ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 7 (1954), № 1
ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 7 (1954), № 1

MILAN S. POPADIĆ

# O INDUKTIVNIM SISTEMIMA

MILAN S. POPADIĆ

# ON INDUCTIVE SYSTEMS

Скопје — Skopje
1954

## *PREDGOVOR*

*Sadržina ovog rada upravo je tema obrađena za doktorsku disertaciju, koja je branjena 9 februara ove godine, na Sveučilištu u Zagrebu. Rad je u vezi sa izvesnim radovima profesora Đ. Kurepe. Profesor Đ. Kurepa mi je predložio da pokušam „iscrpsti“ ravan elementarnim početnim komadima, što bi, ukoliko uspe, pretstavljalo uopštenje jednog njegovog stava*. Upravo teškoće na koje sam tom prilikom naišao, dovele su me do uvođenja pojma „induktivnog sistema“ i rezultata u vezi sa tim, a najzad je došlo i rešenje pomenutog problema.*

*Ovom prilikom smatram za neophodno da najtoplije zahvalim g. profesoru Đ. Kurepi na sugestijama i pomoći koju mi je pružao tokom celog rada, kako upućivanjem na literaturu, tako i usmenim pretresanjem izvesnih problema.*

*M. S. P.*

*10 mart 1954 godine*
*Skopje*

---

*) Vidi teoremu 2 na strani 23 u radu pod brojem 4, navedenom na kraju članka.

# 1. UVOD

**1. 1.** Princip „*matematičke indukcije*" najpre se pojavio u matematici u obliku principa „*totalne indukcije*" koji glasi:
*Ako je neki stav istinit za broj* 1, *i ako iz istinitosti za prirodan broj n sleduje njegova istinitost i za broj* $n+1$, *onda je on istinit i za svaki prirodan broj.*

Ovaj princip omogućuje jedan prvenstveno matematički metod dokazivanja, koji je naročito u poslednje vreme korišćen. Prvi put se javljaju elementi ovakvog načina dokazivanja kod EUKLID-a, pa zatim u nešto jasnijem obliku kod Italijana FRANCESCO-a MAUROLICO-a, i najzad kod B. PASCAL-a [1, 504] i J. BERNOULLI-a [2, 341]. Međutim tek u prošlom veku počinje njegova svestrana i plodna primena, a početkom ovoga veka javlja se značajna diskusija o logičkoj prirodi navedenog principa. U diskusiji su učestvovali i najpoznatiji matematičari novijeg vremena POINCARÉ, ZERMELO, HILBERT i drugi.

U isto vreme javljaju se izvesna uopštenja. Najpre *princip transfinitne indukcije* [3, 113], koji je karakterističan za dobro uređene množine kao što je princip totalne indukcije karakterističan za množinu prirodnih brojeva. Zatim imamo, prema nazivu Đ. KUREPE [4, 22], LEBESGUE—HINČIN-ovo *svojstvo*, karakteristično za potpuno uređene množine bez unutrašnjih lakuna.* Najzad Đ. KUREPA, između ostalog, formuliše *opšti princip indukcije za uređene* (tj. delimično uređene) *množine*.

**1. 2.** Obeležavajući velikim latinskim slovima množine, a sa $\Lambda$ praznu množinu, opšta šema principa indukcije može se formulisati na sledeći način:

**Pr** 1. 2. 1. *Za proizvoljne množine M i N iz relacije* $N \subseteq M$ *i uslova:*

1. *postoji množina A za koju su zadovoljene relacije* $\Lambda \subset A \subseteq M$, $A \subseteq N$;

2. *za svaku množinu B, za koju je* $\Lambda \subset B \subset M$, $B \subseteq N$, *postoji množina C koja zadovoljava relacije* $B \subset C \subseteq M$, $C \subseteq N$

— *sleduje* $M = N$.

Druga nešto opštija formulacija glasi:

**Pr** 1. 2. 2. *Za proizvoljne množine M i N iz uslova:*

1. *postoji množina A za koju su zadovoljene relacije* $\Lambda \subset A \subseteq M$, $A \subseteq N$;

---

* Vidi definiciju 5. 1. 6.

2. *za svaku množinu B, za koju je* $\Lambda \subset B \subset M$, $B \subseteq N$, *postoji množina C koja zadovoljava relacije* $B \subset C \subseteq M$, $C \subseteq N$
— *sleduje* $M \subseteq N$.

Sledeći očevidan stav karakteriše odnos navedenih propozicija:

**T** 1. 2. 1. *Istinitost propozicije* 1. 2. 2. *povlači istinitost propozicije* 1. 2. 1.

Prema tome svi rezultati koji se dobijaju u vezi sa *propozicijom* 1. 2. 2 odnose se i na *propoziciju* 1. 2. 1.

Princip indukcije ukazuje u neku ruku na koji se način data množina *M* može „iscrpsti" [5, 110]. Iscrpljivanje se vrši podmnožinama množine *M* (množine *A*, *B*, *C* u navedenim propozicijama). Međutim u konkretnom slučaju te podmnožine pripadaju određenom sistemu $S(M) \subseteq P(M)$ [$P(M)$ — *partitivna množina* od *M*]. Tako, na primer, ako pod *elementarnim početnim komadom* $(-, a|_M$ potpuno uređene množine *M* razumemo množinu svih elemenata koji prethode elementu *a*, bilo da *a* pridružimo ili ne toj množini. mogli bi formulisati sledeću propoziciju:

*Za potpuno uređenu množinu M i proizvoljnu množinu N iz uslova:*

1. *postoji elementarni početni komad A od M, koji zadovoljava relaciju* $\Lambda \subset A \subseteq N$;

2. *za svaki elementarni početni komad B od M, za koji je* $\Lambda \subset B \subset M$, $B \subseteq N$, *postoji elementarni početni komad C od M, koji zadovoljava relaciju* $B \subset C \subseteq N$
— *sleduje* $M \subseteq N$.

Ova propozicija dobija se iz *propozicije* 1. 2. 2 kada se specificiraju uslovi za množine *A*, *B* i *C*, na taj način što se pretpostavi da pripadaju sistemu svih elementarnih početnih komada od *M*. Kao što je dokazano [4, 23—24], ovaj stav je istinit ako je *M* bez unutrašnjih lakuna; međutim ako *M* ima unutrašnjih lakuna, onda on nije tačan. Iz ovog prostog primera vidi se značaj sistema kome pripadaju množine *A*, *B*, *C*. U vezi sa ovim, imamo sledeću definiciju:

**D** 1. 2. 1. *Sistem* $S(M)$ *podmnožina od M naziva se induktivnim sistemom za množinu M, ili prosto induktivnim sistemom, ako je propozicija* 1. 2. 2 *istinita kada su A, B i C elementi od* $S(M)$, ili preciznije:

*Sistem* $S(M)$ *podmnožina množine M naziva se induktivnim za M ako, ma kakva bila množina N, iz uslova:*

1. *postoji množina* $A \in (S(M) \setminus \{\Lambda\}) \cap P(N)$*;

2. *za svaku množinu* $B \in (S(M) \setminus \{\Lambda, M\}) \cap P(N)$ *postoji množina* $C \in S(M) \cap P(N)$ *za koju je* $B \subset C$
— *sleduje* $M \subseteq N$.

---

* $A \setminus B$ znači množinu svih elemenata od *A* koji ne pripadaju množini *B*.

Ubuduće, kada se pozivamo na uslove 1 i 2, koristićemo njihovu eksplicitnu formulaciju u propoziciji 1. 2. 2.

Dakle kada su za elemente induktivnog sistema zadovoljeni uslovi 1 i 2 uvek je $M \subseteq N$. Prema tome, za svaku potpuno uređenu množinu bez unutrašnjih lakuna, množina svih elementarnih početnih komada pretstavlja induktivan sistem. Međutim, ako $M$ sadrži bar jedan unutrašnji ponor, ovaj sistem nije induktivan za $M$. Takođe se može lako pokazati da je za svaku množinu njena partitivna množina induktivan sistem.* — Dakle postavlja se sledeći problem:

**P** 1. 2. 1. *Koji su nužni i dovoljni uslovi da bi dati sistem $S(M)$ podmnožina množine $M$ bio induktivan za $M$?*

*Rešenje ovog problema i njegovih uopštenja, kao i primene dobijenih rezultata, jeste glavni cilj ove rasprave.*

**1. 3.** Da bi se izbegle raznovrsne interpretacije pojedinih termina, sve glavnije definicije biće eksplicite formulisane. Takođe, radi preglednosti pri dokazivanju originalnih stavova, navešćemo i neke poznate stavove. U toku dokazivanja nećemo se, tamo gde je to razumljivo po sebi, baš uvek pozivati na sve stavove.

Cela rasprava sadrži pored uvodnog još osam odeljaka (2—9). U drugom odeljku se navode potrebne definicije i stavovi koji će poslužiti za dokaz jedne od osnovnih teorema, a kojoj je posvećen treći odeljak. Četvrti odeljak se bavi induktivnim sistemima, pri čemu su uvedeni još neki novi pojmovi. U petom primenjuju se dobijeni rezultati uglavnom na uređene množine. Tu ima i originalnih rezultata, ali je i na već poznatim rezultatima ilustrovana teorija induktivnih sistema. Šesti, sedmi i osmi odeljak sadrže nove formulacije principa indukcije i uopštenja pojma induktivnog sistema. Deveti odeljak sadrži jedan stav karakterističan za konačne množine, a pored toga tu se određuje mesto stava **CCT** 4. 1. 2 u sistemu GÖDEL-ovih aksioma za teoriju množina.

Svaki odeljak je podeljen na paragrafe a numeracija je poziciona. Za izvesne pojmove su upotrebljene skraćenice: **A**-*aksioma*, **D**-*definicija*, **Pr**-*propozicija*, **L**-*lema*, **T**-*teorema*, **C** (uz oznaku onog stava iz koga sleduje) — *posledica*, **P**-*problem*. Ako su u nekom od ovih iskaza navedene tačke pod rednim brojem, onda, pri pozivu na neku tačku, pored njenog rednog broja navodi se u zagradi oznaka iskaza. Na primer 2 (**Pr** 1. 2. 2) znači da se radi o uslovu 2 *propozicije* 1. 2. 2.

Najzad brojevi u zagradi uglastoj odnose se na spisak literature koji je na kraju teksta. Masno otštampani pretstavljaju redni broj u spisku, a ostali strane u delu koje je navedeno pod prvim brojem. Ako stoji [**2**, 36; **12**, 73, 82—96] to znači da se radi o raspravama pod brojevima 2 i 12, dok ostali brojevi pretstavljaju strane u tim raspravama.

---

* Vidi stav CCT 4. 1. 2.

## 2. POMOĆNI STAVOVI

**2. 1.** Najpre ćemo objasniti upotrebu nekih simbola i operatora.

Ako je $p$ neka propozicija, onda je $\sim p$ njena negacija. Ako je $\rho$ binarna relacija, izrazi $x, y, \cdots \rho\, A$ i $A\, \rho\, x, y, \cdots$ ekvivalentni su sistemu relacija $x \rho A$, $y \rho A, \cdots$, odnosno $A \rho x$, $A \rho y, \cdots$. Tako, na primer, izraz $x, y, z \in A$ ekvivalentan je sistemu $x \in A, y \in A, z \in A$.

Neka je $\rho$ binarna relacija definisana u množini $S$. Ako je $a \in S$ i $A \subseteq S$, onda relacija $a \rho \cdot A$ (ili $A \cdot \rho a$) znači da je za svako $x \in A$ i $a \rho x$ (ili $x \rho a$), tj. $a \rho \cdot A = \underset{x \in A}{\mathrm{U}} \{a \rho x\}$ (ili $A \cdot \rho a = \underset{x \in A}{\mathrm{U}} \{x \rho a\}$). Takođe, ako je $A, B \subseteq S$ imamo da je $A \cdot \rho \cdot B = \underset{x \in A,\, y \in B}{\mathrm{U}} \{x \rho y\}$. Na primer relacija $\{x, y, z\} \cdot \in A$ ekvivalentna je relaciji $x, y, z \in A$. Dakle tačka u ovom slučaju pretstavlja operator koji vrši „dezintegraciju" ili, još bolje, „atomiziranje" množine uz koju je; stoga je možemo nazvati *atomizatorom*.

Ako je $o$ proizvoljan operator a $A$ ma kakva množina, na čije se elemente on može primeniti, onda će izraz $o \cdot A$ značiti isto što i $\underset{x \in A}{\mathrm{U}} \{o\, x\}$, tj. množinu elemenata $o\, x$, $x \in A$. Tako, na primer, relacija $A \cdot < a$ pretstavlja množinu svih relacija $x < a$, pri čemu je $x \in A$. Međutim $\sim \cdot (A \cdot < a)$ pretstavlja množinu čiji su elementi relacije $\sim (x < a)$, gde je $x \in A$. Slično značenje imaju i operatori $\cdot o, \cdot o \cdot$.

**2. 2.** Sada ćemo dati neke osnovne definicije.

**D** 2. 2. 1. *Relacijom reda $\leqslant$ naziva se svaka binarna relacija, definisana u izvesnoj množini $A$, ako su za $x, y, z \in A$ zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. $x \leqslant x$;
2. *iz* $x \leqslant y$, $y \leqslant z$ *sleduje* $x \leqslant z$;
3. *iz* $x \leqslant y$, $y \leqslant x$ *sleduje* $x = y$.

*Relacije $x \leqslant y$ i $y \geqslant x$ su ekvivalentne, a $x < y$ $(y > x)$ ekvivalentno je sistemu relacija $x \leqslant y$ $(y \geqslant x)$ i $x \neq y$. Ako je jednovremeno $\sim (x \leqslant y)$ i $\sim (y \leqslant x)$, kaže se da su elementi $x$ i $y$ neuporedivi, i beleži se $x \parallel y$.*

Iz definicije relacije neuporedivosti lako se vidi da je $\sim (x \parallel x)$, dalje da $x \parallel y$ povlači $y \parallel x$, i da nije tranzitivna. Kao što je poznato, relacije $\subseteq$, $\supseteq$ su takođe relacije reda.

**D** 2. 2. 2. *Relacija $x\, c\, y$ znači da je bar jedna od relacija $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$ ispunjena. $c$ je relacija uporedivosti.*

Napomenimo da je ova relacija refleksivna, simetrična ali ne i tranzitivna. Jasno je da su relacije $x \parallel y$ i $\sim (x\, c\, y)$ ekvivalentne.

**D** 2. 2. 3. *Množina $A$, u kojoj je definisana izvesna relacija reda, naziva se uređenom množinom. Ako je $A \cdot c \cdot A$, mno-*

*žina $A$ je potpuno uređena. Ako pak sistem relacija $x, y \in A$ i $x \neq y$ povlači uvek $x \parallel y$, $A$ je neuređena množina.*

Praznu množinu i množinu od jednog elementa možemo smatrati i kao potpuno uređene i kao neuređene množine.

**D** 2. 2. 4. *Neka je $A$ uređena množina. Elemenat $a \in A$ naziva se gornjim (donjim)* ivičnim elementom ako je za svako $x \in A$ takođe $\sim (a < x)$ $(\sim (x < a))$, tj. ako je $\sim \cdot (a < \cdot A)$ $(\sim \cdot (A \cdot < a))$. Ako je pak $A \cdot \leqslant a$ $(a \leqslant \cdot A)$, onda je $a$ završni (početni) elemenat množine $A$. Elementi koji nisu ivični nazivaju se unutrašnjim. Početni i završni elementi nazivaju se i krajnjim.*

Ako su u nekoj množini definisane izvesne ralacije, onda one određuju njenu *strukturu*. Ubuduće, kad god je reč o podmnožini $B$ neke množine $A$ sa izvesnom strukturom, smatraćemo da je i njena struktura potpuno određena relacijama koje definišu strukturu množine $A$. Tako, na primer, podmnožina $B$ uređene množine $A$ je uređena množina i to tako da za svaka dva elementa $x, y \in B$ važi isti uređajni odnos kao i u množini $A$. Isto tako $B$ je *prava podmnožina* od $A$, ako je $\Lambda \subset B \subset A$.

**D** 2. 2. 5. *Neka je $B \subseteq A$, gde je $A$ uređena množina. Svaki elemenat $a \in A$, za koji je $B \cdot \leqslant a$ $(a \leqslant \cdot B)$, naziva se gornjom (donjom) granicom ili majorantom (minorantom) množine $B$ u množini $A$. Ako množina majoranata (minoranata) ima donji (gornji) ivični elemenat, onda se on naziva supremumom (infimumom) množine $B$ u množini $A$, i beleži se $\sup_A B$ $(\inf_A B)$.*

**D** 2. 2. 6. *Potpuno uređena (neuređena) podmnožina $B$ uređene množine $A$, naziva se lancem (prevojem) množine $A$. Ako za svaki lanac (prevoj) $C \subseteq A$ relacija $B \subseteq C$ povlači relaciju $B = C$, $B$ je maksimalan lanac (prevoj).*

Ako je $F$ množina svih lanaca neke uređene množine, lako je uočiti da su maksimalni lanci gornji ivični elementi od $F$. Jasno je takođe da je svaka podmnožina potpuno uređene množine $A$ lanac, dok je $A$ maksimalan lanac. Najzad napomenimo da ćemo sistem množina, potpuno uređen relacijom inkluzije, nazivati još i *monotonom porodicom*** množina.

**2. 3.** Sada navodimo pomoćne stavove, od kojih izvesne, zbog njihove očevidnosti, nećemo dokazivati.

**L** 2. 3. 1. *Ako je $F$ sistem množina, relacija $A \in F$ povlači relacije $A \subseteq \bigcup_{X \in F} X$ i $A \supseteq \bigcap_{X \in F} X$.*

**L** 2. 3. 2. *Ako je $F \cdot \subseteq A$ $(A \subseteq \cdot F)$, pri čemu je $F$ izvestan sistem množina, onda je $\bigcup_{X \in F} X \subseteq A$ $(\bigcap_{X \in F} X \supseteq A)$.*

---

*) Čitanjem izraza u zagradi, namesto termina pred zagradom, dobijaju se dualni stavovi.

** Termini *sistem*, *porodica* imaju isto značenje kao i termin množina, a upotrebljavaće se obično za množine čiji su elementi takođe množine.

L 2. 3. 3. *Za svaki sistem množina $F$, sa završnim (početnim) elementom $X'$, važi relacija $\bigcup_{X\in F} X = X'$ ($\bigcap_{X\in F} X = X'$). Obrnuto ako za $X' \in F$ važi relacija $\bigcup_{X\in F} X = X'$ ($\bigcap_{X\in F} X = X'$), $X'$ je završni (početni) elemenat od $F$.*

L 2. 3. 4. *Ako za sistem množina $F$ važi relacija $\sim (X' \in F)$, pri čemu je $X' = \bigcup X$ ($X' = \bigcap X$), onda $F$ nema završnog (početnog) elementa. Ako je pored toga $F$ monotona porodica, onda za svako $X_1 \in F$ postoji $X_2 \in F$ za koje je $X_1 \sqsubset X_2$ ($X_2 \sqsubset X_1$).*

*Dokaz.* Kada bi $F$ imalo završnog (početnog) elementa, to bi, na osnovu L 2. 3. 3, bio elemenat $X'$ koji međutim ne pripada množini $F$. Dakle $F$ nema završnog (početnog) elementa. Neka je sada $F$ monotona porodica množina i $X_1 \in F$. Pošto $X_1$ nije završni (početni) elemenat od $F$, postoji elemenat $X_2$ za koji je $\sim (X_2 \sqsubseteq X_1)$ ($\sim (X_1 \sqsubseteq X_2)$), a zbog monotonosti $X_1 \sqsubset X_2$ ($X_2 \sqsubset X_1$).

L 2. 3. 5. *Ako u uređenoj množini $A$ svaki lanac ima supremum (infimum) u $A$, množina $A$ ima bar jedan gornji (donji) ivični elemenat.*

To je tako zvana ZORN-ova lema. Dokaza ima više [6, 42; 7, 110—113; 8, 434—438; 9, 174—176] i većina se pojavila poslednjih godina, ma da ju je M. ZORN formulisao, nešto drukčije, još 1935 godine [10, 667—670]. Svi dokazi pretpostavljaju *aksiomu izbora*.

L 2. 3. 6. *Za svaku monotonu porodicu $F$ lanaca uređene množine $A$, množine $\bigcup_{X\in F} X = X'$ je takođe lanac.*

Dokaz je jednostavan.

L 2. 3. 7. *Neka je $S(A)$ izvestan sistem podmnožina množine $A$. Za svako $F \sqsubseteq S(A)$, za koje je $\bigcup_{X\in F} X = X' \in S(A)$ ($\bigcap_{X\in F} X = X' \in S(A)$), važi relacija $sup_{S(A)} F = X'$ ($inf_{S(A)} F = X'$).*

*Dokaz.* Da je $X'$ majoranta (minoranta) za $F$ u $S(A)$ — to je očevidno. Ako $X'$ nije supremum (infimum), onda nije ni donji (gornji) ivični elemenat množine svih majoranata (minoranata) od $F$; dakle postoji majoranta (minoranta) $X'' \in S(A)$ takva da je $X'' \sqsubset X'$ ($X' \sqsubset X''$). Kako je $F \cdot \sqsubseteq X''$ ($X'' \sqsubseteq \cdot F$), iz L 2. 3. 2 imamo $\bigcup_{X\in F} X \sqsubseteq X''$ ($X'' \sqsubseteq \bigcap_{X\in F} X$), odnosno $X' \sqsubseteq X''$ ($X'' \sqsubseteq X'$), što protivreči relaciji $X'' \sqsubset X'$ ($X' \sqsubset X''$). Dakle tvrđenje leme je tačno.

CL 2. 3. 7. *Za svaki sistem $F \sqsubseteq P(A)$, gde je $A$ proizvoljna množina, važi relacija $sup_{P(A)} F = \bigcup_{X\in F} X$.*

Dokaz ovog stava može se i direktno sasvim jednostavno izvesti.

L 2. 3. 8. *Svaki lanac $B$ uređene množine $A$ podmnožina je bar jednog maksimalnog lanca.*

Ovaj stav utvrđuje egzistenciju maksimalnih lanaca u uređenim množinama. Dokaz postoji kod HAUSDORFF-a [3, 140—141] i kod drugih [11, 676—677], i pretpostavlja mogućnost dobrog uređenja, odnosno aksiomu izbora. Mi ćemo ga izvesti iz prethodnih stavova.

*Dokaz.* Neka je $S(A)$ sistem svih lanaca $X \subseteq A$ za koje je $B \subseteq X$. Množina $S(A)$ je uređena relacijom $\subseteq$, i $B$ je njen početni elemenat, tj. $B \subseteq \cdot S(A)$. Neka je dalje $C$ proizvoljan lanac od $S(A)$, tj. $C$ je monotona porodica lanaca od $A$. Prema **L** 2. 3. 6 $\bigcup X = X'$ je lanac od $A$, odnosno $X' \in S(A)$ a zbog **L** 2. 3. 7 imamo $X' = sup_{S(A)} C$. Dakle za svaki lanac $C$ postoji supremum u $S(A)$, te zbog **L** 2. 3. 5 postoji bar jedan gornji ivični elemenat $D$ u $S(A)$. Iz $D \in S(A)$ sleduje $B \subseteq D$, čime je stav dokazan.

**CL** 2. 3. 8. *Svaki elemenat neke uređene množine pripada bar jednom maksimalnom lancu.*

Ovo je neposredna posledica prethodnog stava.

**L** 2. 3. 9. *Ako je $x$ elemenat uređene množine $A$, a $B$ njen maksimalan lanac, relacija $x \subset \cdot B$ povlači relaciju $x \in B$.*

Stav je očevidan.

Ubuduće ćemo *partitivnu množinu (množinu svih podmnožina)* množine $A$ obeležavati sa $P(A)$.

Sada ćemo dokazati jednu, za naš cilj, vrlo važnu lemu:

**L** 2. 3. 10. *Neka je $B \subset A$, $S(A) \subseteq P(A)$ i $S'(A) = S(A) \cap P(B)$, pri čemu je $A$ proizvoljna množina. Ako je $F$ maksimalan lanac od $S'(A)$, za koji je $\bigcup_{X \in F} X = X' \in S(A)$, tada je $X' \in F$. $X'$ je završni elemenat od $F$ i za svako $X'' \in S(A)$ relacija $X' \subset X''$ povlači relaciju $\sim (X'' \subseteq B)$.*

*Dokaz.* Iz $F \subseteq S'(A)$ sleduje $F \subseteq S(A)$, $P(B)$. Iz poslednje relacije izlazi $\bigcup_{X \in F} X = X' \in P(B)$, a kako je prema uslovu same leme $X' \in S(A)$, dobija se $X' \in S'(A)$. Pošto je $F$ maksimalan lanac od $S'(A)$, a kako je $F \cdot \subseteq X'$, zbog **L** 2. 3. 9 imamo $X' \in F$. Iz **L** 2. 3. 3 sleduje da je $X'$ završni elemenat od $F$. Neka je dalje $X'' \in S(A)$ a takođe $X' \subset X''$. Ako bi bilo $X'' \subseteq B$ (protivno tvrđenju leme), imali bi $X'' \in P(B)$ pa i $X'' \in S'(A)$. S obzirom da je $F \cdot \subseteq X''$, dobija se $X'' \in F$ i $X'' \subseteq \bigcup_{X \in F} X = X'$, odnosno $X'' \subseteq X'$, što protivreči činjenici da je $X' \subset X''$. Dakle pretpostavka da je $X'' \subseteq B$ neodrživa je, te je $\sim (X'' \subseteq B)$, čime je lema u potpunosti dokazana.

**L** 2. 3. 11. *Ako sistem množina $S$ sadrži bar jednu nepraznu množinu, tada i svaki njegov maksimalan lanac sadrži bar jedan neprazan elemenat.*

**L** 2. 3. 12. *Ako sistem množina $S$ sadrži bar jednu nepraznu množinu, tada je svaki njen gornji ivični elemenat neprazan.*

Obe su leme očevidne.

**2. 4.** Ovde ćemo dati neke stavove u vezi sa operatorom $P$.

**L** 2. 4. 1. *Ma kakve bile množine $A$ i $B$, uvek je $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$.*

**L** 2. 4. 2. *Ako je $S(A)$ izvestan sistem podmnožina od $A$, a $B$ proizvoljna množina, onda je $S(A) \cap P(B) = S(A) \cap P(A \cap B)$.*

*Dokaz.* Iz $X \in S(A) \cap P(B)$ sleduje $X \subseteq A \cap B$, odnosno $X \in P(A \cap B)$ i najzad $X \in S(A) \cap P(A \cap B)$, odakle se dobija

$$S(A) \cap P(B) \subseteq S(A) \cap P(A \cap B). \tag{2. 4. 1}$$

S obzirom da je $A \cap B \subseteq B$, sleduje $P(A \cap B) \subseteq P(B)$ i $S(A) \cap P(A \cap B) \subseteq S(A) \cap P(B)$, što sa (2. 4. 1) potvrđuje tačnost leme.

## 3. OSNOVNI STAV

**3. 1.** Pre no što izložimo osnovni rezultat, koji nam daje opšte rešenje postavljenog problema, navešćemo jedan nužan uslov za induktivnost sistema. U vezi sa tim imamo sledeću definiciju:

**D** 3. 1. 1. *Sistem množina $S$ naziva se prekrivačem množine $A$, ako je zadovoljena relacija $A \subseteq \bigcup_{X \in S} X$. Kaže se još i da $S$ prekriva množinu $A$.*

Sada imamo sledeći očevidan stav:

**T** 3. 1. 1. *Da bi izvestan sistem $S(M)$ podmnožina množine $M$ bio induktivan, nužno je da prekriva $M$.*

Jasno je da je u ovom slučaju $\bigcup_{X \in S(M)} X = M$. — Ovaj uslov, naravno, u opštem slučaju nije dovoljan.

**3. 2.** Sada prelazimo na dokaz osnovnog stava.

**T** 3. 2. 1. *Da bi sistem $S(M)$ podmnožina množine $M$, koji prekriva $M$, bio induktivan, nužno je i dovoljno da, ma kakva bila množina $D \subset M$, sistem $S'(M) = S(M) \cap P(D)$, ukoliko nije prazan, sadrži bar jedan maksimalan lanac $F$ za koji je $\bigcup_{X \in F} X = X' \in S(M)$.*

*Dokaz.* Uslov je nužan. Neka je $S(M)$ induktivan sistem, ali pretpostavimo da uslov stava ipak nije zadovoljen. Postoji dakle bar jedna množina

$$N \subset M \tag{3. 2. 1}$$

takva da je

$$S'(M) = S(M) \cap P(N) \supset \Lambda \tag{3. 2. 2}$$

ali da pri tome ni za jedan maksimalan lanac $F$ od $S'(M)$ ne važi relacija $\bigcup_{X \in F} X' \in X' \in S(M)$. Dakle za svaki maksimalan lanac $F$ od $S'(M)$ imamo

(3. 2. 3) $\qquad\qquad \sim (X' \in S(M)),$

gde je $X' = \bigcup_{X \in F} X$. Sada ćemo pokazati da množine $M$ i $N$ zadovoljavaju oba uslova iz **Pr** 1. 2. 2. Doista iz (3. 2. 2) sleduje da postoji bar jedna množina $A \in S'(M)$ koja zadovoljava uslove $A \subseteq M$, $A \subseteq N$. Dalje $S'(M)$ mora sadržati bar jedan neprazan elemenat. Doista ako ne sadrži nijedan takav elemenat, pošto $S'(M)$ nije prazno, imali bi $S'(M) = \{\Lambda\}$. Ali tada se za maksimalan lanac $F = \{\Lambda\}$ dobija $\bigcup_{X \in F} X = \Lambda \in S'(M)$, odnosno $\Lambda \in S'(M)$, što protivreči pretpostavci (3. 2. 3) (jer je $X' = \Lambda$). Dakle postoji elemenat $A$ koji zadovoljava uslov 1 (**Pr** 1. 2. 2).

Neka je dalje $B \in S(M)$ množina za koju je

(3. 2. 4) $\qquad\qquad \Lambda \subset B \subset M, \; B \subseteq N.$

Pošto iz $B \subseteq N$ sleduje $B \in P(N)$, imamo $B \in S'(M)$. Prema **CL** 2. 3. 8 $B$ pripada bar jednom maksimalnom lancu $F$ od $S'(M)$, a zbog učinjene pretpostavke za $X' = \bigcup_{X \in F} X$ važi relacija (3. 2. 3), pa dakle i relacija $\sim (X' \in F)$. Odavde, na osnovu *leme* 2. 3. 4, sleduje da postoji množina $C \in F$, takva da je $B \subset C$. Očevidno je takođe

(3. 2. 5) $\qquad\qquad B \subset C \subseteq M, \; C \subseteq N.$

Na taj način iz pretpostavke da postoji množina $B$ koja zadovoljava relacije (3. 2. 4), sleduje da postoji i množina $C$ koja zadovoljava relacije (3. 2. 5), što znači da je i uslov 2 (**Pr** 1. 2. 2) ispunjen. Međutim, zbog induktivnosti sistema $S(M)$, sledovalo bi $M \subseteq N$, što protivreči relaciji (3. 2. 1). Dakle uslov stava je nužan.

Uslov je dovoljan. Neka je zadovoljen uslov stava i neka su takođe ispunjeni uslovi iz Pr 1. 2. 2 za sistem $S(M)$; pretpostavimo da je ipak

(3. 2. 6) $\qquad\qquad \sim (M \subseteq N),$

tj. da $S(M)$ nije induktivan sistem za $M$. Odavde sleduje

(3. 2. 7) $\qquad\qquad M \cap N = D \subset M, \; D \subseteq N,$

a s obzirom na uslov 1 (**Pr** 1. 2. 2) postoji elemenat $A \in S(M)$ za koji je $\Lambda \subset A \subseteq D$, odnosno $A \in P(D)$ i najzad $A \in S'(M) = S(M) \cap P(D)$, što znači da $S'(M)$ sadrži bar jedan neprazan elemenat. Prema pretpostavci postoji bar jedan maksimalan lanac $F$ od $S'(M)$, za koji je $\bigcup_{X \in F} X = X' \in S(M)$, a zbog prvog dela *leme* 2. 3. 10 $X' \in F$. Zbog **L** 2. 3. 1 svaki maksimalan lanac od $S'(M)$ mora sadržati bar jedan neprazan elemenat, iz čega sleduje da je i $X'$ neprazno. Odavde, a pošto je takođe $X' \subseteq D$, imamo s obzirom na (3. 2. 7) $\Lambda \subset X' \subset M$ i $X' \subseteq N$. Na osnovu uslova 2 (**Pr** 1. 2. 2) sleduje da postoji elemenat $X'' \in S(M)$ takav da je $X' \subset X'' \subseteq M$ i $X'' \subseteq N$, odakle se dobija $X'' \subseteq M \cap N = D$, odnosno

$$(3.\ 2.\ 8) \qquad X'' \subseteq D.$$

Međutim, prema drugom delu *leme* 2. 3. 10, za svako $X''$, za koje je $X' \subset X''$, sleduje $\sim (X'' \subseteq D)$, što protivreči relaciji (3. 2. 8). Zbog ovoga pretpostavka (3. 2. 6) je neodrživa, sistem $S(M)$ je induktivan, a uslov stava je dovoljan. Ovim je stav u celosti dokazan.

S obzirom na **CL** 2. 3. 7, ovaj se stav može ovako formulisati:

**T** 3. 2. 2. *Da bi sistem* $S(M)$ *podmnožina množine* $M$, *koji prekriva* $M$, *bio induktivan, nužno je i dovoljno da, ma kakva bila množina* $D \subseteq M$, *sistem* $S'(M) = S(M) \cap P(D)$, *ukoliko nije prazan, sadrži bar jedan maksimalni lanac* $F$ *za koji je* $\sup_{P(M)} F \in S(M)$.

**3. 3.** Pri dokazu osnovnog stava pretpostavlja se da u svakoj uređenoj množini postoje maksimalni lanci. I doista njihova egzistencija je dokazana (**L** 2. 3. 8), ali u opštem slučaju samo pod pretpostavkom važenja aksiome izbora. Zbog toga važenje *teoreme* 3. 2. 1 (odnosno 3. 2. 2) izgledalo bi da zavisi od ove aksiome. Međutim pokazaćemo da nije tako i daćemo novu formulaciju osnovnog stava:

**T** 3. 3. 1. *Da bi sistem* $S(M)$ *podmnožina množine* $M$, *koji prekriva* $M$, *bio induktivan, nužno je i dovoljno da ma kakva bila množina* $D \subset M$, *sistem* $S'(M) = S(M) \cap P(D)$, *ukoliko nije prazan, sadrži bar jedan gornji ivični elemenat.*

Najpre ćemo izvesti dokaz služeći se *teoremom* 3. 2. 1. Uslov je nužan. Doista ako je sistem $S(M)$ induktivan, onda prema **T** 3. 2. 1 za svako $D \subset M$ postoji u $S'(M) = S(M) \cap P(D) \supset \Lambda$ maksimalan lanac $F$ za koji je $\bigcup_{X \in F} X = X' \in S(M)$. Pokazaćemo da je $X'$ gornji ivični elemanat od $S'(M)$. Najpre je zbog **L** 2. 3. 10 $X' \in F$. Ako $X'$ nije gornji ivični elemenat, postoji elemenat

$$(3.\ 3.\ 1) \qquad X'' \in S'(M)$$

za koji je $X' \subset X''$. Međutim, opet na osnovu L 2. 3. 10, imamo $\sim (X'' \subseteq D)$, odnosno $\sim (X'' \in P(D))$, i najzad $\sim (X'' \in S'(M))$, što protivreči relaciji (3. 3. 1). Dakle uslov je nužan.

Uslov stava je dovoljan. Ako je $X'$ gornji ivični elemenat od $S'(M) \supset \Lambda$, onda za svaki maksimalan lanac $F$ od $S'(M)$, koji sadrži $X'$, važi relacija $\bigcup_{X \in F} X = X'$, jer u suprotnom slučaju $X'$ ne bi bilo gornji ivični elemenat. Dakle prema **T** 3. 2. 1 $S(M)$ je induktivan sistem.

Sada ćemo izvesti direktan dokaz, koji neće pretpostavljati egzistenciju maksimalnih lanaca, a ni važenje aksiome izbora.

Uslov je nužan. Neka je $S(M)$ induktivan sistem za množinu $M$, ali pretpostavimo da uslov iz **T** 3. 3. 1 nije zadovoljen, tj. da postoji množina

$$N \subset M \tag{3. 3. 2}$$

takva da sistem $S'(M) = S(M) \cap P(N) \supset \Lambda$ nema nijednog gornjeg ivičnog elementa. Sada ćemo pokazati da su uslovi iz **Pr** 1. 2. 2 zadovoljeni. Pošto $S'(M)$, prema pretpostavci, nije prazan sistem, postoji bar jedan elemenat $A \in S'(M)$, koji zadovoljava uslove $A \subseteq M$ i $A \subseteq N$. Dalje $S'(M)$ mora da sadrži bar jedan neprazan elemenat. Doista u suprotnom slučaju bilo bi $S'(M) = \{\Lambda\}$, odakle je očevidno da je $\Lambda \in S'(M)$ gornji ivični elemenat, što protivreči pretpostavci. Dakle postoji elemenat $A \in S'(M)$, koji zadovoljava uslov 1 (**Pr** 1. 2. 2).

Neka je dalje $B \in S'(M)$ množina koja zadovoljava relacije

$$\Lambda \subset B \subset M, \quad B \subseteq N. \tag{3. 3. 3}$$

Iz $B \subseteq N$ sleduje $B \in P(N)$, pa dakle i $B \in S'(M)$. Pošto $B$ nije gornji ivični elemenat od $S'(M)$, postoji bar jedna množina $C \in S'(M)$ za koju je $B \subset C$, odnosno

$$B \subset C \subseteq M, \quad C \subseteq N. \tag{3. 3. 4}$$

Dakle iz pretpostavke (3. 3. 3) sleduje da postoji množina $C$ koja zadovoljava relacije (3. 3. 4), što znači da je i uslov 2 (**Pr** 1. 2. 2) zadovoljen. Međutim, zbog induktivnosti sistema $S(M)$, imali bi $M \subseteq N$, što protivreči relaciji (3. 3. 2). Dakle uslov stava je nužan.

Uslov je dovoljan. Neka je zadovoljen uslov iz **T** 3. 3. 1 i neka su takođe ispunjeni uslovi iz **Pr** 1. 2. 2 za elemente sistema $S(M)$, ali pretpostavimo da je ipak

$$\sim (M \subseteq N), \tag{3. 3. 5}$$

tj. da $S(M)$ nije induktivan sistem. Odavde sleduje

$$M \cap N = D \subset M, \quad D \subseteq N, \tag{3. 3. 6}$$

a s obzirom na uslov 1 (**Pr** 1. 2. 2) postoji elemenat $A \in S(M)$ za koji je $\Lambda \subset A \subseteq D$, odnosno $A \in P(D)$, pa najzad i $A \in S'(M) = S(M) \cap P(D)$, što znači da $S'(M)$ sadrži bar jedan neprazan elemenat. Prema pretpostavci samoga stava $S'(M)$ sadrži bar jedan gornji ivični elemenat $B$ koji, zbog **L** 2. 3. 12, nije prazan. Dakle odavde i iz (3. 3. 6) imamo da za $B$ važe relacije $\Lambda \subset B \subset M$, $B \subseteq N$. Na osnovu uslova 2 (**Pr** 1. 2. 2) sleduje da postoji elemenat $C \in S(M)$ za koji je

$$B \subset C \subseteq M, \quad C \subseteq N, \tag{3. 3. 7}$$

odakle se dobija $C \subseteq M \cap N = D$, odnosno $C \subseteq D$. Odavde imamo $C \in P(D)$, zatim $C \in S'(M)$. Kako je $B$ gornji ivični elemenat, sledovalo bi $\sim (B \subset C)$, što protivreči prvoj od relacija (3. 3. 7). Zbog ovoga pretpostavka (3. 3. 5) je neodrživa, sistem $S(M)$ je induktivan, a uslov stava je dovoljan. Ovim je *teorema* 3. 3. 1 u celosti dokazana.

Napomenimo da će, pri ispitivanju induktivnosti nekog sistema, biti upotrebljavan kako kriterijum izražen *teoremom* 3. 2. 1 tako i onaj izražen *teoremom* 3. 3. 1, prema tome koji je u konkretnom slučaju pogodniji.

**3. 4.** Uvešćemo neke nove definicije koje će nam omogućiti uprošćavanje formulacije osnovnog stava.

**D** 3. 4. 1. *Neka je $S(M)$ proizvoljan sistem podmnožina množine M. Potsistem $S'(M) = S(M) \cap P(D)$, gde je $D \subseteq M$, nazivaćemo vezanim za D, a D bazom potsistema.*

**D** 3. 4. 2. *Sistem $S(M)$ podmnožina množine M, čiji svaki neprazan potsistem, vezan za proizvoljnu množinu $D \subset sup_{P(M)} S(M)$, ima bar jedan gornji ivični elemenat, naziva se potencijalnim sistemom za množinu M.*

Sada ćemo kriterijum induktivnosti formulisati ovako:

**T** 3. 4. 1. *Da bi sistem $S(M)$ podmnožina množine M bio induktivan, nužno je i dovoljno da je potencijalan za množinu M i da je prekriva.*

Napomenimo da u *teoremama* 3. 2. 1, 3. 2. 2 i 3. 3. 1 stoji $D \subset M$ umesto $D \subset sup_{P(M)} S(M)$, što je isto s obzirom da $S(M)$ prekriva $M$, jer je tada $sup_{P(M)} S(M) = M$ (**CL** 2. 3. 7).

Kao specijalan slučaj navodimo stav:

**T** 3. 4. 2. *Da bi potpuno uređen sistem $S(M)$ podmnožina množine M bio potencijalan, nužno je i dovoljno da je za svaki lanac F, ukoliko je neprazan, $sup_{P(M)} F \in S(M)$ samo ako je $sup\, F \neq sup_{P(M)} S(M)$.*

*Dokaz.* Uslov je nužan. Neka je $S(M)$ potencijalni sistem za $M$, $F \subseteq S(M)$ proizvoljan neprazan lanac za koji je

$$(3.\ 4.\ 1) \qquad sup_{P(M)} F = D \subset sup_{P(M)} S(M).$$

Zbog potencijalnosti sistema $S(M)$, sistem

$$(3.\ 4.\ 2) \qquad S'(M) = S(M) \cap P(D)$$

ima bar jedan gornji ivični elemenat koji je jednovremeno i završni elemenat potpuno uređene množine $S'(M)$, tj. elemenat $sup_{S'(M)} S'(M) = sup_{P(M)} S'(M)$. Odavde je

$$(3.\ 4.\ 3) \qquad sup_{P(M)} S'(M) \in S(M).$$

Pošto je iz (3. 4. 1) $F \cdot \subseteq D$, odnosno $F \subseteq P(D)$, sleduje $F \subseteq S'(M)$, a zbog (3. 4. 2) $F \subseteq S'(M) \subseteq P(D)$. Odavde imamo $sup_{P(M)} F \subseteq sup_{P(M)} S'(M) \subseteq sup_{P(M)} P(D)$, odnosno $D \subseteq sup_{P(M)} S'(M) \subseteq D$, odakle je zbog (3. 4. 3) i (3. 4. 1) $sup_{P(M)} F \in S(M)$, što je trebalo i dokazati.

Uslov je dovoljan. Doista za $D \subset sup_{P(M)} S(M)$ imamo potpuno uređenu množinu $S'(M) = S(M) \cap P(D)$ za koju je $sup_{P(M)} S'(M) \in S(M)$ ukoliko je $S'(M) \supset \Lambda$. Kako iz $S'(M) \subseteq P(D)$ sleduje $sup_{P(M)} S'(M) \subseteq sup_{P(M)} P(D) = D$, imamo i $sup_{P(M)} S'(M) \in P(D)$, odnosno $sup_{P(M)} S'(M) \in S'(M)$, što znači da je $sup_{P(M)} S'(M)$ gornji ivični elemenat u $S'(M)$ i da je sistem $S(M)$ potencijalan.

## 4. INDUKTIVNI SISTEMI

**4. 1.** Iz dosadašnjeg izlaganja izlazi da je za problem matematičke indukcije pojam potencijalnog sistema od naročitog značaja, i prema tome proučavanje tih sistema ima veliku važnost.

Navešćemo neke vrlo opšte induktivne sisteme. Najpre dajemo sledeće definicije:

**D** 4. 4. 1. *Sistem $S(A)$ podmnožina množine $A$ naziva se neprekidnim ako za svaki njegov lanac $F$ iz relacije $X' = sup_{P(A)} F \neq sup_{P(A)} S(A)$ sleduje $X' \in S(A)$.*

**D** 4. 1. 2. *Sistem $S$ proizvoljnih množina naziva se apsolutno zatvorenim u odnosu na operator* U, *ako je za svako $F \subseteq S$ i $\bigcup_{X \in F} X \in S$.*

Sada imamo sledeće stavove:

**T** 4. 1. 1. *Svaki neprekidan sistem $S(M)$ podmnožina množine $M$ potencijalan je za $M$.*

*Dokaz.* Neka je $S'(M) = S(M) \cap P(D)$, pri čemu je $D \subset sup_{P(M)} S(M)$. Lako se dokazuje da je za svaki maksimalan lanac $F$ od $S'(M)$, zbog $sup_{P(M)} F \neq sup_{P(M)} S(M)$, $sup_{P(M)} F$ gornji ivični elemenat od $S'(M)$.

**CT** 4. 1. 1. *Svaki neprekidan sistem $S(M)$ podmnožina množine $M$, koji prekriva $M$, induktivan je za $M$.*

**T** 4. 1. 2. *Svaki sistem $S(M)$ podmnožina množine $M$, apsolutno zatvoren u odnosu na operator* U, *potencijalan je za množinu $M$.*

*Dokaz.* Jasno je da je za svaki sistem $S'(M) = S(M) \cap P(D)$, $D \subseteq M$, množina $\bigcup_{X \in S'(M)} X$ njegov gornji ivični elemenat.

**CT** 4. 1. 2. *Svaki sistem $S(M)$ podmnožina množine $M$ koji prekriva $M$, apsolutno zatvoren u odnosu na operator* U, *induktivan je za $M$.*

W. SIERPIŃSKI [22, 165] navodi specijalan slučaj kada je $S(M)$ potpuno uređena množina. Tu je za $S(M)$ upotrebljen termin *„potpuno aditivan sistem"*.

**CCT** 4. 1. 2. *Partitivna množina $P(M)$ proizvoljne množine $M$ induktivan je sistem za $M$* (vidi direktan dokaz [5, 110—111]).

**T** 4. 1. 3. *Svaki konačan sistem $S(M)$ podmnožina množine $M$ potencijalan je a u koliko prekriva $M$, takođe induktivan za $M$.*