ЗА ЕДНА СПЕЦИЈАЛНА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД II РЕД

Даница Перчинкова-В'чкова

1. Во својот учебник *Hardy* [1] е дал како задача, да се покаже, да функцијата $y=y(x)$ дефинирана со релацијата

$$(1)\qquad y^3+3\,xy+2\,x^3=0$$

ја задоволува диференцијалната равенка

$$(2)\qquad x^2(1+x^3)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{3}{2}\,x\frac{dy}{dx}+y=0.$$

E. H. Neville [2] го дава следното решение.

Тој ја зема смената

$$x=-\frac{u}{v},\quad y=-\frac{1}{v},$$

каде u е независно променлива, и добива

$$x^2(1+x^3)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{3}{2}\,x\frac{dy}{dx}+y=y\left\{\frac{2\,(1+x^3)}{v^3\,x'^3}-\frac{3\,uv'}{2\,v^2\,x'}+1\right\}=$$

$$=y\left\{\frac{8\,u^3+1}{4\,(u^3-1)}-\frac{3\,(4\,u^3-1)}{4\,(u^3-1)}+1\right\}=0$$

од каде се гледа да функцијата $y=y(x)$, дефинирана со релацијата (1), ја задоволува равенката (2).

2. Наместо да земеме смена за x и y како функции од u и v, т е. од две независно променливи, можеме да земеме таква смена за x и y, тие да зависат само од една независна променлива, кое овозможува не само да се покаже дека функцијата $y=y(x)$, имплицитно дефинирана со равенката (1), е едно партикуларно решение на диференцијалната равенка (2), туку и да се ефективно најде нејзиното второ партикуларно решение.

Заменувајќи

$$y = tx$$

во (1), добиваме

$$t^3 x^3 + 3\, x^2\, t + 2\, x^3 = 0,$$

од каде

$$(3) \qquad x = -\frac{3\,t}{t^3+2}, \qquad y = -\frac{3\,t^2}{t^3+2}.$$

Диференцирајќи по t и сменувајќи ги вредностите за x и y и $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2 y}{dx^2}$ во равенката (2), гледаме дека таа е задоволена.

Ако сега во диференцијалната равенка (2) извршиме смена

$$(4) \qquad x = -\frac{3\,t}{t^3+2}.$$

ќе ја добиеме равенката

$$(5) \qquad \ddot{y} + f(t)\,\dot{y} + g(t)\,y = 0,$$

каде е

$$f(t) = \frac{6\,(t^6 + 6\,t^3 - 4)}{t\,(t^3+2)\,(t^3+8)},$$

$$g(t) = \frac{4\,(t^3+2)}{t^2\,(t^3+8)}.$$

Диференцијалната равенка (5) ја има како партикуларен интеграл функцијата

$$y_1 = -\frac{3\,t^2}{t^3+2}.$$

Другиот партикуларен интеграл на (5) е

$$y_2 = -\frac{3\,(t^4 + 8\,t)^{1/2}}{t^3+2}.$$

Оттука со обзир на (3) следува дека партикуларните решенија на равенката (2) во имплицитен облик се

$$y^3 + 3\,xy + 2\,x^3 = 0,$$

$$y^6 + 18\,y^4\,x + 81\,y^2\,x^2 + 10\,8\,x^3\,(x^3+1) = 0.$$

Да напоменеме на крајот дека во *Kamke*-овата книга [3] нема равенка од облик (2).

БИБЛИОГРАФИЈА:

[1] *G. H. Hardy*, A Course of Pure Mathematics, 1948, ninth edition, Cambridge, p. 274.

[2] *E. H. Neville*, Note № 1542, The Mathematical Gazette, vol. 25, № 266, 1941, p. 242—243.

[3] *E. Kamke*, Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, 1942, Leipzig.

Résumé

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE

D. Perčinkova-V'čkova

D'après un problème de *Hardy* [1], la fonction $y=y(x)$ définie par

$$y^3+3xy+2x^3=0$$

est une solution particulière de l'équation

$$x^2(1+x^3)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{3}{2}x\frac{dy}{dx}+y=0.$$

On démontre ici qu'une autre solution particulière de cette équation est définie par

$$y^6+18y^4x+81y^2x^2+108x^3(x^3+1)=0.$$

La forme paramètrique de ces solutions est

$$x=-\frac{3t}{t^3+2}.$$

$$y_1=-\frac{3t^2}{t^3+2},\quad y_2=-\frac{3(t^4+8t)^{1/2}}{t^3+2}.$$
