ФОРМИРАЊЕ НА ЕДНА КЛАСА ПАРЦИЈАЛНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

ДАНИЦА ПЕРЧИНКОВА-В'ЧКОВА

Увод

1. *Ознаки.* — За парцијалните изводи на функцијата $z(x,y)$ по независно променливите x и y, ќе ја употребуваме ознаката

$$z_{mn} = \frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \, \partial y^n},$$

што ја употребувал и M. Falk [1]. Ако во вопросните релации се јавуваат само парцијални изводи на функцијата $z(x,y)$ од прв и втор ред по независно променливите x и y, ќе ги употребуваме Monge-овите ознаки

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Со X ($\neq$ const) е означена дадена функција од x, која е диференцијабилна потребен број пати.

Со Y ($\neq$ const) е означена дадена функција од y, која е, исто така, диференцијабилна потребен број пати.

Со f_k, F_k означивме *произволни* диференцијабилни функции по

$$u_k = a_k X + b_k Y, \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

каде a_k и b_k ни претставуваат произволно дадени константи што го исполнуваат условот

$$\frac{a_k}{b_k} \neq \lambda, \quad \lambda = \text{const}, \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Употребени се и ознаките:

$$f_k^{(\nu)}(u_k) = \frac{d^\nu f_k}{du_k^\nu}, \quad F_k^{(\nu)}(u_k) = \frac{d^\nu F_k}{du_k^\nu},$$

$$X^{(\nu)} = \frac{d^\nu X}{dx^\nu}, \quad Y^{(\nu)} = \frac{d^\nu Y}{dy^\nu}.$$

2. *Предмет на работата.* — Д. С. Митриновиќ [2] бавејќи се со една функционална равенка наведе без доказ, дека општото решение на парцијалната диференцијална равенка

$$\frac{r}{X'^2} - \frac{t}{Y'^2} - \left(\frac{X''}{X'^3}\, p - \frac{Y''}{Y'^3}\, q\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{p^2}{X'^2} - \frac{q^2}{Y'^2}\right) \tag{1}$$

е

$$z = f_1(X+Y)\, f_2(X-Y). \tag{2}$$

Исто така, во истата работа е наведено дека е

$$z = F_1(X+Y) + F_2(X-Y) \tag{3}$$

општо решение на равенката

$$\frac{r}{X'^2} - \frac{t}{Y'^2} - \left(\frac{X''}{X'^3}\, p - \frac{Y''}{Y'^3}\, q\right) = 0. \tag{4}$$

Во оваа работа ние ќе покажеме, со елиминација на произволните функции, што се јавуваат во (2) односно во (3), дека (2) е општо решение на (1) и дека (3) е општо решение на (4).

Потоа, оваа постапка за формирање на парцијална диференцијална равенка, со елиминирање на произволните функции, ќе ја примениме на случаите поопшти од овие, т. е на случајот

$$z = f_1(a_1 X + b_1 Y)\, f_2(a_2 X + b_2 Y),$$

односно

$$z = F_1(a_1 X + b_1 Y) + F_2(a_2 X + b_2 Y).$$

Д. С. Митриновиќ ни сугерира да ја примениме оваа постапка на случаите

$$z = f_1(a_1 X + b_1 Y)\, f_2(a_2 X + b_2 Y)\, f_3(a_3 X + b_3 Y),$$

$$z = f_1(a_1 X + b_1 Y)\, f_2(a_2 X + b_2 Y)\, f_3(a_3 X + b_3 Y)\, f_4(a_4 X + b_4 Y),$$

како и на поопштиот случај

$$z = \prod_{k=1}^{n} f_k(a_k X + b_k Y), \tag{5}$$

односно

$$z = F_1(a_1 X + b_1 Y) + F_2(a_2 X + b_2 Y) + F_3(a_3 X + b_3 Y),$$

$$z = F_1(a_1 X + b_1 Y) + F_2(a_2 X + b_2 Y) + F_3(a_3 X + b_3 Y) + F_4(a_4 X + b_4 Y),$$

и на крај на случајот

$$z=\sum_{k=1}^{n} F_k(a_k X+b_k Y). \tag{6}$$

И навистина, како што ќе биде покажано, можно е да се образува парцијална диференцијална равенка од ред n, ако се тргне од релацијата (5) односно (6).

Откако ја завршивме статијата наидовме на Falk-овата расправа [1], во која, помеѓу другото, тој се бавел со генеза на парцијални диференцијални равенки, тргнувајќи од нивните решенија што содржат извесен број произволни функции.

M. Falk дал некои општи заклучоци и ги применил на некои специјални случаеви, кои се цитирани, во литературата како на пр. во учебникот на Н. Салтиков {да се види [3], стр. 18}.

Во нашата работа не е третирано општо, прашањето за постанокот на парцијалните равенки, како што тоа го направил Falk, но нашите резултати се поопшти од оние, што Falk ги навел како примена на своите општи посматрања.

I.

1. 1 Како што рековме порано, прво ќе покажеме, со елиминација на произволните функции f_1 и f_2 од низата релации што ќе ги добиеме диференцирајќи го (2) два пати по независно променливите x и y, дека (2) е општо решение на (1).

Така ги добиваме следните релации (I)

$$\begin{aligned}
&f_1' f_2+f_1 f_2'=\frac{p}{X'}, \qquad f_1' f_2-f_1 f_2'=\frac{q}{Y'},\\
&f_1'' f_2+2 f_1' f_2'+f_1 f_2''=\frac{r}{X'^2}-\frac{X''}{X'^3}\,p,\\
&f_1'' f_2-f_1 f_2''=\frac{s}{X' Y'},\\
&f_1'' f_2-2 f_1' f_2'+f_1 f_2''=\frac{t}{Y'^2}-\frac{Y''}{Y'^3}\,q.
\end{aligned} \tag{I}$$

Елиминацијата на произволните функции можеме да ја извршиме на неколку начини.

а) Од релациите (I) можеме лесно да најдеме

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
f_1' f_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{X'} + \frac{q}{Y'}\right),\\
f_1 f_2' &= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{X'} - \frac{q}{Y'}\right),\\
f_1' f_2' &= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{r}{X'^2} - \frac{X''}{X'^3}\,p\right) - \left(\frac{t}{Y'^2} - \frac{Y''}{Y'^3}\,q\right)\right].
\end{aligned}
$$

За елиминација на произволните функции ќе си послужиме со изразот

$$
(8)\qquad \frac{f_1' f_2'}{(f_1' f_2)(f_1 f_2')} = \frac{1}{z},
$$

во кој, ако ги смениме изразите од (7), ќе добиеме

$$
\frac{r}{X'^2} - \frac{t}{Y'^2} - \left(\frac{X''}{X'^3}\,p - \frac{Y''}{Y'^3}\,q\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{p^2}{X'^2} - \frac{q^2}{Y'^2}\right),
$$

а тоа е парцијалната диференцијална равенка (1).

b) Ако изразите, што се наведуваат на левите и десните страни во релациите (1) ги поделиме со $f_1 \cdot f_2$ и ако поради едноставност на формулите се послужиме со ознаката

$$
(9)\qquad \Delta_n(f) \equiv \Delta_n\{f(u)\} \equiv \frac{1}{f(u)} \cdot \frac{d^n f(u)}{du^n}
$$

што ја вовел Михаило Петровиќ {да се види [4], стр. 1}, ќе добиеме:

$$
\begin{aligned}
\Delta_1(f_1) + \Delta_1(f_2) &= \frac{p}{zX'},\\
\Delta_1(f_1) - \Delta_1(f_2) &= \frac{q}{zY'},\\
\Delta_2(f_1) + \Delta_2(f_2) + 2\,\Delta_1(f_1)\cdot\Delta_1(f_2) &= \frac{1}{z}\left(\frac{r}{X'^2} - \frac{X''}{X'^3}\,p\right),\\
\Delta_2(f_1) - \Delta_2(f_2) &= \frac{1}{z}\cdot\frac{s}{X'Y'},\\
\Delta_2(f_1) + \Delta_2(f_2) - 2\,\Delta_1(f_1)\cdot\Delta_1(f_2) &= \frac{1}{z}\left(\frac{t}{Y'^2} - \frac{Y''}{Y'^3}\,q\right),
\end{aligned}
$$

од каде, од првите две равенки наоѓаме

$$
\begin{aligned}
\Delta_1(f_1) &= \frac{1}{2z}\left(\frac{p}{X'} + \frac{q}{Y'}\right),\\
\Delta_1(f_2) &= \frac{1}{2z}\left(\frac{p}{X'} - \frac{q}{Y'}\right).
\end{aligned}
$$

Ако ги замениме овие вредности за $\Delta_1(f_1)$ и $\Delta_1(f_2)$ во другите три равенки, ќе добиеме три линеарни равенки по непознатите $\Delta_2(f_1)$ и $\Delta_2(f_2)$, од каде резултатот на елиминацијата е

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dfrac{r}{X'^2} - \dfrac{X''}{X'^3}\, p - \dfrac{1}{2z}\left(\dfrac{p^2}{X'^2} - \dfrac{q^2}{Y'^2}\right) \\ 1 & -1 & \dfrac{s}{X'\,Y'} \\ 1 & 1 & \dfrac{t}{Y'^2} - \dfrac{Y''}{Y'^3}\, q + \dfrac{1}{2z}\left(\dfrac{p^2}{X'^2} - \dfrac{q^2}{Y'^2}\right) \end{vmatrix} = 0$$

или (1).

c) Ако изразите, што се наоѓаат на левите и десните страни во првите две равенки од релациите (I) ги поделиме со $f_1 f_2$, т. е

$$\frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2} = \frac{p}{zX'},$$

$$\frac{f_1'}{f_1} - \frac{f_2'}{f_2} = \frac{q}{zY'},$$

и сега диференцираме по x и y, и ако се послужиме со ознаката

$$\text{(10)} \qquad \Delta_n^{(k)}(f) \equiv \Delta_n^{(k)}\{f(u)\} \equiv \frac{d^k}{du^k}\left[\frac{1}{f(u)} \cdot \frac{d^n f(u)}{du^n}\right],$$

што исто така ја вовел Михаило Петровић {да се види [4], стр. 1} ќе добиеме

$$\Delta_1^{(1)}(f_1) + \Delta_1^{(1)}(f_2) = \frac{1}{z}\left(\frac{r}{X'^2} - \frac{X''}{X'^3}\, p\right) - \frac{1}{z^2} \cdot \frac{p^2}{X'^2},$$

$$\Delta_1^{(1)}(f_1) - \Delta_1^{(1)}(f_2) = \frac{1}{z} \cdot \frac{s}{X'\,Y'} - \frac{1}{z^2} \cdot \frac{pq}{X'\,Y'},$$

$$\Delta_1^{(1)}(f_1) + \Delta_1^{(1)}(f_2) = \frac{1}{z}\left(\frac{t}{Y'^2} - \frac{Y''}{Y'^3}\, q\right) - \frac{1}{z^2} \cdot \frac{q^2}{Y'^2},$$

од каде елиминирајќи ги $\Delta_1^{(1)}(f_1)$ и $\Delta_1^{(1)}(f_2)$ добиваме

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{r}{X'^2} - \frac{X''}{X'^3}\,p - \frac{1}{z}\cdot\frac{p^2}{X'^2} \\ 1 & -1 & \frac{s}{X'\,Y'} - \frac{1}{z}\cdot\frac{pq}{X'\,Y'} \\ 1 & 1 & \frac{t}{Y'^2} - \frac{Y''}{Y'^3}\,q - \frac{1}{z}\cdot\frac{q^2}{Y'^2} \end{vmatrix} = 0,$$

односно (1).

1. 2 Ќе покажеме сега, дека е (3) општо решение на (4) со елиминација на произволните функции F_1 и F_2, за која цел ќе го диференцираме изразот (3) двапати по независно променливите x и y, па добиваме

$$F_1' + F_2' = \frac{p}{X'}, \qquad F_1' - F_2' = \frac{q}{Y'},$$

$$F_1'' + F_2'' = \frac{r}{X'^2} - \frac{X''}{X'^3}\,p,$$

$$F_1'' - F_2'' = \frac{s}{X'\,Y'},$$

$$F_1'' + F_2'' = \frac{t}{Y'^2} - \frac{Y''}{Y'^3}\,q.$$

Оттука

$$F_1'' + F_2'' = \frac{r}{X'^2} - \frac{X''}{X'^3}\,p = \frac{t}{Y'^2} - \frac{Y''}{Y'^3}\,q$$

или

$$\frac{r}{X'^2} - \frac{t}{Y'^2} - \left(\frac{X''}{X'^3}\,p - \frac{Y''}{Y'^3}\,q\right) = 0$$

а тоа е равенката (4).

II.

2. 1 Ако тргнеме од поопштиот случај

$$z = f_1\,(a_1\,X + b_1\,Y)\,f_2\,(a_2\,X + b_2\,Y)$$

и ги примениме постапките од 1. 1 a), b) и c) ќе дојдеме до парцијалната равенка од II ред

$$\frac{b_1\,b_2}{X'^2}\,r - \frac{a_1\,b_2 + a_2\,b_1}{X'\,Y'}\,s + \frac{a_1\,a_2}{Y'^2}\,t - \left(b_1\,b_2\,\frac{X''}{X'^3}\,p + a_1\,a_2\,\frac{Y''}{Y'^3}\,q\right) =$$

$$= \frac{1}{z}\left[\frac{b_1\,b_2}{X'^2}\,p^2 - \frac{a_1\,b_2 + a_2\,b_1}{X'\,Y'}\,pq + \frac{a_1\,a_2}{Y'^2}\,q^2\right] \tag{11}$$

што е линеарна само по највисоките изводи.

Ако во оваа равенка ставиме $a_1 = b_1 = a_2 = 1,\ b_2 = -1$, ја добиваме равенката (1).

2. 2 Тргнувајќи пак од

$$z = F_1(a_1 X + b_1 Y) + F_2(a_2 X + b_2 Y)$$

и постапувајќи како во 1. 2 доаѓаме до равенката

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \frac{r}{X'^2} - \frac{X''}{X'^3}\, p \\ a_1 b_1 & a_2 b_2 & \frac{s}{X'Y'} \\ b_1^2 & b_2^2 & \frac{t}{Y'^2} - \frac{Y''}{Y'^3}\, q \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

или

$$b_1 b_2 \frac{r}{X'^2} - (a_1 b_2 + a_2 b_1) \frac{s}{X'Y'} + a_1 a_2 \frac{t}{Y'^2} - b_1 b_2 \frac{X''}{X'^3}\, p - a_1 a_2 \frac{Y''}{Y'^3}\, q = 0.$$

Ако ставиме $a_1 = b_1 = a_2 = 1,\ b_2 = -1$, ја добиваме равенката (4).

III.

3. 1 Ако тргнеме од функцијата

$$z = f_1(a_1 X + b_1 Y)\, f_2(a_2 X + b_2 Y)\, f_3(a_3 X + b_3 Y)$$

и ја диференцираме три пати по x и y, служејќи се со ознаките (9) и (10), од третото диференцирање ги добиваме следните релации (11)

$$a_1^3 \Delta_1^{(2)}(f_1) + a_2^3 \Delta_1^{(2)}(f_2) + a_3^3 \Delta_1^{(2)}(f_3) =$$
$$= \frac{1}{z}\, \alpha_{14} - \frac{1}{z^3 X'^3} \left(3 z_{20} z_{10} z - 2 z_{10}^3 - 3 \frac{X''}{X'} z_{10}^2 z\right),$$

$$a_1^2 b_1 \Delta_1^{(2)}(f_1) + a_2^2 b_2 \Delta_1^{(2)}(f_2) + a_3^2 b_3 \Delta_1^{(2)}(f_3) =$$
$$= \frac{1}{z}\, \alpha_{24} - \frac{1}{z^3 X'^2 Y'} \left(z_{20} z_{01} z + 2 z_{11} z_{10} z - 2 z_{10}^2 z_{01} - \frac{X''}{X'} z_{10} z_{01} z\right),$$

$$a_1 b_1^2 \Delta_1^{(2)}(f_1) + a_2 b_2^2 \Delta_1^{(2)}(f_2) + a_3 b_3^2 \Delta_1^{(2)}(f_3) =$$
$$= \frac{1}{z}\, \alpha_{34} - \frac{1}{z^3 X' Y'^2} \left(z_{02} z_{10} z + 2 z_{11} z_{01} z - 2 z_{01}^2 z_{10} - \frac{Y''}{Y'} z_{10} z_{01} z\right),$$

$b_1^3\,\Delta_1^{(2)}(f_1)+b_2^3\,\Delta_1^{(2)}(f_2)+b_3^3\,\Delta_1^{(2)}(f_3)=$

$$=\frac{1}{z}\,\alpha_{44}-\frac{1}{z^3\,Y'^3}\left(3\,z_{02}z_{01}z-2\,z_{01}^3-3\,\frac{Y''}{Y'}\,z_{01}^2\,z\right);$$

каде

$$\alpha_{14}=\frac{1}{X'^3}\left[z_{30}-3\,\frac{X''}{X'}\,z_{20}-\left(\frac{X'''}{X'}-3\,\frac{X''^2}{X'^2}\right)z_{10}\right],$$

$$\alpha_{24}=\frac{1}{X'^2\,Y'}\left(z_{21}-\frac{X''}{X'}\,z_{11}\right),$$

$$\alpha_{34}=\frac{1}{X'\,Y'^2}\left(z_{12}-\frac{Y''}{Y'}\,z_{11}\right),$$

$$\alpha_{44}=\frac{1}{Y'^3}\left[z_{03}-3\,\frac{Y''}{Y'}\,z_{02}-\left(\frac{Y'''}{Y'}-3\,\frac{Y''^2}{Y'^2}\right)z_{01}\right].$$

Од релациите (II) елиминирајќи ги величините $\Delta_1^{(2)}(f_1)$, $\Delta_1^{(2)}(f_2), \Delta_1^{(2)}(f_3)$ добиваме

$$\text{(13)}\qquad \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \omega_{14} \\ a_1^2\,b_1 & a_2^2\,b_2 & a_3^2\,b_3 & \omega_{24} \\ a_1\,b_1^2 & a_2\,b_2^2 & a_3\,b_3^2 & \omega_{34} \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & \omega_{44} \end{vmatrix}=0$$

каде се ω_{i4} $(i=1, 2, 3, 4)$ респективно изразите на десните страни на релациите (II), поделени со $\frac{1}{z}$.

Како што се гледа, се добива парцијална диференцијална равенка од трет ред, линеарна само по изводите од трет ред.

3. 2 Ако ја примениме постапката од 3. 1 на изразот

$$z=\prod_{k=1}^{4} f_k\,(a_k\,X+b_k\,Y)$$

ќе дојдеме до парцијалната равенка од IV ред

$$
(14)\qquad \begin{vmatrix}
a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & \omega_{15} \\
a_1^3 b_1 & a_2^3 b_2 & a_3^3 b_3 & a_4^3 b_4 & \omega_{25} \\
a_1^2 b_1^2 & a_2^2 b_2^2 & a_3^2 b_3^2 & a_4^2 b_4^2 & \omega_{35} \\
a_1\, b_1^3 & a_2\, b_2^3 & a_3\, b_3^3 & a_4\, b_4^3 & \omega_{45} \\
b_1^4 & b_2^4 & b_3^4 & b_4^4 & \omega_{55}
\end{vmatrix} = 0,
$$

каде

$$
\omega_{15} = \alpha_{15} - \frac{1}{z^3 X'^4}\Big[4 z_{30} z_{10} z^2 + 3 z_{20}^2 z^2 - 12 z_{20} z_{10}^2 z - 18 \frac{X''}{X'} z_{20} z_{10} z^2
+ 6 z_{10}^4 + 12 \frac{X''}{X'} z_{10}^3 z + \Big(4 \frac{X'''}{X'} - 15 \frac{X''^2}{X'^2}\Big) z_{10}^2 z^2\Big],
$$

$$
\omega_{25} = \alpha_{25} - \frac{1}{z^3 X'^3 Y'}\Big[z_{30} z_{01} z^2 + 3 z_{21} z_{10} z^2 + 3 z_{20} z_{11} z^2 - 6 z_{20} z_{10} z_{01} z
- 3 \frac{X''}{X'} z_{20} z_{01} z^2 - 6 z_{11} z_{10}^2 z - 6 \frac{X''}{X'} z_{11} z_{10} z^2 + 6 z_{10}^3 z_{01}
+ 6 \frac{X''}{X'} z_{10}^2 z_{01} z - \Big(\frac{X'''}{X'} - 3 \frac{X''^2}{X'^2}\Big) z_{10} z_{01} z^2\Big],
$$

$$
\omega_{35} = \alpha_{35} - \frac{1}{z^3 X'^2 Y'^2}\Big(2 z_{21} z_{01} z^2 + 2 z_{12} z_{10} z^2 + z_{20} z_{02} z^2 + 2 z_{11}^2 z^2
- 2 z_{20} z_{01}^2 z - 2 z_{02} z_{10}^2 z - \frac{Y''}{Y'} z_{20} z_{01} z^2 - \frac{X''}{X'} z_{02} z_{10} z^2
- 8 z_{11} z_{10} z_{01} z - 2 \frac{Y''}{Y'} z_{11} z_{10} z^2 - 2 \frac{X''}{X'} z_{11} z_{01} z^2 + 6 z_{01}^2 z_{10}^2
+ 2 \frac{Y''}{Y'} z_{10}^2 z_{01} z + 2 \frac{X''}{X'} z_{10} z_{01}^2 z + \frac{X'' Y''}{X' Y'} z_{10} z_{01} z^2\Big),
$$

$$
\omega_{45} = \alpha_{45} - \frac{1}{z^3 X' Y'^3}\Big[z_{03} z_{10} z^2 - 3 z_{12} z_{01} z^2 + 3 z_{11} z_{02} z^2 - 6 z_{02} z_{10} z_{01} z
- 3 \frac{Y''}{Y'} z_{02} z_{10} z^2 - 6 z_{11} z_{01}^2 z - 6 \frac{Y''}{Y'} z_{11} z_{01} z^2 + 6 z_{01}^3 z_{10}
+ 6 \frac{Y''}{Y'} z_{01}^2 z_{10} z - \Big(\frac{Y'''}{Y'} - 3 \frac{Y''^2}{Y'^2}\Big) z_{10} z_{01} z^2,
$$

$$\omega_{55} = \alpha_{55} - \frac{1}{z^3 Y'^4}\left[4 z_{03} z_{01} z^2 + 3 z_{02}^2 z^2 - 12 z_{02} z_{01}^2 z - 18 \frac{Y''}{Y'} z_{02} z_{01} z^2 \right.$$

$$\left. + 6 z_{01}^4 + 12 \frac{Y''}{Y'} z_{01}^3 z + \left(4 \frac{Y'''}{Y'} - 15 \frac{Y''^2}{Y'^2}\right) z_{01}^2 z^2 \right],$$

а

$$\alpha_{15} = \frac{1}{X'^4}\left[z_{40} - 6 \frac{X''}{X'} z_{30} + \left(15 \frac{X''^2}{X'^2} - 4 \frac{X'''}{X'}\right) z_{20} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{X^{\text{IV}}}{X'} - 10 \frac{X'' X'''}{X'^2} + 15 \frac{X''^3}{X'^3}\right) z_{10} \right],$$

$$\alpha_{25} = \frac{1}{X'^3 Y'}\left[z_{31} - 3 \frac{X''}{X'} z_{21} - \left(\frac{X'''}{X'} - 3 \frac{X''^2}{X'^2}\right) z_{11}\right],$$

$$\alpha_{35} = \frac{1}{X'^2 Y'^2}\left(z_{22} - \frac{Y''}{Y'} z_{21} - \frac{X''}{X'} z_{12} + \frac{X'' Y''}{X' Y'} z_{11}\right),$$

$$\alpha_{45} = \frac{1}{X' Y'^3}\left[z_{13} - 3 \frac{Y''}{Y'} z_{12} - \left(\frac{Y'''}{Y'} - 3 \frac{Y''^2}{Y'^2}\right) z_{11}\right],$$

$$\alpha_{55} = \frac{1}{Y'^4}\left[z_{04} - 6 \frac{Y''}{Y'} z_{03} + \left(15 \frac{Y''^2}{Y'^2} - 4 \frac{Y'''}{Y'}\right) z_{02} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{Y^{\text{IV}}}{Y'} - 10 \frac{Y'' Y'''}{Y'^2} + 15 \frac{Y''^3}{Y'^3}\right) z_{01} \right].$$

3. 3 На тој начин можеме да формираме парцијални диференцијални равенки од петти, шести и т. н. ред. Парцијална равенка од n-ти ред ќе формираме ако тргнеме од релацијата

$$z = \prod_{k=1}^{n} f_k (a_k X + b_k Y). \tag{5}$$

Постапувајќи како во претходните случаи, резултатот на елиминацијата на произволните функции од (5) е парцијална диференцијална равенка од n-ти ред, линеарна само по највисоките изводи на функцијата. Таа парцијална равенка е дадена во облик

$$(15)\qquad \delta^*_{n+1} \equiv \begin{vmatrix} a_1^n & a_2^n & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_n^n & \omega_{1,\,n+1} \\ a_1^{n-1} b_1 & a_2^{n-1} b_2 & & a_n^{n-1} b_n & \omega_{2,\,n+1} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_1 b_1^{n-1} & a_2 b_2^{n-1} & & a_n b_n^{n-1} & \omega_{n,\,n+1} \\ b_1^n & b_2^n & & b_n^n & \omega_{n+1,\,n+1} \end{vmatrix} = 0$$

Елементите од k-та колона $(k=1, 2, \dots, n)$, од оваа детерминанта, се добиваат кога биномот $(a_k+b_k)^n$ ќе се развие по биномната формула и во секој собирок ќе се изостават биномните коефициенти. Сите тие елементи се константи.

Само во елементите од $(n+1)$-та колона се појавуваат независно променливите, како едноставни комбинации од изводите на функциите X и Y, функцијата и сите парцијални изводи на функцијата, од први до n-ти ред. Елементот од првата врста од $(n+1)$-та колона содржи само парцијални изводи по x и се јавува само независно променливата x во облик на разни изводи од X. Елементот пак од $(n+1)$-та врста $(n+1)$-та колона содржи само парцијални изводи по y и се јавува само независно променливата y во облик на разни изводи од Y. Функцијата $z(x,y)$ се јавува и во едниот, и во другиот елемент. Изразите за елементите од првата и $(n+1)$-та врста, како и втората и n-тата, третата и $(n-1)$-та и т. н. кои се еднакво оддалечени од почетната и крајната врста, можат да се напишат со еден израз и само со пермутација на независно променливите и нивните изводи се добива едниот, односно другиот израз. Тоа е за елементите од $(n+1)$-та колона. И елементите од првите n-колони, кои се еднакво оддалечени од првата и последната врста, знаејќи го едниот, другиот се добива со пермутација на a_k и b_k $(k=1, 2, \dots, n)$. Елементите $\omega_{i,n+1}$ $(i=1, 2, \dots, n+1)$ се независни од a_k, b_k.

Интересно е тоа што во сите собирци во кои парцијалните изводи се јавуваат линеарно не се јавува z експлицитно, а во сите други собирци се јавува z.

Така сите елементи од $(n+1)$-та колона можат да се напишат во облик

$$(16)\qquad \omega_{i,\,n+1} = \alpha_{i,\,n+1} + \frac{1}{z^{n-1}}\,\beta_{i,n+1} \qquad (i=1, 2, \dots, n+1),$$

каде што $\alpha_{i,\,n+1}$ е линеарна функција по парцијалните изводи во која не фигурира z експлицитно, а $\beta_{i,\,n+1}$ е еден полином по z и по парцијалните изводи. И во линеарната функција и во полиномот независно променливите се јавуваат како едноставни комбинации од изводите на функциите X и Y.

IV.

4. 1 Сега да ја разгледаме функцијата

$$z = F_1(a_1 X + b_1 Y) + F_2(a_2 X + b_2 Y) + F_3(a_3 X + b_3 Y).$$

Диференцирајќи ја трипати по независно променливите x и y, од третото диференцирање ги добиваме следните изводни равенки:

$$a_1^3 F_1''' + a_2^3 F_2''' + a_3^3 F_3''' = \alpha_{14}$$

$$a_1^2 b_1 F_1''' + a_2^2 b_2 F_2''' + a_3^2 b_3 F_3''' = \alpha_{24}$$

$$a_1 b_1^2 F_1''' + a_2 b_2^2 F_2''' + a_3 b_3^2 F_3''' = \alpha_{34}$$

$$b_1^3 F_1''' + b_2^3 F_2''' + b_3^3 F_3''' = \alpha_{44}$$

каде α_{i4} $(i = 1, 2, 3, 4)$ се вредностите од стр. 58.

Оттука елиминирајќи ги функциите F_1''', F_2''' и F_3'' добиваме

$$\delta_4 \equiv \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \alpha_{14} \\ a_1^2 b_1 & a_2^2 b_2 & a_3^2 b_3 & \alpha_{24} \\ a_1 \ b_1^2 & a_2 \ b_2^2 & a_3 \ b_3^2 & \alpha_{34} \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\frac{b_1 b_2 b_3}{X'^3} z_{30} - \frac{a_1 b_2 b_3 + a_2 b_1 b_3 + a_3 b_1 b_2}{X'^2 Y'} z_{21} + \frac{a_2 a_3 b_1 + a_1 a_3 b_2 + a_1 a_2 b_3}{X' Y'^2} z_{12}$$

$$- \frac{a_1 a_2 a_3}{Y'^3} z_{03} - 3 b_1 b_2 b_3 \frac{X''}{X'^4} z_{20} + \left[(a_1 b_2 b_3 + a_2 b_1 b_3 + a_3 b_1 b_2) \frac{X''}{X'^3 Y'} - \right.$$

$$\left. - (a_2 a_3 b_1 + a_1 a_3 b_2 + a_1 a_2 b_3) \frac{Y''}{X' Y'^3} \right] z_{11} + 3 a_1 a_2 a_3 \frac{Y''}{Y'^4} z_{02} - b_1 b_2 b_3 \left(\frac{X'''}{X'^4} - \right.$$

$$\left. - 3 \frac{X''^2}{X'^5} \right) z_{10} + a_1 a_2 a_3 \left(\frac{Y''}{Y'^4} - 3 \frac{Y''^2}{Y'^5} \right) z_{01} = 0.$$

Како што гледаме, добиваме линеарна парцијална диференцијална равенка од III ред, во која z не се јавува експлицитно.

4. 2 Ако ја примениме постапката од 4. 1 на изразот

$$z = \sum_{k=1}^{4} F_k\,(a_k X + b_k Y)$$

ќе дојдеме до парцијалната равенка

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & \alpha_{15} \\ a_1^3\, b_1 & a_2^3\, b_2 & a_3^3\, b_3 & a_4^3\, b_4 & \alpha_{25} \\ a_1^2\, b_1^2 & a_2^2\, b_2^2 & a_3^2\, b_3^2 & a_4^2\, b_1^2 & \alpha_{35} \\ a_1\, b_1^3 & a_2\, b_2^3 & a_3\, b_3^3 & a_4\, b_4^3 & \alpha_{45} \\ b_1^4 & b_2^4 & b_3^4 & b_4^4 & \alpha_{55} \end{vmatrix} = 0$$

каде α_{i5} $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ се вредностите од стр. 60.

Како што се гледа, тоа е линеарна парцијална диференцијална равенка од IV ред, во која не се јавува z експлицитно.

4. 3 На тој начин можеме да формираме линеарни парцијални диференцијални равенки од петти, шести и т. н. ред, во кои не се јавува z експлицитно.

Така, ако тргнеме од релацијата

$$z = \sum_{k=1}^{n} F_k\,(a_k X + b_k Y)$$

со елиминација на произволните функции F_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, ќе дојдеме до линеарна парцијална диференцијална равенка од n-ти ред, дадена во облик

$$(18)\qquad \delta_{n+1}^{**} \equiv \begin{vmatrix} a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n & \alpha_{1,\,n+1} \\ a_1^{n-1}\, b_1 & a_2^{n-1}\, b_2 & & a_n^{n-1}\, b_n & \alpha_{2,\,n+1} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_1\, b_1^{n-1} & a_2\, b_2^{n-1} & & a_n\, b_n^{n-1} & \alpha_{n,\,n+1} \\ b_1^n & b_2^n & & b_n^n & \alpha_{n+1,\,n+1} \end{vmatrix} = 0,$$

каде што сите елементи од првите n колони се константи, и се исти како елементите од првите n колони од детерминантата (15), а елементите во $(n+1)$-та колона ги содржат во себе независно променливите што се јавуваат како едноставни комбинации од изводите на функциите X и Y, и сите парцијални изводи на функцијата од првиот до n-ти ред, и тоа само линеарно. Елементите $\alpha_{i,\,n+1}$ $(i=1, 2, \ldots, n+1)$ се независни од параметрите a_k, b_k $(k=1, 2, \ldots, n)$.

5. Интересно е дека меѓу детерминантите (15) и (18) постои следната врска

$$\delta_{n+1}^{*} = \delta_{n+1}^{**} + \frac{1}{z^{n-1}}\,\delta_{n+1},$$

каде што δ_{n+1} е пак детерминанта од $n+1$ ред во која елементите од првите n колони се исти како и елементите од првите n колони на детерминантите (15) и (18), а $(n+1)$-та колона ги содржи изразите $\beta_{i,n+1}$ $(i=1, 2, \ldots, n+1)$ што се порано дефинирани.

(Работено при Катедрата по математика на Техничките факултети при Универзитетот во Белград, од 1. X. до 30. XII. 1955).

БИБЛИОГРАФИЈА

[1] M. Falk, *On the Integration of partial differential Equations of the N^{th} order with one dependent and two independent Variables.* (Presented to the Royal Society of Upsala, the 12 April 1871), 1872, 40 pages, Upsala.

[2] D. S. Mitrinovitch, *Sur une équation fonctionnelle* (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t 237, p. 550—551, 1953, Paris).

[3] Н. Салтиков, *Теорија парцијалних једначина другог реда,* 1952, Београд, 121 страна.

[4] М. Петровић, *Један диференцијални алгоритам и његове примене* (Посебна издања Српске академије наука, књига 111, 1936, Београд, 235 страна).

[5] D. Perčinkova-V'čkova, *Sur deux équations aux dérivées partielles ayant une structure intéressante* (Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, t. 25. 1956, p. 3—4).

Par D. Perčinkova-V'čkova

FORMATION D'UNE CLASSE INTÉRESSANTE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

(Résumé)

1. *Notations.* 1° $z=z(x,y)$, $z_{mn}=\partial^{m+n}z/\partial x^m\,\partial y^n$;

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y};\ r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

2° Les f_k et F_k, des fonctions quelconques des arguments

$$u_k=a_k X+b_k Y,\quad (k=1,2,\ldots,n),$$

supposées n-fois dérivables {les a_k et b_k désignent des constantes arbitraires telles que

$$a_k/b_k\neq\lambda,\quad (\lambda=\text{const};\quad k=1,2,\ldots,n)\};$$

3° X ($\neq$ const) une fonction donnée de x et Y ($\neq$ const) une fonction donnée de y, toutes les deux supposées dérivables, avec $X^{(k)}=d^kX/dx$, $Y^{(k)}=d^kY/dy$.

2. Indiquons, tout d'abord, un cas spécial suivant.

Les équations aux dérivées partielles

$$\text{(1)}\qquad \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \omega_{14}\\ a_1^2 b_1 & a_2^2 b_2 & a_3^2 b_3 & \omega_{24}\\ a_1\ b_1^2 & a_2\ b_2^2 & a_3\ b_3^2 & \omega_{34}\\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & \omega_{44}\end{vmatrix}=0$$

et

$$\text{(2)}\qquad \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \alpha_{14}\\ a_1^2 b_1 & a_2^2 b_2 & a_3^2 b_3 & \alpha_{24}\\ a_1\ b_1^2 & a_2\ b_2^2 & a_3\ b_3^2 & \alpha_{34}\\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & \alpha_{44}\end{vmatrix}=0$$

ont, comme solutions générales, les fonctions respectives:

$$z=\prod_{k=1}^{3} f_k(a_k X+b_k Y),$$

$$z=\sum_{k=1}^{3} F_k(a_k X+b_k Y).$$

Les ω_{i4} $(i=1,2,3,4)$ et α_{i4} $(i=1,2,3,4)$ sont liés par les relations que voici:

$$\omega_{14}=\alpha_{14}-\frac{1}{z^2X'^3}\left(3\,z_{20}\,z_{10}\,z-2\,z_{10}^3-3\,\frac{X''}{X'}\,z_{10}^2\,z\right),$$

$$\omega_{24}=\alpha_{24}-\frac{1}{z^2X'^2Y'}\left(z_{20}\,z_{01}\,z+2\,z_{11}\,z_{10}\,z-2\,z_{10}^2z_{01}-\frac{X'}{X'}\,z_{10}z_{01}z\right),$$

$$\omega_{34}=\alpha_{34}-\frac{1}{z^2X'Y'^2}\left(z_{02}\,z_{10}\,z+2\,z_{11}\,z_{01}\,z-2\,z_{01}^2\,z_{10}-\frac{Y''}{Y'}\,z_{10}z_{01}z\right),$$

$$\omega_{44}=\alpha_{44}-\frac{1}{z^2Y'^3}\left(3\,z_{02}\,z_{01}\,z-2\,z_{01}^3-3\,\frac{Y''}{Y'}\,z_{01}^2\,z\right);$$

où

$$\alpha_{14}=\frac{z_{30}}{X'^3}-3\frac{X''\,z_{20}}{X'^4}-\left(\frac{X'''}{X'^4}-3\frac{X''^2}{X'^5}\right)z_{10}$$

$$\alpha_{24}=\frac{z_{21}}{X'^2Y'}-\frac{X''\,z_{11}}{X'^3Y'},$$

$$\alpha_{34}=\frac{z_{12}}{X'Y'^2}-\frac{Y''\,z_{11}}{X'Y'^3},$$

$$\alpha_{44}=\frac{z_{03}}{Y'^3}-3\frac{Y''\,z_{02}}{Y'^4}-\left(\frac{Y'''}{Y'^4}-3\frac{Y''^2}{Y'^5}\right)z_{01}.$$

3. Pour passer au cas général, considérons la fonction

$$z=\prod_{k=1}^{n}f_k\,(a_k\,X+b_k\,Y).$$

Par un artifice de calcul nous avons réussi de montrer que cette fonction est la solution de l'équation aux dérivées partielles d'ordre n que voic

$$(3)\qquad \delta^*_{n+1}\equiv\begin{vmatrix} a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & \omega_{1,n+1}\\ a_1^{n-1}b_1 & a_2^{n-1}b_2 & & a_n^{n-1}b_n & \omega_{2,n+1}\\ \vdots & & & & \\ a_1\,b_1^{n-1} & a_2\,b_2^{n-1} & & a_n\,b_n^{n-1} & \omega_{n,n+1}\\ b_1^n & b_2^n & & b_n^n & \omega_{n+1,n+1}\end{vmatrix}=0.$$

Tous les éléments du déterminant δ^*_{n+1} dans les n premières colonnes sont des constantes, tandis que les éléments de la dernière colonne sont des combinaisons simples des dérivées des fonctions X et Y, de z, et des dérivées partielles, $\partial^{\lambda+\mu}z/\partial x^{\lambda}\,\partial y^{\mu}$ ($\lambda+\mu\leqslant n$, $\lambda=0,1,2,\dots,n$; $\mu=0,1,2,\dots,n$). Les éléments $\omega_{i,n+1}$ s'écrivent sous la forme suivante

$$\omega_{i,n+1}=\alpha_{i,n+1}+\frac{1}{z^{n-1}}\,\beta_{i,n+1},\qquad (i=1,2,\dots,n+1),$$

où $\alpha_{i,n+1}$ présente une fonction linéaire par rapport aux derivées partielles $\partial^{\lambda+\mu}z/\partial x^{\lambda}\,\partial y^{\mu}$, z n'intervenant pas ici explicitement, et $\beta_{i,n+1}$ étant un polynôme en z et en dérivées partielles.

Pour $n=2$ on obtient l'équation (11)[1], pour $n=3$ l'équation (1), pour $n=4$ l'équation (14)[1]) où ω_{i5} $(i=1,2,3,4,5)$ sont les expressions indiquées à la page 59 et 60.

4. En partant de l'expression suivante

$$z=\sum_{k=1}^{n} F_k\,(a_k\,X+b_k\,Y)$$

on trouve que celle-ci est la solution de l'équation aux dérivées partielles que voici:

$$(4)\qquad \delta^{**}_{n+1}\equiv\begin{vmatrix} a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & \alpha_{1,n+1} \\ a_1^{n-1}\,b_1 & a_2^{n-1}\,b_2 & & a_n^{n-1}\,b_n & \alpha_{2\,n+1} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_1\,b_1^{n-1} & a_2\,b_2^{n-1} & & a_n\,b_n^{n-1} & \alpha_{n,n+1} \\ b_1^n & b_2^n & & b_n^n & \alpha_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

Tous les éléments des n premières colonnes, ici aussi, sont des constantes, tandis que les éléments de la dernière colonne dépendent des variables indépendantes par l'intermédiaire des combinaisons simples des dérivées des fonctions X et Y. Toutes les dérivées partielles, à partir du premier jusquà l'ordre n interviennent ici, et cela seulement linéairement.

Ainsi, pour $n=2$ on obtient l'équation (12)[1]), pour $n=3$ l'équation (2), pour $n=4$ l'équation (17)[1]), où α_{i5} sont les expressions données à la page 60.

5. Entre les déterminants (3) et (4) il existe la relation simple

$$\delta^{*}_{n+1}=\delta^{**}_{n+1}+\frac{1}{z^{n-1}}\,\delta_{n+1},$$

où δ_{n+1} est, aussi, un déterminant dont l'ordre est $n+1$. Tous les éléments des n premières colonnes sont identiques aux éléments des n premières colonnes des determinants (3) et (4). La colonne $n+1$ renferme les expressions $\beta_{i,n+1}$, qui sont données plus haut.

6. D. S. Mitrinovitch nous a donné l'idée d'étudier le sujet de ce travail et il a bien voulu s'intéresser à ce travail pendant de son élaboration. Ce travail se rattache à une de ses notes {cf. [2]}.

Un résumé de ce travail a été présenté, le 15 décembre 1955, à la *Société Royale des Sciences de Liège* [5], par M. L. Godeaux.

---

[1]) Voir le texte en macédonien.