Sleduje iz činjenice da svaki konačan ststem ima gornjih ivičnih elemenata.

Kao specijalan slučaj imamo da je svaki sistem $\{A\}$, pri čemu je $A \sqsubseteq M$, potencijalan, a prema tome sistem $\{M\}$ je induktivan za M.

Najzad imamo stav:

T 4. 1. 4. *Svaki potsistem $S'(M)$ potencijalne množine $S(M)$, vezan za množinu $A \sqsubseteq M$, takođe je potencijalan za M.*

Dokaz. Pošto je $S'(M) = S(M) \cap P(A)$, za proizvoljnu množinu $D \sqsubset sup_{P(M)} S(M)$ imamo $S''(M) = S'(M) \cap P(D) = S(M) \cap (P(A) \cap P(D))$, odnosno (**L** 2. 4. 1) $S''(M) = S(M) \cap P(A \cap D)$. Zbog potencijalnosti sistema $S(M)$, i kako je $A \cap D \sqsubset sup_{P(M)} S(M)$, sleduje da $S''(M)$ ima bar jedan gornji ivični elemenat, što znači da je i $S'(M)$ potencijalan sistem.

Napomenimo da se **T** 3. 4. 2. može formulisati na sledeći način:

T 4. 1. 5. *Da bi potpuno uređen sistem $S(M)$ podmnožina množine M bio potencijalan nužno je i dovoljno da je neprekidan.*

4. 2. Ovde ćemo izložiti još jedan stav o potencijalnim sistemima. U vezi s tim navodimo jednu očevidnu lemu:

L 4. 2. 1. *Date su dve podmnožine B i C uređene množlne A. Ako B ima bar jedan gornji (donji) ivični elemenat i ako je C konačna množina, onda i množina $B \cup C$ ima bar jedan gornji (donji) ivični elemenat.*

Sada imamo sledeći stav:

T 4. 2. 1. *Ako je $S(M)$ potencijalan sistem podmnožina množine M, a $S_1(M) \sqsubseteq P(sup_{P(M)} S(M))$ konačan sistem, onda je i $S_2(M) = S(M) \cup S_1(M)$ takođe potencijalan sistem. Ukoliko je $S(M)$ induktivan sistem, takođe je i $S_2(M)$ induktivan sistem.*

Dokaz. Da bi $S_2(M)$ bio potencijalan sistem dovoljno je da sistem $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(D)$, za $D \sqsubset sup_{P(M)} S_2(M)$, ima bar jedan gornji ivični elemenat. Najpre je $S_2'(M) = (S(M) \cup S_1(M)) \cap P(D) = (S(M) \cap P(D)) \cup (S_1(M) \cap P(D)) = S'(M) \cup (S_1(M) \cap P(D))$. Pošto je $S(M) \sqsubseteq P(sup_{P(M)} S(M))$, takođe je i $S_2(M) \sqsubseteq P(sup_{P(M)} S(M))$, odnosno $sup_{P(M)} S_2(M) \sqsubseteq sup_{P(M)} S(M)$, usled čega imamo i $D \sqsubset sup_{P(M)} S(M)$. Zbog ovog i zbog potencijalnosti sistema $S(M)$, sleduje da sistem $S'(M)$ ima bar jedan gornji ivični elemenat. Međutim s obzirom na **L** 4. 2. 1 unija sistema $S'(M)$ i konačne množine $S_1(M) \cap P(D)$, tj. sistem $S_2'(M)$, mora takođe imati bar jedan gornji ivični elemenat, što znači da je $S_2(M)$ potencijalan sistem. Drugi deo stava je očevidan.

4. 3. Kao što je poznato, stavovi: (1) *potpuno uređena množina je bez nnutrašnjih ponora*, i (2) *potpuno uređena množina poseduje* LEBESGUE—HINČIN-*ovo svojstvo* — jesu ekvivalentni (**T** 5. 4. 1). Dakle LEBESGUE—HINČIN-*ovo svojstvo* (**D** 5. 4. 1), koje pretstavlja jednu vrstu induktivnog principa za potpuno uređene množine, karakteristično je za potpuno uređene množine bez unutrašnjih ponora. Docnije ćemo navesti i druge primere kako specijalna vrsta induktivnog zaključivanja karakteriše izvesnu klasu množina. U vezi sa tim imamo sledeću definiciju:

D 4. 3. 1. *Neka množina M pripada klasi množina C i neka je C' takođe izvesna klasa množina. Sistem $S(M)$ podmnožina od M naziva se karakterističnim za M u okviru klase C ako su propozicije:*

1. *M je elemenat od C';*
2. *$S(M)$ je induktivan sistem za M*

— ekvivalentne.

Jasno je da je množina M, u ovom slučaju, elemenat preseka $C \cap C'$.

5. NEKE PRIMENE

5. 1. U sledećim paragrafima biće izložena primena teorije o induktivnim sistemima uglavnom na uređene množine. Ranijim definicijama i pomoćnim stavovima dodaćemo još neke.

D 5. 1. 1. *Ako postoji jednoznačno preslikavanje φ uređene množine A na uređenu množinu B takvo da je $\varphi \cdot A = B$ i da iz relacija $x \leqslant y$, odnosno $x \parallel y$, $x, y \in A$, sleduje $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$, odnosno $\varphi(x) \parallel \varphi(y)$, onda je množina A izomorfna s množinom B, što se piše $A \approx B$.*

Lako se pokazuje da je, u ovom slučaju, preslikavanje obostrano jednoznačno. Pored toga relacija izomorfizma je relacija ekvivalencije. Relacije $x \parallel y$ i $\varphi(x) \parallel \varphi(y)$ samo jednovremeno važe.

D 5. 1. 2. *Neka su A i B dve množine uređene relacijama reda $\leqslant$, $\leqslant'$ i neka sadrže iste elemente, što ćemo obeležavati $|A| = |B|$. Ako iz relacija $x \leqslant y$, $x, y \in A$ sleduje $y \leqslant' x$, a iz $x \leqslant' y$ pak $y \leqslant x$, onda je relacija $\leqslant'$ inverzna ili dualna u odnosu na relaciju $\leqslant$, i beležićemo je sa $\leqslant^*$ ili $\geqslant$. Množinu $B = A^*$ zvaćemo inverzijom množine A.*

Jasno je da su relacije $\leqslant$ i $\geqslant$ međusobno inverzne i da je $A^{**} = A$, ako se simbol $*$ tretira kao operator kojim se iz množine A dobija njena inverzija A^*.

D 5. 1. 3. *Neka je A uređena množina i $a, b \in A$. Množina svih elemenata $x \in A$, za koje je $x \leqslant b$ ($a \leqslant x$), naziva se početnim (završnim) segmentom množine A i beleži se $(-, b]_A$ ($[a, -)_A$). Množina svih elemenata $x \in A$, za koje je $x < b$ ($a < x$), jeste početni (završni) interval i označava se $(-, b)_A$ ($(a, -)_A$). Početni (završni) segmenti i intervali nazivaju se elementarnim početnim (završnim) komadima a beleže se $(-, b|_A$ ($|a, -)_A$). Svaki neprazan presek početnog $(-, b|_A$ i završnog komada $|a, -)_A$ naziva se takođe elementarnim komadom i beleži se $|a, b|_A$. Sve navedene vrste podmnožina od A nazivaju se elementarnim komadima u širem smislu. Specijalno elementarni komadi u užem smislu jesu množine $(a, b)_A$ (interval), $[a, b)_A$, $(a, b]_A$, $[a, b]_A$ (segment). Početnim (završnim) komadom naziva se množina $B \subseteq A$, ako* *relacija $x \in B$ povlači relaciju $(-, x]_A \subseteq B$ $([x, -)_A \subseteq B)$. Početni, završni komad, kao i neprazan presek početnog i završnog komada, nazivaju se uopšte komadima.*

Napomenimo prvo da su elementarni komadi takođe komadi množine A. Drugo, iz same definicije intervala $(a, b)_A$, sleduje da elementi a i b ne pripadaju njemu, ali ne i da nema krajnjih elemenata.

Ubuduće kad je reč o elementarnim komadima misliće se na elementarne komade u užem smislu.

Za početni (završni) komad B množine A važi relacija $B = \bigcup\limits_{x \in B} (-, x]_A$ $(B = \bigcup\limits_{x \in B} [x, -)_A)$. Ako je B proizvoljan komad onda je $B = \bigcup\limits_{x, y \in B} [x, y]_A$. Takođe napomenimo da je, ako je B početni (završni) komad od A, onda i $A \setminus B$ završni (početni) komad.

D 5. 1. 4. *Neka je množina $A \cup B$, gde su A i B proizvoljne množine, uređena. Množina $(-, b]_B$, $b \in A$, pretstavlja množinu svih elemenata $y \in B$, za koje važi relacija $y \leqslant b$. Slično se definišu množine: $(-, b)_B$, $[a, -)_B$ (za $a \in A$), $(a, -)_B$, $[a, b]_B$, $(a, b]_B$, $[a, b)_B$, $(a, b)_B$.*

Za $B = A$ ove se množine svode na množine prethodne definicije.

D 5. 1. 5. *Presekom (rezom) neprazne uređene množine A naziva se uređen par (A_1, A_2), gde je A_1 početni, A_2 završni komad od A, i pri čemu je $A_1 \cap A_2 = \Lambda$, $A_1 \cup A_2 = A$. A_1 i A_2 su komponente preseka.*

D 5. 1. 6. *Lakunom (ponorom) neprazne potpuno uređene množine A naziva se svaki njen presek (A_1, A_2), za koji ne postoji $\sup_A A_1$. Ako je $A_1, A_2 \supset \Lambda$ lakuna je unutrašnja, inače spoljašnja.*

Za presek (A_1, A_2), $A_1, A_2 \supset \Lambda$ potpuno uređene množine A $\sup_A A_1$ i $\inf_A A_2$ jednovremeno postoje.

D 5. 1. 7. *Donjom (gornjom) bazom množine $B \subseteq A$, gde je A uređena množina, naziva se množina $\underline{B} = \bigcup\limits_{x \in B} (-, x]_A$ $(\overline{B} = \bigcup\limits_{x \in B} [x, -)_A)$. Prava baza množine B je $\underline{B} \cap \overline{B}$.*

Jasno je da je donja (gornja) baza početni (završni) komad množine A, a i prava baza je komad. Isto je lako uočiti da je $\underline{\underline{B}} = B$ itd.

D 5. 1. 8. *Množine $B, C \subseteq A$, gde je A uređena množina, jesu konfinalne (koinicijalne) ako je $\underline{B} = \underline{C}$ $(\overline{B} = \overline{C})$. B i C su koekstenzivne ako je $\underline{B} \cap \overline{B} = \underline{C} \cap \overline{C}$.*

Svaka množina je konfinalna (koinicijalna) sa svojom donjom (gornjom) bazom, a takođe koekstenzivna sa pravom bazom. Ako je jedna od konfinalnih (koinicijalnih) množina sa završnim (početnim) elementom, tada je isti slučaj i sa drugom množinom.

Sledeće definicije određuju specijalne klase množina.

D 5. 1. 9. *Uređena množina A, u kojoj za svaki lanac C postoji $\sup_A C$ ($\inf_A C$), ukoliko je $\underline{C} \neq A$ ($\overline{C} \neq A$), naziva se supremalnom (infimalnom) množinom. Množina jednovremeno supremalna i infimalna jeste ekstremalna. Supremalnom, infimalnom i ekstremalnom množinom u užem smislu naziva se množina za čiji svaki lanac C postoji $\sup_A C$, $\inf_A C$, $\sup_A C$ i $\inf_A C$, respektivno. Ekstremalne množine nazivaćemo i alakunarnim (u širem i užem smislu).*

Očevidno je da je svaka potpuno uređena supremalna ili infimalna množina takođe i ekstremalna. Ubuduće, ukoliko se ne naglasi drukčije, ovi pojmovi će se upotrebljavati u svom širem značenju.

Najzad istaknimo da lanci alakunarnih množina, u užem smislu, imaju uvek supremum i infimum u tim množinama.

D 5. 1. 10. *Uređena množina, čija svaka neprazna podmnožina ima početni elemenat, naziva se dobro uređenom množinom.*

D 5. 1. 11. *Uređena množina, čiji svaki neprazni deo ima bar jedan donji ivični elemenat, naziva se razvrstanom množinom.*

D 5. 1. 12. *Potpuno uređena množina, čiji svaki neprazan deo, ograničen s donje strane, ima početni elemenat, naziva se poludobro uređenom množinom.*

Dobro uređena množina je specijalan slučaj poludobro uređene množine, tj. poludobro uređena množina sa početnim elementom.

D 5. 1. 13. *Uređena množina, čiji svaki neprazan deo, ograničen s donje strane, ima bar jedan donji ivični elemenat, naziva se polurazvrstanom množinom.*

Razvrstana množina je specijalan slučaj polurazvrstane množine.

D 5. 1. 14. *Množina je dvostruko dobro uređena ako svaki njen neprazan deo ima krajnje elemente.*

D 5. 1. 15. *Uređena množina čiji svaki neprazan deo ima bar po jedan gornji i donji ivični elemenat, naziva se dvostruko razvrstanom množinom.*

5. 2. Sledeći stav je očevidan:

L 5. 2. 1. *Ako je F sistem početnih (završnih) komada uređene množine A, tada je i množina $\bigcup_{X \in F} X$ takođe početni (završni) komad od A.*

L 5. 2. 2. *Ako je F monotona porodica komada uređene množine A, onda je i množina $\bigcup_{X \in F} X = X'$ takođe komad od A.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da za svako $a, b \in X'$, $a \leqslant b$, sleduje $[a, b]_A \sqsubseteq X'$. Doista pošto je $a, b \in X'$ postoje dva komada $X_1, X_2 \in F$, pri čemu je $a \in X_1$, $b \in X_2$. Kako je $X_1 \subset X_2$, ili je $X_1 \subseteq X_2$, ili pak $X_2 \subseteq X_1$. Neka je recimo $X_1 \subseteq X_2$. Tada je $a, b \in X_2$, pa i $[a, b]_A \subseteq X_2$ i najzad, zbog $X_2 \subseteq X'$, $[a, b]_A \subseteq X'$, što dokazuje tvrđenje leme.

Da bi doveli u vezu našu definiciju konfinalnosti i koinicijalnosti (**D** 5. 1. 8) sa uobičajenim definicijama [12, 245], navodimo stav:

L 5. 2. 3. *Da bi podmnožine B i C uređene množine A bile konfinalne (koinicijalne), nužno je i dovoljno da su zadovoljene relacije* $B = \bigcup_{x \in C} (-, x]_B$, $C = \bigcup_{x \in B} (-, x]_C$ ($B = \bigcup_{x \in C} [x, -)_B$, $C = \bigcup_{x \in B} [x, -)_C$).

Dokaz. Uslov je nužan. Neka su B i C konfinalne množine, dakle $\underline{B} = \bigcup_{x \in B} (-, x]_A = \bigcup_{x \in C} (-, x]_A = \underline{C}$. Dokazaćemo da je $B = \bigcup_{x \in C} (-, x]_B$. Doista iz $y \in \bigcup_{x \in C} (-, x]_B$ sleduje da je $y \in B$, dakle

$$\bigcup_{x \in C} (-, x]_B \subseteq B. \tag{5. 2. 1}$$

Dalje iz $y \in B$ dobija se $y \in \underline{B} = \underline{C} = \bigcup_{x \in C} (-, x]_A$. Znači, postoji $x_0 \in C$ takvo da je $y \in (-, x_0]_A$, odakle izlazi $y \leqslant x_0$. Iz ove relacije i iz $y \in B$ sleduje $y \in (-, x_0]_B$, a takođe i $y \in \bigcup_{x \in C} (-, x]_B$, odakle najzad imamo $B \subseteq \bigcup_{x \in C} (-, x]_B$. Ova relacija i relacija (5. 2. 1) daju rezultat $B = \bigcup_{x \in C} (-, x]_B$. Slično se dokazuje da je $C = \bigcup_{x \in B} (-, x]_C$.

Uslov je dovoljan. Neka je

$$B = \bigcup_{x \in C} (- \ x]_B, \quad C = \bigcup_{x \in B} (-, x]_C. \tag{5. 2. 2}$$

Dokazaćemo da je $\underline{B} = \underline{C}$. Doista iz $y \in \underline{B} = \bigcup_{x \in B} (-, x]_A$ sleduje da postoji elemenat $x_0 \in B$ takav da je $y \leqslant x_0$, a zbog (5. 2. 2) postoji $x_1 \in C$, za koje je $x_0 \leqslant x_1$, odakle se dobija $y \leqslant x_1$, pa takođe i $y \in \underline{C}$. Dakle imamo $\underline{B} \subseteq \underline{C}$. Slično se pokazuje daje $\underline{C} \subseteq \underline{B}$, iz čega sleduje $\underline{B} = \underline{C}$. Na sličan se način izvodi i dualni stav.

Ovaj stav ustvari utvrđuje ekvivalenciju naše i uobičajene definicije.

L 5. 2. 4. *Neka je množina A potpuno uređena, a B komad od A koji nije elementaran. Tada za svaki elementarni komad C od A, za koji je* $C \subseteq B$, *postoji elementarni komad C od A takav da je* $C \subset D \subseteq B$.

Dokaz je jednostavan.

L 5. 2. 5. *Svaki komad potpuno uređene množine bez ponora jeste elementaran komad (u užem smislu).*

Napomenimo samo da, pošto se radi o potpuno uređenoj množini, za svaki njen deo postoje i supremum i infimum.

L 5. 2. 6. *Neka je B podmnožina uređene množine A. Množina svih početnih segmenata* $(-, x]_A$, $x \in B$, *je izomorfna s množinom B, pri čemu je obostrano jednoznačno preslikavanje* φ *definisano relacijom* $\varphi(x) = (-, x]_A$, $x \in B$.

L 5. 2. 7. *Množina* $C(\overline{C})$, *gde je C lanac uređene množine A, ili nema gornjih (donjih) ivičnih elemenata, ili ima završni (početni) elemenat, ako i samo ako C ima završni (početni) elemenat.*

Obe se leme jednostavno dokazuju.

5. 3. Sada ćemo najpre formulisati kriterijum za potencijalnost nekog sistema komada uređenih množina.

T 5. 3. 1. *Da bi izvestan sistem* $S(M)$ *početnih (završnih) komada uređene množine M bio potencijalan, nužno je i dovoljno da svaki njegov neprazan potsistem, vezan za početni (završni) komad* $D \subset sup_{P(M)} S(M)$, *ima bar jedan gornji ivični elemenat.*

Dokaz. Da je uslov nužan, to je očevidno. Uslov je i dovoljan. Neka je $D' \subset sup_{P(M)} S(M)$ proizvoljna množina, a $S'(M) = S(M) \cap P(D')$. Zbog **L** 5. 2. 1 množina

$$D = \bigcup_{X \in S'(M)} X \tag{5. 3. 1}$$

je početni (završni) komad od M i, kako je $S'(M) \subseteq P(D')$, imamo $D \subseteq \bigcup_{X \in P(D')} X = D'$, odnosno

$$D \subseteq D' \tag{5. 3. 2}$$

i $D \subset sup_{P(M)} S(M)$. Dokazaćemo sada da je $S'(M) = S''(M) = S(M) \cap P(D)$. Doista iz relacije $X \in S'(M)$ sleduje $X \in S(M)$ i zbog (5. 3. 1) $X \subseteq D$, odnosno $X \in P(D)$, odakle imamo $X \in S(M) \cap P(D)$ i $X \in S''(M)$. Dakle

$$S'(M) \subseteq S''(M). \tag{5. 3. 3}$$

Dalje iz $X \in S''(M)$ imamo $X \in S(M)$ i $X \in P(D)$, a kako je zbog (5. 3. 2) $P(D) \subseteq P(D')$ pa i $X \in P(D')$, dobija se $X \in S'(M)$, odnosno $S''(M) \subseteq S'(M)$, što sa (5. 3. 3) daje $S'(M) = S''(M)$. S obzirom da $S''(M)$, prema pretpostavci stava, ima bar jedan gornji ivični elemenat, isti je slučaj i sa $S'(M)$. Otuda sleduje dovoljnost uslova, a i tačnost stava.

Kao neposrednu posledicu ovoga stava dobijamo teoremu koju je formulisao i dokazao Đ. KUREPA [5, 111]:

T 5. 3. 2. *Sistem* $S(M)$ *svih početnih (završnih) komada uređene množine M induktivan je za M.*

Napomenimo da se dokaz može izvesti, zbog neprekidnosti sistema $S(M)$, i iz **CT** 4. 1. 1.

T 5. 3. 3. *Sistem* $S(M)$ *svih komada uređene množine M je induktivan za M.*

Dokaz. Sistem $S(M)$ prekriva (M), a zbog **L** 5. 2. 2 je neprekidan, pa dakle i induktivan.

5. 4. Za potpuno uređene množine Đ KUREPA je formulisao LEBESGUE—HINČIN-*ovo svojstvo* [**4**, 23—25; **13**, 112*; **14**, 164—166; **15**, 186—191**]:

D 5. 4. 1. *Potpuno uređena množina M ima* LEBESGUE—HINČIN-*ovo svojstvo ako je sistem svih njenih elementarnih početnih (završnih) komada induktivan.*

U istom radu dokazan je sledeći stav:

T 5. 4. 1. *Da bi potpuno uređena množina M imala* LEBESGUE—HINČIN-*ovo svojstvo, nužno je i dovoljno da je bez unutrašnjih ponora.*

Dokaz. Uslov je nužan. Pretpostavimo da je sistem $S(M)$ svih početnih komada od M doista induktivan, ali da M sadrži bar jednu unutrašnju lakunu definisanu presekom (M_1, M_2). M_1 je početni komad množine M, ali ne elementaran, tj.

$$(5.4.1) \qquad \sim (M_1 \in S(M)),$$

jer ne postoji $sup_M M_1$. Neka je F množina svih elementarnih početnih komada $(-, x|_M$ za $x \in M_1$. Međutim pošto je $sup_{P(M)} F \subseteq M_1 \subset M$, a s obzirom na induktivnost sistema $S(M)$, sleduje iz **T** 3. 4. 2. da je $sup_{P(M)} F \in S(M)$. Kako je dalje zbog **CL** 2. 3. 7 $sup_{P(M)} F = \bigcup_{X \in M} (-, x|_M = M_1$, dobili bi $M_1 \in S(M)$, što protivreči relaciji (5. 4. 1).

Uslov je dovoljan. Doista ako je M uređena množina bez unutrašnjih ponora, onda je svaki pravi početni komad X od M elementaran, tj. postoji $sup_M X$. Prema tome za svaki sistem $F \subseteq S(M)$, za koji je $sup_{P(M)} F \neq M$, $sup_{P(M)} F$ je takođe elementaran početni komad, tj. $sup_{P(M)} F \in S(M)$ je na osnovu **T** 3.4. 2 potencijalan i, pošto prekriva M, takođe i induktivan sistem.

Odavde sleduje i stav:

CT 5. 4. 1. *U okviru klase potpuno uređenih množina sistem svih elementarnih početnih (završnih) komada je karakterističan za množine bez unutrašnjih ponora.*

T 5. 4. 2. *U okviru klase potpuno uređenih množina sistem svih elementarnih komada u užem smislu karakterističan je za množine bez ponora.*

Dokaz. Doista pretpostavimo da je $S(M)$ induktivan sistem, ali da u množini M postoji lakuna definisana presekom (M_1, M_2), pri čemu je $M_1 \supset \Lambda$. Jasno je da ne postoji $sup_M M_1$, odnosno da komad M_1 nije elementaran. Ako je D pravi završni komad od M_1, onda je $\Lambda \subset D \subset M_1$, odnosno $D \subset M$. Naravno D, zbog konfinalnosti sa M_1, takođe nije elementaran komad. Zbog in-

---

* Ovde je iskorišćeno to svojstvo za dokas jednog stava.

** U ovom radu je, pored formulacije principa indukcije, navedeno nekoliko primera za njegovu primenu.

duktivnosti sistema $S(M)$, u množini $S'(M)=S(M)\cap P(D)\supset\Lambda$ postoji bar jedan gornji ivični elemenat, tj. elementaran komad $A\subseteq D$, što znači da je

(5. 4. 2) $\sim\cdot(A\sqsubset\cdot S'(M))$.

Međutim postoji (**L** 5. 2. 4) bar jedan elementaran komad X od M takav da je

(5. 4. 3) $A\sqsubset X\subseteq D$.

Dalje iz $X\in S(M)$ i $X\in P(D)$ sleduje $X\in S'(M)$, što pokazuje da su relacije (5. 4. 2) i (5. 4. 3) protivrečne. Dakle M je množina bez ponora.

Sada ćemo pokazati da iz činjenice, da potpuno uređena množina M nema ponora, sleduje induktivnost sistema $S(M)$ svih elementarnih komada (u užem smislu) od M. U tu svrhu dovoljno je primetiti da je za potpuno uređene množine bez ponora sistem $S(M)$, pored toga što prekriva M, takođe i neprekidan. Doista ako je F lanac od $S(M)$, tada je (**L** 5. 2. 2) $\bigcup_{X\in F} X=X'$ komad od M, a zbog **L** 5. 2. 5 X' je elementaran komad, tj. $S(M)$ je neprekidan pa i induktivan sistem.

5. 5. Navešćemo još neke stavove.

T 5. 5. 1. *U okviru uređenih množino sistem $S(M)$ svih početnih (završnih) segmenata karakterističan je za množinu M čiji svaki lanac, ako nije konfinalan (koinicijalan) sa M, ima završni (početni) elemenat.*

Dokaz se sastoji iz dva dela. Prvo treba pokazati da je, ako je $S(M)$ doista induktivan sistem, množina M sa navedenim svojstvom. Zatim da je sistem svih početnih segmenata množine sa datim svojstvom doista induktivan.

Neka je $S(M)$ induktivan sistem a C neki lanac od M nekonfinalan sa M, tj. $\overline{C}\neq M$, odnosno $\overline{C}\sqsubset M$. Zbog ovoga u sistemu $S'(M)=S(M)\cap P(\overline{C})\supset\Lambda$ postoji bar jedan gornji ivični elemenat $A=(-,a]_M$. Kako je $S'(M)$ množina svih početnih segmenata od M, čiji završni elementi pripadaju množini $\overline{C}$, zbog **L** 5. 2. 6 a mora biti gornji ivični elemenat u $\overline{C}$, a zbog L. 5. 2. 7 završni od $\overline{C}$ pa i od C, što je trebalo i dokazati.

Neka je sad M uređena množina čiji svaki lanac, nekonfinalan sa M, ima završni elemenat. Pokazaćemo da je sistem $S(M)$ svih početnih segmenata od M, pored toga što prekriva M, takođe i neprekidan. Doista neka je F lanac od $S(M)$ za koji je $sup_{P(M)}F=X'\neq M$. Pošto je on izomorfan s množinom C završnih elemenata početnih segmenata iz F, i kako je $\overline{C}=X'$, odnosno $\overline{C}\sqsubset M$, lanac C nije konfinalan sa M te ima završni elemenat. Otuda sleduje da i množina F ima završni elemenat i to $X'\in S(M)$ (**L** 2. 3. 3). Dakle $S(M)$ je neprekidan pa i induktivan sistem. — Dokaz dualnog stava je sličan.

Napomenimo da je množina M inverzija jedne vrste polurazvrstanih množina, odnosno, u dunlnom stavu, upravo jedna vrsta polurazvrstanih množina.

Kao neposrednu posledicu ove teoreme imamo stav:

CT 5. 5. 1. *U okviru potpuno uređenih množina sistem $S(M)$ svih početnih (završnih) segmenata karakterističan je za inverziju poludobro uređene množine (poludobro uređenu množinu).*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je potpuno uređena množina M, čiji svaki lanac, nekonfinalan sa M, ima završni elemenat, inverzija poludobro uređene množine. Doista pošto je M potpuno uređena množina, svaki njen deo ograničen s gornje strane, ukoliko nije konfinalan sa M, ima završni elemenat; ako je konfinalan sa M, onda je sama granica završni elemenat tog dela. Međutim ove činjenice karakterišu inverziju poludobro uređene množine.

Najzad dokazaćemo još dva stava.

T 5. 5. 2.* *U okviru klase uređenih množina sistem svih segmenata karakterističan je za dvostruko razvrstane množine* [23]**.

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je sistem $S(M)$ svih segmenata uređene množine M induktivan. Neka je dalje C proizvoljna podmnožina od M, ali pretpostavimo da nema nijedan gornji (ili donji) ivični elemenat (dakle M nije dvostruko razvrstana množina). Obeležimo sa D pravi završni komad množine C, što znači da je D konfinalno sa C, dakle nema gornjih ivičnih elemenata, a takođe je $\Lambda \subset D \subset \overline{C}$, odnosno $\Lambda \subset D \subset M$. Sistem $S'(M) = S(M) \cap P(D) \supset \Lambda$, zbog induktivnosti sistema $S(M)$, sadrži bar jedan gornji ivični elemenat, tj. postoji segment $[a, b]_M \in S'(M)$ za koji je

$$(5.\ 5.\ 1) \qquad \sim \cdot ([a, b]_M \subset \cdot S'(M)).$$

Pošto b ne može biti gornji ivični elemenat od D, postoji $c \in D$ takvo da je $b < c$. Kako je D komad od M (komad D komada $\underline{C}$ od M je takođe komad od M), sleduje da je $[a, c]_M \subseteq D$, odnosno $[a, c]_M \in S'(M)$. Međutim relacija $[a, b]_M \subset [a, c]_M$ protivreči relaciji (5. 5. 1), što znači da je naša pretpostavka o množini C neodrživa. Dakle svaka množina $C \subseteq M$ ima bar po jedan gornji i donji ivični elemenat, tj. M je dvostruko razvrstana množina.

Da bi dokazali da je sistem $S(M)$ svih segmenata dvostruko razvrstane množine induktivan, dovoljno je primetiti da je, pored toga što prekriva M, takođe neprekidan. Doista ako

---

* Đ. Kurepa u svome radu [20], koji se upravo štampa u V tomu časopisa Publication de l'Institut mathématique (Académie serbe des sciences), ima, u bitnosti, isti stav.

** U citiranom članku postoji direktan dokaz.

je F lanac od $S(M)$, krajnji elementi segmenata iz F obrazuju lanac od M. Međutim pošto ovaj lanac mora imati ivične, odnosno krajnje elemente, jasno je da oni određuju segment $sup_{P(M)}F$, čime je tvrđenje dokazano.

Kao neposrednu posledicu ove teoreme imamo stav [16]*:

CT 5. 5. 2. *U okviru klase potpuno uređenih množina sistem svih segmenata karakterističan je za dvostruko dobro uređene množine.*

Kao što je poznato postoje razne definicije konačnih množina [17, 45–96]. E. ZERMELO je dokazao [18, 188], oslanjajući se na aksiomu izbora, da je proizvoljna množina konačna u smislu DEDEKIND-ove definicije, ako i samo ako se može dvostruko dobro urediti. Otuda imamo sledeću definiciju za konačne množine:

D 5. 5. 1. *Množina je konačna ako se može potpuno urediti tako da je sistem svih njenih segmenata induktivan za nju.*

5. 6. Pored uređenih množina spomenućemo još neke poznate klase množina koje se javljaju u topologiji, kao što su otvorene i u sebi guste množine. Smatrajući ove pojmove kao poznate (vidi na primer [12, 286, 288]), navodimo stavove:

T 5. 6. 1. *Svaki sistem $S(M)$ otvorenih podmnožina množine M je potencijalan, a ukoliko prekriva M i induktivan za M.*

T 5. 6. 2. *Svaki sistem $S(M)$ u sebi gustih podmnožina množine M je potencijalan, a ukoliko prekriva M i induktivan za M.*

Oba stava sleduju iz činjenice da su sistemi otvorenih, odnosno u sebi gustih množina apsolutno zatvoreni u odnosu na operator U [12, 298, 307].

6. NOVE FORMULACIJE PRINCIPA INDUKCIJE

6. 1. Dosada smo pretpostavljali da množine A, B, C iz uslova 1 i 2 *propozicije* 1. 2. 2 pripadaju jednom te istom sistemu $S(M)$, koji smo nazvali, ukoliko je ova propozicija istinita, induktivnim sistemom za množinu M. Međutim u opštem slučaju može se desiti da množine A i B pripadaju jednom, a množina C drugom sistemu podmnožina od M. U vezi sa tim imamo sledeću definiciju:

D 6. 1. 1. *Uređeni par ili spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina množine M naziva se induktivnim spregom za M, ako je propozicija* 1. 2. 2 *istinita kada je* $A, B \in S_1(M)$ *a* $C \in S_2(M)$, *ili preciznije:*

Spreg $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina množine M naziva se induktivnim spregom za M ako, ma kakva bila množina N, iz uslova:*

---

* U citiranom članku postoji direktan dokaz.

1. *postoji množina* $A \in (S_1(M) \setminus \{\Lambda\}) \cap P(N)$;
2. *za svaku množinu* $B \in (S_1(M) \setminus \{\Lambda, M\}) \cap P(N)$ *postoji množina* $C \in S_2(M) \cap P(N)$ za koju je $B \subset C$
— *sleduje* $M \subseteq N$.

$S_1(M)$ *i* $S_2(M)$ *su komponente, prva i druga, datog sprega.*

Definicija 1. 2. 1 je ustvari specijalan slučaj tek navedene definicije, tj. slučaj kada je $S_1(M) = S_2(M)$. Dakle dosada proučavani induktivni sistemi mogu se smatrati kao induktivni spregovi čije su komponente jednake. Napomenimo opet da ćemo se i dalje služiti eksplicitnom formom uslova 1 i 2 *propozicije* 1. 2. 2.

U vezi sa *definicijom* 6. 1. 1 postavlja se problem:

P 6. 1. 1. *Koji su nužni i dovoljni uslovi da bi spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina množine M bio induktivan za M?*

6. 2. Pre no što pređemo na rešavanje postavljenog problema u potpunosti, odredićemo dva nužna uslova za induktivnost nekog sprega. Pošto pri „iscrpljivanju" množine M, iz sistema $S_2(M)$ dolaze u obzir samo elementi koji sadrže kao podmnožinu bar jedan neprazan elemenat iz $S_1(M)$, ubuduće ćemo smatrati da $S_2(M)$ sadrži samo takve elemente. Radi jednostavnijeg izražavanja spreg $(S_1(M), S_2(M))$, u kome $S_2(M)$ ima navedenu osobinu, nazivaćemo *redukovanim spregom*. Sada imamo stav:

T 6. 1. 1. *Da bi redukovan spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina množine M bio induktivan za M, nužno je da je* $S_2(M) \setminus \{M\} \subseteq S_1(M)$.

Dokaz. Pre svega ako sistem $S_2(M)$ sadrži kao elemenat samo M jasno je da je dati spreg induktivan, a takođe i uslov stava zadovoljen. Neka je sada $(S_1(M), S_2(M))$ induktivan spreg za koji je $\Lambda \subset S_2(M) \setminus \{M\}$, i pretpostavimo da je ipak $\sim (S_2(M) \setminus \{M\} \subseteq S_1(M))$. Dakle postoji bar jedan elemena $N \in S_2(M) \setminus \{M\}$ za koji je

(6. 2. 1) $\quad \sim (N \in S_1(M))$,

a takođe

(6. 2. 2) $\quad N \subset M$.

Međutim može se lako pokazati da su uslovi 1 i 2 iz **Pr** 1. 2. 2 zadovoljeni za M i N. Doista pošto je N elemenat druge komponente redukovanog sprega, postoji množ na $A \in S_1(M)$ koja zadovoljava uslov 1 (**Pr** 1. 2. 2). Neka je $B \in S_1(M)$ množina koja zadovoljava relacije $\Lambda \subset B \subset M$ i $B \subseteq N$. S obzirom na relaciju (6. 2. 1) imamo $B \subset N$, a otuda, stavljajući $N = C$, sleduje da je uslov 2 (**Pr** 1. 2. 2) zadovoljen. Zbog induktivnosti datog sprega imali bi tada $M \subseteq N$, što protivreči relaciji (6. 2. 2). Dakle uslov je nužan.

D 6. 2. 2. *Spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmožina množine M naziva se saglasnim ako je* $S_2(M) \setminus \{M\} \subseteq S_1(M)$.

Lako se dokazuje sledeći stav:

T 6. 2. 2. *Da bi saglasan spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina množine* M *bio induktivan za* M, *nužno je da* $S_2(M)$ *prekriva* M.

6. 3. Najzad prelazimo na dokaz stava koji daje nužne i dovoljne uslove za induktivnost nekog sprega, i koji pretstavlja uopštenje osnovnog stava **T** 3. 2. 1. Sledeća definicija uprostiće nam njegovu formulaciju.

D 6. 3. 1. *Saglasan spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina množine* M *naziva se potencijalnim ako za svaki neprazan sistem* $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(D)$, *ma kakva bila množina* $D \subset sup_{P(M)} S_2(M)$, *postoji elemenat* $E \in S_1'(M) = S_1(M) \cap P(D)$ *takav da je* $\sim \cdot (E \subset \cdot S_2'(M))$.

Sada imamo stav:

T 6. 3. 3. *Da bi spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina množine* M *bio induktivan za* M, *nužno je i dovoljno da je potencijalan za* M *i da sistem* $S_2(M)$ *prekriva* M.

Dokaz. Uslov je nužan. Da je nužno da sistem $S_2(M)$ prekriva M već je pokazano i ostaje da se dokaže nužnost i potencijalnosti datog sprega. Dakle neka je spreg $(S_1(M), S_2(M))$ induktivan, ali pretpostavimo da nije potencijalan. Postoji bar jedna množina $N \subset sup_{P(M)} S_2(M)$, odnosno

$$(6.\ 3.\ 1) \qquad N \subset M,$$

takva da ne postoji nijedan elemenat $E \in S_1'(M) = S_1(M) \cap P(N)$ za koji je $\sim \cdot (E \subset \cdot S_2'(M))$, pri čemu je $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(N) \supset \Lambda$. Dakle za svaki elemenat $B \in S_1'(M)$ postoji uvek elemenat $C \in S_2'(M)$ takav da je $B \subset C$. S obzirom da je

$$(6.\ 3.\ 2) \qquad S_1'(M),\ S_2'(M) \subseteq P(N),$$

jasno je da je uslov 2 (**Pr** 1. 2. 2) ispunjen. Pošto je $S_2'(M) \supset \Lambda$, a dati spreg redukovan, sleduje iz $S_2'(M) \subseteq S_1'(M)$ da postoji bar jedan neprazan elemenat $A \in S_1'(M)$, što s obzirom na (6. 3. 2) znači da je i uslov 1 (**Pr** 1. 2. 2) takođe ispunjen. Međutim zbog induktivnosti datog sprega sledovalo bi tada $M \subseteq N$, što protivreči relaciji (6. 3. 1). Dakle potencijalnost je doista nužan uslov.

Uslov je dovoljan. Neka su zadovoljeni uslovi iz **T** 6. 3. 1, a takođe i uslovi 1 i 2 *propozicije* 1. 2. 2, ali pretpostavimo ipak da je

$$(6.\ 3.\ 3) \qquad \sim (M \subseteq N),$$

tj. da dati spreg nije induktivan. Iz (6. 3. 3) sleduje

$$(6.\ 3.\ 4) \qquad M \cap N = D \subset M,\ D \subseteq N,$$

a s obzirom na uslov 1 (**Pr** 1. 2. 2) postoji elemenat $A \in S_1(M)$ za koji je $\Lambda \subset A \subseteq D$, odnosno $A \in P(D)$ i najzad $A \in S_1'(M)$, gde je

(6. 3. 5) $$S_1'(M) = S_1(M) \cap P(D),$$

što znači da $S_1'(M)$ sadrži bar jedan neprazan elemenat. Zbog potencijalnosti datog sprega i kako je $D \subset M = sup_{P(M)} S_2(M)$, sleduje da postoji bar jedan elemenat $B \in S_1'(M)$ za koji je

(6. 3. 6) $$\sim \cdot (B \subset \cdot S_2'(M)),$$

pri čemu je $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(D) \supset \Lambda$. Iz ove relacije, pošto je dati spreg redukovan, sleduje da $S_2'(M)$ sadrži bar jedan neprazan elemenat, pa je i B zbog (6. 3. 6) neprazan elemenat. Kako zbog (6. 3. 5) i (6. 3. 4) B zadovoljava relacije $\Lambda \subset B \subset M$, $B \subseteq N$, sleduje, na osnovu uslova 2 (Pr 1. 2. 2), da postoji množina $C \in S_2(M)$ za koju je

(6. 3. 7) $$B \subset C \subseteq M, \ C \subseteq N,$$

odakle se dobija $C \subseteq M \cap N = D$, odnosno $C \subseteq D$. Dalje je $C \in P(D)$ pa takođe i $C \in S_2'(M)$ i najzad zbog (6. 3. 6) $\sim (B \subset C)$, što protivreči prvoj od relacija (6. 3. 7). Zbog ovoga pretpostavka (6. 3. 3) je neodrživa, dati spreg je induktivan a uslovi stava su dovoljni. Ovim je stav u celosti dokazan.

6. 4. Da bi izložili odnos *definicija* 3. 4. 2 i 6. 3. 1 dokazaćemo sledeći stav:

T 6. 4. 1. *Ako su u potencijalnom spregu $(S_1(M), S_2(M))$ sistema podmnožina množine M komponente jednake, onda je sistem $S(M) = S_1(M) = S_2(M)$ potencijalan.*

Dokaz. Pošto je spreg $(S_1(M), S_2(M))$ potencijalan, za svaki neprazan sistem $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(D)$, ma kakva bila množina $D \subset sup_{P(M)} S_2(M)$, postoji elemenat $E \in S_1'(M) = S_1(M) \cap P(D)$ takav da je $\sim \cdot (E \subset \cdot S_2'(M))$. Ako je $S_1(M) = S_2(M) = S(M)$ onda za svaki neprazan sistem $S'(M) = S(M) \cap P(D)$, pri čemu je sada $D \subset sup_{P(M)} S(M)$, postoji elemenat $E \in S'(M)$ takav da je $\sim \cdot (E \subset \cdot S'(M))$, tj. postoji gornji ivični elemenat u $S'(M)$, što znači da je $S(M)$ doista potencijalan sistem.

Dakle *definicija* 3. 4. 2 i *teorema* 3. 4. 1 su specijalni slučajevi *definicije* 6. 3. 1 i *teoreme* 6. 3. 1.

6. 5. Kao uopštenje *teoreme* 3. 4. 2 imamo sledeći stav:

T 6. 5. 1. *Da bi saglasan spreg $(S_1(M), S_2(M))$ sistema podmnožina množine M, čija je komponenta $S_1(M)$ potpuno uređena množina, bio potencijalan za M, nužno je i dovoljno da je za svaki neprazan deo F od $S_2(M)$ $sup_{P(M)} F \in S_1(M)$ ukoliko je $sup_{P(M)} F \neq sup_{P(M)} S_2(M)$.*

Dokaz. Uslov je nužan. Neka je dati spreg potencijalan za M, a

(6. 5. 1) $$F \subseteq S_2(M)$$

proizvoljan neprazan lanac za koji je $sup_{P(M)} F = D \subset sup_{P(M)} S_2(M)$. Kako je zbog ovoga $F \cdot \subseteq D$, imamo $F \subseteq P(D)$ i najzad zbog (6. 5. 1)

(6. 5. 2) $$F \subseteq S_2'(M),$$

gde je $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(D) \supset \Lambda$. Zbog potencijalnosti datog sprega postoji bar jedan elemenat $E \in S_1'(M) = S_1(M) \cap P(D)$ za koji je $\sim \cdot (E \subset \cdot S_2'(M))$. S obzirom da je $S_1(M)$ potpuno uređen sistem, dobija se $S_2'(M) \cdot \subseteq E$, a iz (6. 5. 2) takođe i $F \cdot \subseteq E$, zatim $sup_{P(M)} F \subseteq E$. Kako je zbog $E \in S_1'(M)$ i $E \subseteq D = sup_{P(M)} F$, dobija se $sup_{P(M)} F = E \in S_1(M)$, što je trebalo dokazati.

Uslov je dovoljan. Doista neka je uslov stava zadovoljen i neka je $D \subset sup_{P(M)} S_2(M)$. Sistem $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(D) \supset \Lambda$ je lanac i, kako je $sup_{P(M)} S_2'(M) \subseteq sup_{P(M)} P(D) = D \subset sup_{P(M)} S_2(M)$, imamo $sup_{P(M)} S_2'(M) = E \in P(D)$ a na osnovu uslova stava $E \in S_1(M)$, što najzad daje $E \in S_1'(M)$. Pošto je takođe zbog $S_2'(M) \cdot \subseteq E$ zadovoljena relacija $\sim \cdot (E \subset \cdot S_2'(M))$, sleduje tačnost stava.

6. 6. Kao i potencijalni sistemi tako su i potencijalni spregovi od velikog značaja za matematičku indukciju. Zbog toga navodimo nekoliko opštih potencijalnih spregova i izvesne stavove o njima.

T 6. 6. 1. *Saglasan spreg $(S_1(M), S_2(M))$ sistema podmnožina množine M, čija je komponenta $S_2(M)$ potencijalan sistem za M, takođe je potencijalan za M.*

Dokaz. Doista ako je $S_2(M)$ potencijalan sistem, onda za svako $D \subset sup_{P(M)} S_2(M)$ sistem $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(D) \supset \Lambda$ ima bar jedan gornji ivični elemenat E, tj. važi relacija $\sim \cdot (E \subset \cdot S_2'(M))$. Kako je zbog saglasnosti datog sprega i $E \in S_1(M)$, odnosno $E \in S_1'(M)$, sleduje da je tvrđenje stava tačno.

CT 6. 6. 1. *Saglasni spreg $(S_1(M), S_2(M))$ sistema podmnožina množine M, čija je komponenta $S_2(M)$ neprekidan sistem ili sistem apsolutno zatvoren u odnosu na operator* U, *jeste potencijalan.*

Sleduje iz prethodnog stava, s obzirom da su pomenuti sistemi potencijalni.

T 6. 6. 2. *Saglasan spreg $(S_1(M), S_2(M))$ sistema podmnožina množine M, u kome je komponenta $S_2(M)$ konačna množina, potencijalan je za množinu M.*

Sleduje iz činjenice da je svaki konačan sistem podmnožina množine M potencijalan za nju.

T 6. 6. 3. *Ako je spreg $(S_1(M), S_2(M))$ sistema podmnožina množine M potencijalan za M, tada je i spreg $(S_1'(M), S_2'(M))$, pri čemu je $S_1'(M) = S_1(M) \cap P(A)$, $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(A)$, $A \subseteq M$, potencijalan za M.*

Dokaz. Neka je $D \subset sup_{P(M)} S_2'(M)$. Tada imamo $S_1''(M) = S_1'(M) \cap P(D) = (S_1(M) \cap P(A)) \cap P(D) = S_1(M) \cap (P(A) \cap P(D))$, odnosno zbog **L** 2. 4. 1 $S_1''(M) = S_1(M) \cap P(A \cap D)$ a takođe i $S_2''(M) = S_2(M) \cap P(A \cap D)$. Kako je $A \cap D \subseteq D \subset sup_{P(M)} S_2'(M) \subseteq sup_{P(M)} S_2(M)$, zbog potencijalnosti datog sprega, sleduje da postoji elemenat $E \in S_1''(M)$ za koji je $\sim \cdot (E \subset \cdot S_2''(M))$. Međutim ovo pokazuje da je i spreg $(S_1'(M), S_2'(M))$ takođe potencijalan.

6. 7. Sledeći stav se odnosi na proširenje komponenata potencijalnih spregova.

T 6. 7. 1. *Ako je spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina mnoine M potencijalan za M, i ako su* $T_1(M)$ *i* $T_2(M)$ *izvesni sistemi podmnožina od M, pri čemu je* $T_2(M) \subseteq P(sup_{P(M)} S_2(M)) \cap (S_1(M) \cup T_1(M))$ *konačan, onda je i spreg* $(S_1(M) \cup T_1(M), S_2(M) \cup T_2(M))$ *potencijalan.*

Dokaz. Pošto je novodobijeni sistem saglasan, dovoljno je pokazati da za svaki neprazan sistem $S_2''(M) = (S_2(M) \cup T_2(M)) \cap P(D)$, pri čemu je $D \subset sup_{P(M)}(S_2(M) \cup T_2(M))$, postoji bar jedan elemenat $E \in S_1''(M) = (S_1(M) \cup T_1(M)) \cap P(D)$ za koji je $\sim \cdot (E \subset \cdot S_2''(M))$. Najpre imamo $S_2''(M) = (S_2(M) \cap P(D)) \cup (T_2(M) \cap P(D))$, a kako je, zbog $T_2(M) \subseteq P(sup_{P(M)} S_2(M))$, $D \subset sup_{P(M)}(S_2(M) \cup T_2(M)) \subseteq sup_{P(M)} S_2(M)$, usled potencijalnosti sprega $(S_1(M), S_2(M))$, sleduje da postoji elemenat $E' \in S_1'(M) = S_1(M) \cap P(D)$ takav da je $\sim \cdot (E' \subset \cdot S_2'(M))$, gde je $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(D)$. Ako je pored toga i $\sim \cdot (E' \subset \cdot T_2(M) \cap P(D))$, onda je i $\sim \cdot (E' \subset \cdot S_2''(M))$, što znači da je dati spreg doista potencijalan. Ako nije takav slučaj, obrazujmo množinu R svih onih elemenata X konačne množine $T_2(M) \cap P(D)$ za koje nije zadovoljena relecija $\sim (E' \subset X)$, tj. za koje je $E' \subset X$. Pošto je takođe i R konačna množina, postoji sigurno bar jedan njen gornji ivični elemenat E''. Kako je $E' \subset E''$ i $\sim \cdot (E'' \subset \cdot R)$, takođe je i $\sim \cdot (E'' \subset \cdot T_2(M) \cap P(D))$ pa najzad i $\sim \cdot (E'' \subset \cdot S_2''(M))$, čime je stav dokazan.

6. 8. Ispitivanja kako o induktivnim sistemima tako i o induktivnim spregovima mogla bi se u više pravaca nastaviti, ali to ostavljamo za drugu priliku, a sada ćemo dati jednu definiciju analogu *definiciji* 4. 3. 1:

D 6. 8. 1. *Neka množina M pripada izvesnoj klasi množina C i neka je C' takođe neka klasa množina. Spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina od M naziva se karakterističnim spregom za M u okviru klase C, ako su propozicije:*

1. *M je elemenat klase C';*
2. *spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *je induktivan za M*

— ekvivalentne.

Očevidno da je karakterističan sistem $S(M)$ ekvivalentan karakterističnom spregu $(S(M), S(M))$.

Napomenimo na kraju da primena dobijenih rezultata takođe ima široko polje. Međutim mi ćemo u idućim odeljcima, samo ilustracije radi, navesti neke primere.

7. JOŠ NEKE FORMULACIJE PRINCIPA INDUKCIJE

7. 1. U uslovu 2 (**Pr** 1. 2. 2) zahteva se da za svaku nepraznu množinu $B \subset M$ postoji množina C za koju je $B \subset C \subseteq M$. Ustvari ovaj uslov zahteva da postoji izvesno preslikavanje φ sistema $S_1(M) \subseteq P(M)$ na sistem $P(M)$, takvo da za svaki ele-