*Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R.P. de Serbie
Vol. VIII, 3—4, (1956), Beograd
Yougoslavie*

SUR QUELQUES SOMMES FINIES

par KOVINA MILOŠEVIĆ, SKOPLJE

Dans cette Note nous appliquons une méthode du calcul des différences finies pour effectuer la sommation de l'expression

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+is)\right\}, \tag{1}$$

où m, ν sont les nombres naturels et n, p, s désignent les nombres réels.

Les sommes (1) ont fait également le sujet d'une Note de *D. S. Mitrinovitch* [1], où on a donné leurs valeurs par une méthode differente de celle que nous avons employée.

Nous allons utiliser les symboles suivants

$$\mathop{\Delta}_{h} f(x)=f(x+h)-f(x), \quad \mathop{\Delta^n}_{h} f(x)=\mathop{\Delta}_{h}[\mathop{\Delta^{n-1}}_{h} f(x)],$$

$$\mathop{E}_{h} f(x)=f(x+h), \quad \mathop{E^n}_{h} f(x)=\mathop{E}_{h}[\mathop{E^{n-1}}_{h} f(x)]=f(x+nh),$$

$$(x)_{n,h}=x(x-h)(x-2h)\ldots(x-nh+h),$$

$$(x)_{-n,h}=\frac{1}{(x+nh)_{n,h}}.$$

Le symbole de Kramp

$$x^{n/h}=x(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh-h)$$

utilisé par *D. S. Mitrinovitch* [1] correspond à

$$(x+nh-h)_{n,h}$$

ainsi que le symbole de Pochhammer $(n/p)_{\nu+m}$ correspond à

$$(n/p+m+\nu-1)_{m+\nu}.$$

Nous désignons, pour abréger, les symboles

$$\mathop{\Delta}_{1}, \mathop{\Delta^n}_{1}, \mathop{E}_{1}, \mathop{E^n}_{1}, (x)_{n,1}, (x)_{-n,1}$$

avec

$$\Delta,\ \Delta^n,\ E,\ E^n,\ (x)_n,\ (x)_{-n}\,.$$

Comme

$$\underset{h}{\Delta} = \underset{h}{E} - 1$$

il en résulte que l'on a la relation symbolique

(2) $$\underset{h}{\Delta^m} = (\underset{h}{E} - 1)^m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k+m} \binom{m}{k} \underset{h}{E^k}.$$

Si nous appliquons ensuite à la fonction $f(x)$ l'opération (2) nous aurons

$$\underset{h}{\Delta^m} f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k+m} \binom{m}{k} \underset{h}{E^k} f(x)$$

et puisque

$$\underset{h}{E^k} f(x) = f(x + kh)\,,$$

nous obtenons pour $x = 0$

(3) $$(-1)^m \underset{h}{\Delta^m} f(0) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(kh).$$

Nous utilisons d'abord la formule sommatoire (3) pour déterminer la valeur de la somme particulière de la forme

(4) $$\sum_{k=0}^{m} \left\{ (-1)^k \binom{m}{k} \Big/ \prod_{i=0}^{\nu-1} (n+k+i) \right\}.$$

En posant $h = 1$ et

$$f(x) = 1 \Big/ \prod_{i=0}^{\nu-1} (n+k+i) = (n+k-1)_{-\nu}\,,$$

nous aurons en vertu de (3)

$$\sum_{k=0}^{m} \left\{ (-1)^k \binom{m}{k} \Big/ \prod_{i=0}^{\nu-1} (n+k+i) \right\} = (-1)^m \Delta^m (n-1)_{-\nu}.$$

D'autre part, il est bien connu que

(5) $$\underset{h}{\Delta^m} (x)_{r,h} = h^m (r)_m (x)_{r-m,h}\,,$$

où r est un entier positif ou negatif.

D'après cela, nous aurons immédiatement

$$\Delta^m (n-1)_{-\nu} = (-\nu)_m (n-1)_{-\nu-m}\,,$$

et comme on a, en effet

$$(-\nu)_m = \frac{(-1)^m (\nu+m-1)!}{(\nu-1)!},$$

$$(n-1)_{-\nu-m} = 1/(m+n+\nu-1)_{\nu+m}\,,$$

la formule donnant la somme (4) prend la forme

$$(6)\qquad \sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+k+i)\right\}=\frac{(m+\nu-1)!}{(\nu-1)!\,(m+n+\nu-1)!}.$$

Dans le cas où n est un nombre naturel, la formule (6) devient

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+k+i)\right\}=\frac{(n-1)!\,(m+\nu-1)!}{(\nu-1)!\,(m+n+\nu-1)!},$$

ce qui correspond à la formule (6) de [1, p. 3].

A l'aide de la somme (6) on peut trouver facilement la somme plus générale

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}[n+p(k+i)]\right\}=\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/p^{\nu}\prod_{i=0}^{\nu-1}\left(\frac{n}{p}+k+i\right)\right\}=$$

$$=\frac{(m+\nu-1)!}{p^{\nu}(\nu-1)!\left(m+\dfrac{n}{p}+\nu-1\right)_{\nu+m}},$$

qui correspond à la formule (16) de [1, p. 7].

2. Dans ce qui suit nous allons appliquer le même procédé pour déterminer la somme plus générale

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+is)\right\}.$$

Posons pour abréger

$$1\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+is)=(n+kp+s)_{-\nu,s}.$$

Si l'on pose ensuite

$$f(x)=(x+n-s)_{-\nu,s},$$

on obtient

$$f(x+kp)=(x+n+kp-s)_{-\nu,s},$$

donc

$$f(0)=(n-s)_{-\nu,s},\quad f(kp)=(n+kp-s)_{-\nu,s}.$$

D'après la formule (3) nous tirons

$$(-1)^m\Delta_p^m f(0)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f(kp),$$

ce qui donne

$$(7)\qquad \sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+is)\right\}=(-1)^m\Delta_p^m(n-s)_{\nu-s}.$$

Le calcul d'expression $\underset{p}{\Delta^m}(n-s)_{\nu-s}$ se ramène au problème d'exprimer les différences d'une fonction d'un système où l'incrément est p, en fonction des différences d'un système avec l'incrément s.

Dans ce but on considère la serie de Newton

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{x}{i}_s \frac{\underset{s}{\Delta^i} f(0)}{s^i}, \tag{8}$$

où $\binom{x}{i}_s$ est le coefficient du binôme généralisé, dont la valeur est

$$\binom{x}{i}_s=\frac{1}{i!}(x)_{i,s}.$$

Nous allons appliquer l'opération $\underset{p}{\Delta^m}$ à la serie (8). Ainsi nous aurons pour $x=0$

$$\underset{p}{\Delta^m} f(0)=\sum_{i=0}^{\infty}\left[\underset{p}{\Delta^m}\binom{x}{i}_s\right]_{x=0}\frac{\underset{s}{\Delta^i} f(0)}{s^i}.$$

D'autre part, il est bien connu [2, p. 220—224] que

$$\left[\underset{p}{\Delta^m}\binom{x}{i}_s\right]_{x=0}=\frac{m!\,s^i}{i!}P(i,m),$$

où les expressions $P(i,m)$ satisfont la relation de récurrence

$$P(i+1,m)=\left(m\frac{p}{s}-i\right)P(i,m)+\frac{p}{s}P(i,m-1). \tag{9}$$

On démontre encore

$$P(i,m)=\sum_{j=m}^{i}\left(\frac{p}{s}\right)^j S_i^j\,\sigma_j^m, \tag{10}$$

où S_i^j et σ_j^m sont les nombres de Stirling de première et deuxième espèce.

D'après cela on a

$$\underset{p}{\Delta^n} f(0)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{m!}{i!}P(i,m)\underset{s}{\Delta^i} f(0). \tag{11}$$

En posant dans (11)

$$f(0)=(n-s)_{-\nu,s}$$

puis

$$\underset{s}{\Delta^i}(n-s)_{-\nu,s}=s^i(-\nu)_i(n-s)_{-\nu-i,s}$$

on peut en tirer

$$\underset{p}{\Delta^m}(n-s)_{-\nu,s}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\,m!\,(\nu+i-1)\,i}{i!\,(m+\nu+i+1\,s)_{\nu+i,s}}P(i,m),$$

En remplaçant cette expression dans (7) il s'ensuit que

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+is)\right\}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+m}s^i\,m!\,(\nu+i-1)_i}{i!\,(n+\overline{\nu+i+1}\,s)_{\nu+i,s}}P(i,m).$$

Dans le cas $s=p$ on a

$$P(i,m)=\sum_{j=m}^{i}S_i^j\,\sigma_j^m\equiv\begin{cases}0 & i\neq m\\ 1 & i=m\end{cases}$$

et d'après cela nous aurons une expression générale

$$\text{(12)}\quad \sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+pi)\right\}\equiv\frac{(\nu+m-1)!}{p^\nu(\nu-1)!\left(\frac{n}{p}+m+\nu-1\right)_{\nu+m}},$$

ce qui correspond à la formule (16) de [1, p. 7].

3. Si la fonction $f(x)$ est un polynôme du degré r, la formule (11) devient

$$\text{(13)}\qquad \mathop{\Delta^m}_{p} f(0)=\sum_{i=0}^{r}\frac{m!}{i!}P(i,m)\mathop{\Delta^i}_{s} f(0),$$

où

$$P(i,m)=\sum_{j=m}^{i}\left(\frac{p}{s}\right)^j S_i^j\,\sigma_j^m.$$

Par suite, nous pouvons calculer la somme de la forme

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+is)\right\}.$$

Dans ce cas on a

$$f(kp)=(n+kp+\overline{\nu-1}\,s)_{\nu,s},$$

c'est-à-dire

$$f(0)=(n+\overline{\nu-1}\,s)_{\nu,s}$$

et la fomule (13) prend la forme

$$\mathop{\Delta^m}_{p}(n+\overline{\nu-1}\,s)_{\nu,s}=\sum_{i=0}^{\nu}\frac{m!}{i!}P(i,m)\mathop{\Delta^i}_{s}(n+\overline{\nu-1}\,s)_{\nu,s}$$

D'autre part, d'après la formule (5), on obtient

$$\mathop{\Delta^i}_{s}(n+\overline{\nu-1}\,s)_{\nu,s}=s^i(\nu)_i(n+\overline{\nu-1}\,s)_{\nu-i,s}$$

et enfin il résulte

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+is)\right\}=$$

$$=(-1)^m\,m!\sum_{i=0}^{\nu}s^i\binom{\nu}{i}(n+\overline{\nu-1}\,s)_{\nu-i,s}P(i,m).$$

D'où, dans le cas $p = s$ on obtient la formule

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+\overline{k+i}p)\right\}=(-1)^m\,\frac{p^\nu\,\nu!}{(\nu-m)!}\left(\frac{n}{p}+\nu-1\right)_{\nu-m}.$$

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] D. S. Mitrinovitch, *Sur quelques formules sommatoires* (Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: mathématiques et physique, № 7 (1956), 8 p.).

[2] C. Jordan, *Calculus of Finite Differences*, Chelsea, New York, 1950.

О НЕКИМ КОНАЧНИМ ЗБИРОВИМА

КОВИНА МИЛОШЕВИЋ, СКОПЉЕ

Садржај

У овој ноти примењен је један метод из рачуна коначних разлика за израчунавање збирова облика

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+is)\right\},$$

где су m, ν природни а n, p, s, реални бројеви. Збирови овог облика предмет су *Д. Митриновић*-евог рада [1], где су израчунати на један други начин.

Дат је општи образац

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+is)\right\}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+m}\,s^i\,m!\,(\nu+i-1)_i}{i!\,(n+\overline{\nu+i+1}\,s)_{\nu+i,s}}\,P(i,m),$$

где је

$$P(i,m)=\sum_{j=m}^{i}\left(\frac{p}{s}\right)^j S_i^j\sigma_j^m$$

(S_i^j и σ^m су *Стирлинг*-ови бројеви I и II врсте).

За случај $s = p$ образац постаје

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+ip)\right\}=\frac{(\nu+m-1)!}{p^\nu(\nu-1)!\left(\frac{n}{p}+m+\nu-1\right)_{\nu+m}}.$$

Служећи се истим методом дат је такође и образац

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+\overline{k+i}p)\right\}=(-1)^m\,\frac{p^\nu\,\nu!}{(\nu-m)!}\left(\frac{n}{p}+\nu-1\right)_{\nu-m}.$$