



# О ЈЕДНОМ ГЕНЕРАЛИСАНОМ ГЕОМЕТРИСКОМ РЕДУ

Ковина Милошевић

## 1. Посматраћемо ред

$$(1) \quad F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a + (k-1)d]^n x^k,$$

где је  $n$  природан број,  $a |x| < 1$ .

Овај ред је генерализација геометриског реда

$$F_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x},$$

а ред

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k,$$

кога је посматрао *R. Staley* [1], такође је специјалан случај реда (1), где је  $a = d = 1$ .

Ако диференцирамо ред (1) имаћемо

$$F_n'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k [a + (k-1)d]^n x^{k-1}$$

Даље имамо

$$xd F_n'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kd [a + (k-1)d]^n x^k,$$

па ако додамо левој и десној страни израз

$$(a-d) F_n(x) = (a-d) \sum_{k=1}^{\infty} [a + (k-1)d]^n x^k$$

имаћемо

$$xd F_n'(x) + (a-d) F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a + (k-1)d]^n [a + (k-1)d] x^k,$$

тј.

$$xd F_n'(x) + (a-d) F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a + (k-1)d]^{n+1} x^k.$$

Дакле, имамо рекурзивну формулу за израчунавање реда  $F_n(x)$

$$(2) \quad F_{n+1}(x) = xd F_n'(x) + (a-d) F_n(x).$$

Пошто је

$$F_0(x) = \frac{x}{1-x}.$$

добито користећи формулу (2)

$$F_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \{a + (d-a)x\},$$

$$F_2(x) = \frac{x}{(1-x)^3} \{(d-a)^2 x^2 + (d^2 + 2ad + 2a^2)x + 2ad - d^2\}$$

$$F_3(x) = \frac{x}{(1-x)^4} \{(d-a)^3 x^3 + [(a+d)^3 - 4a^3] x^2 + [(a+2d)^3 - 4(a+d)^3 + 6a^3] x + (a+3d)^3 - 4(a+2d)^3 + 6(a+d)^3 - 4a^3\},$$

тако да уопште можемо ставити

$$(3) \quad F_n(x) = \frac{x}{(1-x)^{n+1}} P_n(x),$$

где је  $P_n(x)$  полином  $n$ -тог степена.

Из рекурзивне формуле (2), с обзиром на релацију (3) и на релацију

$$F_n'(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+2}} \{(nx+1) P_n(x) + x(1-x) P_n'(x)\},$$

добијемо

$$(4) \quad P_{n+1}(x) = \{(nd + d - a)x + a\} P_n(x) + xd(1-x) P_n'(x).$$

Овом рекурзивном релацијом можемо поступно израчунати полиноме  $P_n(x)$ .

2. Ставићемо сада

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^n K_r^n(a, d) x^r,$$

тако да је

$$P_n'(x) = \sum_{r=1}^n r K_r^n(a, d) x^{r-1},$$

па с обзиром да је

$$P_{n+1}(x) = \sum_{r=0}^{n+1} K_r^{n+1}(a, d) x^r,$$

добито ћемо заменом у (4)

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{n+1} K_r^{n+1}(a, d) x^r &= \sum_{r=0}^n K_r^n(a, d) (nd + d - a) x^{r+1} + \sum_{r=0}^n a K_r^n(a, d) x^r \\ &+ \sum_{r=1}^n r d K_r^n(a, d) x^r - \sum_{r=1}^n r d K_r^n(a, d) x^{r+1}. \end{aligned}$$

Изједначавањем коефицијената пред  $x^{r-1}$  добићемо

$$K_r^{n+1}(a, d) = \{(n-r+2)d - a\} K_{r-1}^n(a, d) + (a+dr) K_r^n(a, d),$$

тј.

$$(5) \quad K_r^n(a, d) = \{(n-r+1)d - a\} K_{r-1}^{n-1}(a, d) + (a+dr) K_r^{n-1}(a, d).$$

Одавде се добија

$$(6) \quad K_r^n(a, d) = \sum_{i=1}^{n-r} \{a+rd\}^{i-1} \{(n-r+2-i)d - a\} K_{r-i}^{n-i}(a, d).$$

Из рекурзивног обрасца (5) имамо

$$K_0^n(a, d) = \{(n+1)d - a\} K_{-1}^n(a, d) + a K_1^{n-1}(a, d),$$

па како је  $K_{-1}^n(a, d) = 0$ , имаћемо

$$K_0^n(a, d) = a K_0^{n-1}(a, d) = a^2 K_0^{n-2}(a, d) = \dots = a^n K_0^0(a, d) = a^n,$$

јер је  $K_0^0(a, d) = 1$ .

С обзиром на почетни услов  $K_0^n(a, d) = a^n$  и на релацију (6) добијамо поступно

$$K_0^n(a, d) = a^n$$

$$K_1^n(a, d) = (a + d)^n - \binom{n+1}{1} a^n$$

$$K_2^n(a, d) = (a + 2d)^n - \binom{n+1}{1} (a + d)^n + \binom{n+1}{2} a^n$$

.....

$$K_r^n(a, d) = (a + rd)^n - \binom{n+1}{1} [a + (r-1)d]^n + \dots + (-1)^r \binom{n+1}{r} a^n,$$

тј.

$$(7) \quad K_r^n(a, d) = \sum_{m=0}^r (-1)^m \binom{n+1}{m} [a + (r-m)d]^n.$$

Образац (7) можемо једноставно доказати показавши да  $K_r^n(a, d)$  задовољава рекурзивну релацију (5). Тако имамо

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^r (-1)^m \binom{n+1}{m} [a + (r-m)d]^n &= \{(n-r+1)d - a\} \sum_{m=0}^{r-1} (-1)^m \binom{n}{m} [a + \\ &+ (r-m-1)d]^{n-1} + (a+dr) \sum_{m=0}^r (-1)^m \binom{n}{m} [a + (r-m)d]^{n-1} \\ &= (a+dr) \sum_{m=0}^r (-1)^m \binom{n+1}{m} [a + (r-m)d]^{n-1} - \\ &- md \sum_{m=1}^r (-1)^m \binom{n+1}{m} [a + (r-m)d]^{n-1} \\ &= \sum_{m=0}^r (-1)^m \binom{n+1}{m} [a + (r-m)d]^n, \end{aligned}$$

чиме је, с обзиром на почетни услов  $K_0^n(a, d) = a^n$ , образац (7) доказан.

3. Показаћемо сада да се коефицијенти полинома  $P_n(x)$ , којим смо изразили генералисани геометрички ред (1), јављају при развијању степена

$$(a + dx)^n$$

у специјални биномни ред.

Према *L. Carlitz*-овим резултатима [2, стр. 240], познато је да ако је  $f(x)$  произвољни полином степена  $\leq n$ , тада је

$$(8) \quad f(x) = (-1)^n \sum_{r=0}^n C_r \binom{x+k-1}{n},$$

где су коефицијенти  $C_r$  дефинисани са

$$(9) \quad C_r = \sum_{m=0}^r (-1)^m \binom{n+1}{m} f(m-r).$$

Ставивши сада

$$f(x) = (a - xd)^n,$$

добиамо да је

$$(a - xd)^n = (-1)^n \sum_{r=0}^n C_r' \binom{x+k-1}{n},$$

где је

$$C_r' = \sum_{m=0}^r (-1)^m \binom{n+1}{m} [a + (r-m)d]^n.$$

Очигледно је да су коефицијенти  $C_r'$  идентични коефицијентима  $K_r^n(a, d)$ , те имамо

$$(10) \quad (a - xd)^n = (-1)^n \sum_{r=0}^n K_r^n(a, d) \binom{x+k-1}{n}.$$

Ако на израз (10) извршимо операцију

$$\Delta^n f(x) = \Delta [\Delta^{n-1} f(x)],$$

где је

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$$

имајући при том у виду познате релације [3, стр. 181, 69]

$$\Delta^n x^k = \sum_{v=1}^k (v)_n \sigma_k^v(x)_{v-n}$$

$$\Delta^n \binom{x}{m} = \binom{x}{m-n},$$

где су  $\sigma_m^n$  Stirling-ови бројеви II врсте, а

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1),$$

добићемо рекурзивну релацију између коефицијената  $K_r^n(a, d)$ ,

$$(11) \sum_{r=0}^n K_r^n(a, d) = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a^k d^{n-k} \sum_{v=1}^{n-k} (v)_m \sigma_{n-k}^v(x)_{v-n}.$$

Напоменућемо још да код *Nielsen*-а [4, стр. 28] налазимо израз

$$\beta_r^n(\alpha) = \sum_{m=0}^r (-1)^m \binom{n+1}{m} (\alpha + r - m)^n,$$

који је са коефицијентима  $K_r^n(a, d)$  везан релацијом

$$K_r^n(a, d) = d^n \beta_r^n\left(\frac{a}{d}\right).$$

С обзиром на образац (13) [4, стр. 238] добијамо релацију

$$(12) \frac{2 d^n (2^{2n} - 1) B_n}{2n} = \sum_{m=0}^{2n} \left[ \left( \frac{a}{d} + m \right) - \left( \frac{a}{d} + m - \frac{1}{2} \right) \right] K_m^{2n-1}(a, d),$$

којом се Bernoulli-еви бројеви, дефинисани са

$$\sum_{m=1}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} (-1)^{m-1} \binom{n+1}{2m} B_m = \frac{n-1}{2}, \quad (n \geq 2)$$

изражавају коефицијентима  $K_r^n(a, d)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. Staley, A Generalization of the Geometric Series, Amer. Math. Monthly, 56, 1949, p. 3 5—327.  
 [2] L. Carlitz, Note on a paper of Spanks, Amer. Math. Monthly, 59, 1952, p. 230—241.  
 [3] C. Jordan, Calculus of Finite Differences, Budapest, 1939.  
 [4] N. Nielsen, Traité élémentaire des nombres de Bernoulli, Paris, 1923

*Résumé*

## SUR UNE SÉRIE GÉOMETRIQUE GÉNÉR' LISÉE

K. Milošević

On donne pour la série géométrique généralisée

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a + (k-1)d]^n x^k, \quad n \text{ nombre naturel, } |x| < 1,$$

la forme

$$F_n(x) = \frac{x}{(1-x)^{n+1}} P_n(x),$$

avec

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^n K_r^n(a, d) x^r,$$

où les coefficients  $K_r^n(a, d)$ , intervenantes aussi dans l'expression

$$(a - xd)^n = (-1)^n \sum_{r=0}^n K_r^n(a, d) \binom{x+k-1}{n},$$

sont obtenus sous la forme

$$K_r^n(a, d) = \sum_{m=0}^r \binom{n+1}{m} [a + (r-m)d]^n.$$