

соодветно со маси:

$$m_1, m_2,\ \ldots,\ m_i,\ \ldots,\ m_n,$$

координатите на тежиштето ќе се изразат со формулите:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \eta = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

*Изразите во броителите во последниве две формули се викаат* ***статички моменти на системот материјални точки.***

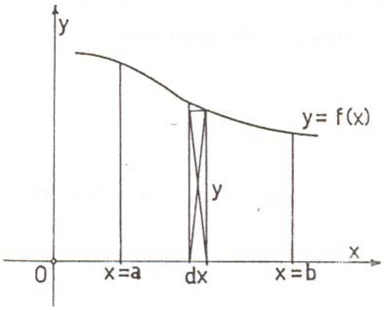
$\sum_{i=1}^{n} x_i m_i$ *е* ***статички момент на системот материјални точки во однос на у-оската*** (ќе го означиме со $M_y$), а $\sum_{i=1}^{n} y_i m_i$ *е* ***статички момент на системот од материјални точки во однос на х-оската*** (ќе го означиме со $M_x$).

Изразот во именителот претставува, очигледно, масата на системот материјални точки (ќе ја означиме со $M$). Користејќи се со овие термини и ознаки, координатите на тежиштето на системот материјални точки ќе ги означиме со следниве формули:

$$\xi = \frac{M_y}{M}, \qquad \eta = \frac{M_x}{M}.$$

## 5. 1. Определување статички моменти и тежиште на хомоген лик

Со кривата $y = f(x)$, правите $x = a$, $x = b$ и $x$-оската е дефиниран еден хомоген лик. Со оглед на тоа дека ликот е хомоген, неговата маса се разликува од плоштината на ликот за константата $\mu$, каде што $\mu$ е *густина* (маса на единица површина).



Црт. 9. 32.

За да го определиме статичкиот момент на разгледуваниот лик во однос на $y$-оската, ликот го делиме на тенки појаси со прави паралелни на $y$-оската. Еден од тие елементи е нацртан на цртежот 9.32. Земајќи приближно елементот (појасот) да има форма на правоаголник со димензии $y$ и $dx$, добиваме дека масата е рамна на $\mu y\ dx$. При претпоставка дека оваа маса е концентрирана во центарот на правоаголникот (во пресекот на дијагоналите), запоставувајќи ја големината $\frac{1}{2}dx$ (растојанието од $y$-оската до центарот е $x+\frac{1}{2}\ dx$ ), за статичкиот момент на елементот се добива:

$$dM_y = \mu y dx \cdot x = \mu x y dx.$$

И другите елементи ќе ги сметаме за правоаголници и нивните маси концентрирани соодветно во нивните центри, така што, статичкиот момент на ликот (системот од материјални точки) ќе биде сума од статичките моменти од сите елементи, па според тоа,

$$M_y = \mu \int_a^b xy\, dx\,.$$

Аналогно, кога ќе формираме производ на масата од елементот со растојание до центарот на елементот од $x$-оската, што изнесува $\frac{1}{2}\ y$, се добива дека статичкиот момент на елементот во однос на $x$-оската е:

$$dM_x = \mu y dx \cdot \frac{1}{2}\ y\ = \mu \frac{y^2}{2}\ dx.$$

Статичкиот момент на целиот лик ќе биде рамен на сумата од статичките моменти на сите елементи, што изнесува:

$$M_x = \frac{\mu}{2} \int_a^b y^{\,2} dx\,.$$

Бидејќи за ликот што го разгледуваме масата е рамна на

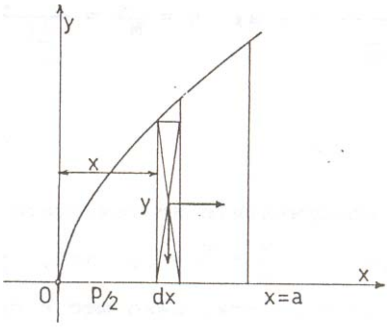
$$\mu P = \mu \int_a^b f(x) dx\,,$$

за определување на координатите на тежиштето на хомогениот лик се добиваат следниве формули:

$$\xi = \frac{\int\limits_a^b xy\,dx}{\int\limits_a^b y\,dx}, \qquad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\,dx}{\int\limits_a^b y\,dx}.$$

**Пример 1.** *Да се определат координатите на тежиштето на ликот ограничен со параболата* $y^2 = 2px$, $x$*-оската и правата* $x=a$ (црт. 9. 33).

Според изведените формули, ќе биде потребно да се пресметаат статичките моменти во однос на оските и плоштината на ликот. Ликот го делиме на тенки појаси со прави паралелни на $y$-оската. Еден од нив е нацртан на цртежот. Претпоставувајќи дека приближно елементот има форма на правоаголник со димензии $y$ и $dx$, се добива дека масата на ликот е $ydx$ (земено е дека $\mu$=1).



Црт. 9. 33.

Оваа маса е концентрирана во центарот на правоаголникот, па според тоа, статичкиот момент на елементот во однос на $y$-оската е

$$dM_y = xydx,$$

а на целиот лик

$$M_y = \int\limits_0^a xy\,dx = \int\limits_0^a x\sqrt{2px}\;dx = \frac{2a^2}{5}\sqrt{2pa}\ .$$

Аналогно, статичкиот момент на елементот во однос на $x$-оската ќе биде:

$$dM_x = ydx \cdot \frac{y}{2} = \frac{1}{2} y^2 dx,$$

а статичкиот момент на целиот лик е:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^a y^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^a 2px\, dx = \frac{pa^2}{2}.$$

Масата на ликот, односно плоштината (бидејќи $\mu=1$) е

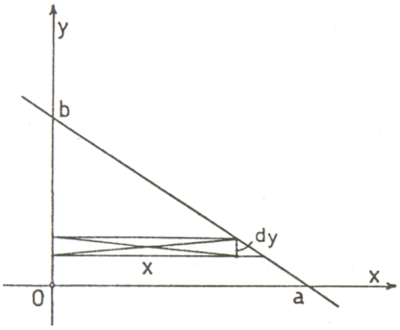
$$M = \int_0^a y\, dx = \int_0^a \sqrt{2px}\, dx = \sqrt{2p}\ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a = \frac{2a}{3}\sqrt{2pa},$$

па конечно се добива:

$$\xi = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{2a^2}{5}\sqrt{2pa}}{\frac{2a}{3}\sqrt{2pa}} = \frac{3}{5}a, \quad \eta = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{pa^2}{2}}{\frac{2a}{3}\sqrt{2pa}} = \frac{3}{8}\sqrt{2pa}.$$

**Пример 2.** *Да се определат координатите на тежиштето на триаголникот ограничен со правите* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $x=0, y=0$ (црт. 9. 34).

Ликот го делиме на елементи, како што е прикажано на цртежот, на ист начин и со истите претпоставки што ги наведовме во претходниот пример.



Црт. 9. 34.

Статичкиот момент на елементот во однос на $x$-оската е:

$$dM_x = xdy\cdot y.$$

Статичкиот момент на ликот во однос на $x$-оската е:

$$M_x = \int_0^b xy\,dy = \int_0^b a\left(1-\frac{y}{b}\right)y\,dy = a\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3b}\right)\Big|_0^b = \frac{ab^2}{6}.$$

Статичкиот момент на елементот во однос на $y$-оската е:

$$dM_y = xdy\cdot\frac{x}{2} = \frac{1}{2}x^2dy.$$

Статичкиот момент на ликот во однос на $y$-оската е:

$$M_y = \int_0^b \frac{x^2}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^b a^2\left(1-\frac{y}{b}\right)^2 dy = \frac{a^2b}{6}.$$

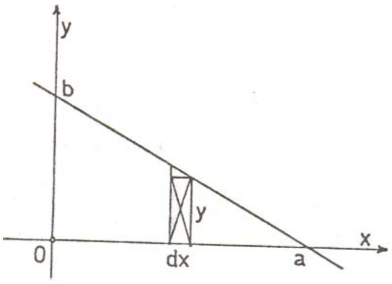
Масата на ликот (плоштината ) е:

$$M = \frac{ab}{2}.$$

Според тоа,

$$\xi = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{a^2b}{6}}{\frac{ab}{2}} = \frac{a}{3}, \qquad \eta = \frac{b}{3}.$$

Статичките моменти на ликот можеме да ги определиме и ако ликот го поделиме на елементи како што е прикажано на цртежот 9. 35. Проверете ја точноста на формулите за $M_x$ и $M_y$ и координатите на тежиштето.



Црт. 9. 35.

Во овој случај имаме:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^a y^2 dx, \qquad M_y = \int_0^a xy\, dx.$$

Проверете ги следниве задачи:

**1)** координатите на тежиштето на хомоген полукруг со радиус $R$ се:

$$\xi = 0, \qquad \eta = \frac{4R}{3\pi};$$

**2)** координатите на тежиштето на четвртина круг со радиус $a$ во првиот квадрант се:

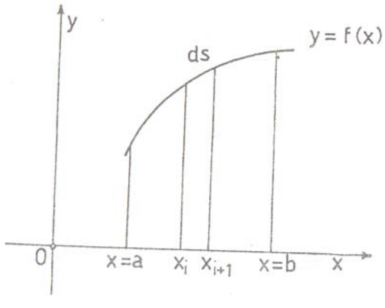
$$\xi = \eta = \frac{2a}{\pi}.$$

## 5. 2. Определување статички момент и тежиште на хомоген лак

Нека лакот АВ на кривата $y=f(x)$ во интервалот $[a,b]$ е обложен со маса и нека масата е рамномерно распределена, т.е. на еднаква должина одговара еднаква маса. Лакот АВ ќе го разделиме на $n$ помали делови со точките:

$$A_0, A_1, A_2, \ \dots\ , A_{i-1}, A_i, \ \dots\ , A_n$$

Со оглед на тоа дека лакот е хомоген, масата на одделните делови ќе биде пропорционална со должината на деловите. Еден од тие елементи е нацртан на цртежот 9.36.



Црт. 9. 36.

Масата на елементот ќе биде рамна на производот од должината на елементот и густината, т.е. $\mu ds$.

Сметајќи дека масата на елементот е концентрирана во која и да било точка од тој елемент, за статичкиот момент на елементот се добива:

$$dM_y = \mu ds \cdot x = \mu x ds.$$

Масите на другите елементи ќе сметаме дека се сместени соодветно во која и да било точка од елементот, така што статичкиот момент на целиот лак во однос на $y$-оската ќе биде рамен на сумата од статичките моменти на сите елементи (од системот материјални точки), според тоа се добива:

$$M_y = \mu \int_a^b x\,ds = \mu\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Аналогно, кога ќе формираме производ на масата од елементот со растојанието од $x$-оската до истата точка, што изнесува $y$, добиваме дека статичкиот момент на елементот во однос на $x$-оската е:

$$dM_x = \mu ds \cdot y = \mu y ds.$$

Статичкиот момент на целиот лак во однос на $x$-оската ќе биде рамен на сумата од статичките моменти на сите елементи, па според тоа, се добива:

$$M_x = \mu \int_a^b y\,ds = \mu\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Бидејќи за лакот што го разгледуваме масата е рамна на

$$\mu L = \mu \int_a^b ds = \mu\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

за определување координатите на тежиштето на хомоген лак се добиваат следниве формули:

$$\xi = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx}, \qquad \eta = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx}.$$

## 5. 3. Определување статички моменти и тежиште на хомогено тело

Ќе разгледаме само тела, што настануваат кога ликот ограничен со кривата $y=f(x)$ и правите $x=a$, $x=b$, ротира околу $x$-оската. Бидејќи $x$-оската е оска на симетрија на телото, тежиштето се наоѓа на неа, па $\eta = 0$. За да ја определиме апсцисата на тежиштето, ќе биде потребно да го определиме статичкиот момент на телото во однос на $y$-оската. За таа цел телото ќе го поделиме на мали делови, сечејќи го со рамнини нормални на $x$-оската. Еден од тие елементи е нацртан на цртежот 9. 37. Земајќи дека тој елемент е со облик на цилиндар со димензии $y$ и $dx$, масата на тој елемент ќе биде

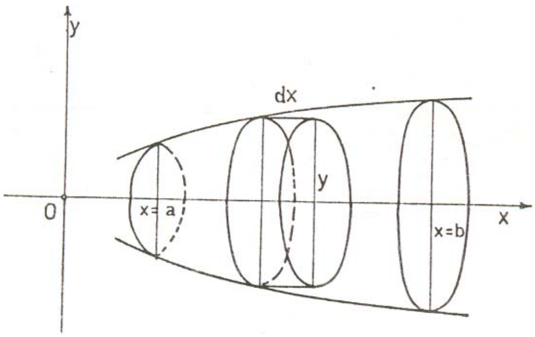
$$\pi\mu y^{2}dx.$$

При претпоставка масата на тој елемент да е концентрирана во неговото тежиште, кое поради симетрија лежи во средината на цилиндарот, статичкиот момент на елементот ќе биде:

$$dM_y = \pi\mu y^2\, dx \cdot x.$$

И другите елементи ќе ги сметаме за цилиндри и нивните маси концентрирани соодветно во нивните тежишта, така што статичкиот момент на целото тело (на системот од $n$ материјални точки) ќе биде рамен на сумата од моментите на сите елементи, па според тоа:

$$M_y = \mu\pi\int_a^b y^2 x\, dx.$$



Црт. 9. 37.

Бидејќи масата на телото што го разгледуваме е рамна на

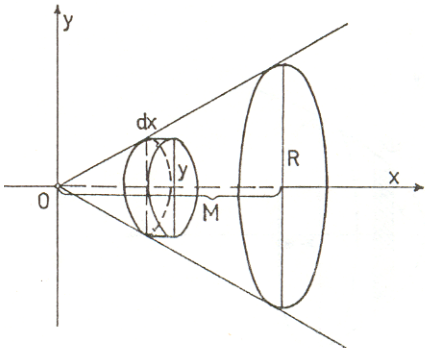
$$\mu V = \mu\pi \int_a^b y^2\, dx\,,$$

за апсцисата на тежиштето ја добиваме следнава формула:

$$\xi = \frac{\int_a^b y^2 x\, dx}{\int_a^b y^2\, dx}\,.$$

**Пример 1.** *Да се определат координатите на тежиштето на конус со димензии* $R$ *(радиус на основата) и* $H$ *(висина на конусот).*

Конусот е сместен во однос на координатниот систем, како што е прикажано на цртежот 9.38. Тој се добива кога ликот ограничен со правите $y = \frac{Rx}{H}$, $x=H$ ротира околу $x$-оската. Конусот го делиме со рамнини нормални на $x$-оската. Еден од елементите е нацртан на цртежот.



Црт. 9. 38.

Статичкиот момент на елементот во однос на $y$-оската, сметајќи го елементот приближно за цилиндар со димензии $y$ и $dx$, ќе биде:

$$dM_y = \pi y^2 dx\cdot x = \pi y^2 x dx,$$

а на конусот:

$$M_y = \pi \int_0^H y^2 x\, dx = \pi \int_0^H \frac{R^2}{H^2} x^2 \cdot x\, dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^3\, dx = \frac{1}{4} R^2 H^2 \pi\,.$$

Волуменот на конусот (еднаков на масата при претпоставка $\mu = 1$) е:

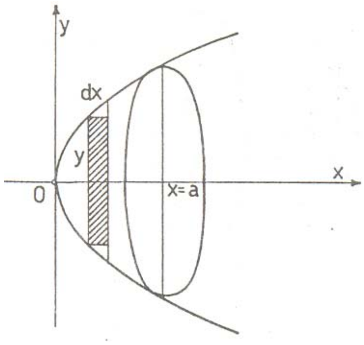
$$M = V = \frac{1}{3} R^2 H\pi.$$

Апсцисата на тежиштето е:

$$\xi = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{1}{4}\pi R^2 H^2}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} = \frac{3}{4} H .$$

Ординатата на тежиштето е $\eta = 0$.

**Пример 2.** *Ликот ограничен со параболата* $y^2=2px$ *и правата* $x=a$ *ротира околу* $x$*-оската. Да се определи полож-бата на тежиштето на телото што се добива при ротацијата* (црт. 9. 39).



Црт. 9. 39.

На ист начин и при истите претпоставки што ги направивме во претходниот пример, следува:

$$M_y = \pi \int_0^a y^2 x\, dx = \pi \int_0^a 2px \cdot x\, dx =$$

$$= \frac{2p\pi x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{2}{3} p\pi a^3 .$$

Масата на телото (еднаква на волуменот) ја добиваме од:

$$M = \pi \int_0^a y^2\, dx = \pi \int_0^a 2px\, dx = 2\pi p \frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \pi p a^2 .$$

Апсцисата на тежиштето на разгледуваното тело е:

$$\xi = \frac{M_y}{M} = \frac{2}{3} a .$$

# ЛИТЕРАТУРА

[1] Алендорфер К. , Окли К.: Принципи математике, Београд, 1966 год.

[2] Банах С.: Дифференциальное и интегральное исчисление, Москва, 1966 год.

[3] Битраков Д., Георгиевска С.: Краток курс по диференцијално и интегрално сметање, Скопје, 1975год

[4] Блануша Д.: Виша математика, т. I, св. 1, Загреб, 1965 год.

[5] Девиде В.: Увод во математичка логика, Скопје,

[6] Игнатьева В. А. , Краснощекова И. Т., Смирнов Ф. В.: Курс высшей математики, Москва, 1964 г.

[7] Кудрявцев Д. Л.: Курс математического анализа, т. I, Москва, 1981 г.

[8] Miličić M. P. : Matematika I, Beograd, 1979 g.

[9] Mitrinović S. D., Mihajlović D., Vasić P. M.: Linearna algebra, Analitička geometrija, Polinomi,Beograd, 1968 god.

[10] Пискунов С. Н.: Дифференциальное и интегральное исчисление, Москва,1976 г.

[11] Stipanić E.: Vi ša matematika I i II deo, Beograd, 1985 god.

[12] Уваренков И. М., Маллер М. Э.: Курс математического анализа, Москва, 1966 г.

[13] Фихтенгольц Г. М.: Основы математического анализа, т. I, Москва, 1968 год.

[14] Чупона Ѓ.,Трпеновски Б., Целакоски Н.: Предавања по виша математика, кн. I, II, Скопје,1976 год.

[15] Шапкарев И., Кржовски П.: Линеарна алгебра со аналитичка геометрија во простор, Скопје, 1975 год.

# СОДРЖИНА

## ГЛАВА I

## ВОВЕДНИ ПОИМИ

## ГЛАВА II

## БЕСКОНЕЧНИ НИЗИ ОД РЕАЛНИ БРОЕВИ

## ГЛАВА III

## ФУНКЦИИ ОД ЕДНА НЕЗАВИСНО ПРОМЕНЛИВА

ГЛАВА IV

## ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА ФУНКЦИЈА. НЕПРЕКИНАТОСТ НА ФУНКЦИЈА

ГЛАВА V

## ИЗВОД НА ФУНКЦИЈА

## ГЛАВА VI

## ПРИМЕНА НА ИЗВОДИ

## ГЛАВА VII

## НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

ГЛАВА VIII

## ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

ГЛАВА IX

## ПРИМЕНА НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Одобрено со решение на Универзитетот "Св. Кирил и Методиј"како ОСНОВЕН УЧЕБНИК, трето издание

Рецензенти:

Проф. Димитар Битраков
Проф. д-р Илија Шапкарев

Лектура:

Наталија Глинска-Ристова

Тираж:
400 примероци

CIP-Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека "Св.Климент Охридски"
Скопје

517(075.8)
512.642(065.8)

АТАНАСОВА, Елена
Математика II: [основен учебник] /Елена Атанасова,
Слободанка Георгиевска. -3. изд. - Скопје: Универзитет
"Св. Кирил и Методиј", 2002. -VI, 445 стр.:граф.прикази; 24 см

1. изд. 1988. - Библиографија: стр. 443-445

ISBN 9989-43-184-1
1. Георгиевска, Слободанка
а) Математичка анализа -Високошколски учебници,
б)Векторска анализа - Високошколски учебници.

Според мислењето на Министерството за образование за ова издание се плаќа повластена даночна стапка од 5%.