ЗА ЕДЕН STURM—LIOUVILLE-ов ПРОБЛЕМ

ДАНИЦА ПЕРЧИНКОВА-В'ЧКОВА

Во Kamke-овата книга [1, стр. 398—399] се дадени некои хомогени контурни проблеми за диференцијалната равенка од втор ред $y''+\lambda y=0$. Во истата книга [1. стр. 526] е дадена таблица за некои хомогени контурни проблеми за диференцијалната равенка од четврти ред $y^{\mathrm{IV}}+\lambda y=0$.

Аналогно на нив ние тука ќе дадеме таква таблица за диференцијалната равенка од трет ред

$$y'''+\lambda y=0, \quad (\lambda \text{ параметар}) \tag{1}$$

која има општо решение

$$y=\begin{cases} c_1+c_2x+c_3x^2, \lambda=0 \\ c_1e^{-kx}+e^{\frac{1}{2}kx}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}kx+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}kx\right), \lambda\neq 0. \end{cases} \tag{2}$$

1. Се прашаме за кои вредности на параметарот λ хомогената диференцијална равенка (1) со хомогените контурни услови

$$y(a)=y'(a)=y(b)=0 \tag{3}$$

има нетривијално решение, т. е. да ги најдеме сопствените вредности и потоа сопствените функции на овој контурен проблем.

Од равенките (3) имаме:

$$\begin{aligned} &c_1e^{-ka}+e^{\frac{1}{2}ka}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}ka+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}ka\right)=0, \\ &kc_1e^{-ka}+\frac{1}{2}ke^{\frac{1}{2}ka}\left[c_2\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}ka-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}ka\right)+\right. \\ &\qquad\qquad \left.+c_3\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}ka+\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}ka\right)\right]=0, \\ &c_1e^{-kb}+e^{\frac{1}{2}kb}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}kb+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}kb\right)=0, \end{aligned} \tag{4}$$

од каде што сопствените вредности ќе ги најдеме од

$$(5)\qquad \cos\frac{\sqrt{3}}{2}k(b-a)-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k(b-a)=e^{-\frac{3}{2}k(b-a)}.$$

Равенката (5) е трансцедентна равенка која ги дефинира сопствените вредности и може да се пише во обликот

$$(5')\qquad \cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=e^{-\sqrt{3}\alpha},$$

каде што

$$(6)\qquad \alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}k(b-a).$$

Од равенките (4) наоѓаме

$$c_1=c_3\frac{e^{\frac{3}{2}ka}}{\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}ka-\sin\frac{\sqrt{3}}{2}ka},$$

$$c_2=-c_3\frac{\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}ka+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}ka}{\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}ka-\sin\frac{\sqrt{3}}{2}ka},$$

па сопствените функции се

$$(7)\quad \varphi_n(x)=Ke^{\frac{1}{2}kx}\left[e^{-\frac{3}{2}k(x-a)}+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k(x-a)-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k(x-a)\right],$$

односно

$$(7')\qquad \varphi_n(x)=Ke^{\frac{1}{2}kx}\left[e^{-\sqrt{3}\xi}+\sqrt{3}\sin\xi-\cos\xi\right],$$

каде што

$$(8)\qquad \xi=\frac{\sqrt{3}}{2}k(x-a).$$

2. По истиот начин, ако за хомогената диференцијална равенка (1) ни се дадени хомогените контурни услови

$$(9)\qquad y^{(p)}(a)=y^{(q)}(a)=y^{(r)}(b)=0,$$

кои поради едноставност можеме да ги обележиме со

$$(9')\qquad (p,\ q;\ r),$$

и имајќи ги предвид (6) и (8), можеме да ја дадеме следната таблица за сопствените вредности и сопствените функции на горе дадените контурни проблеми[1])

Контурни услови	Трансцедентни равенки за сопствените вредности	Сопствени функции
(0, 1; 0)	$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=e^{-\sqrt{3}\alpha}$	$\varphi_n(x)=K_1 e^{\frac{1}{2}kx}\left[e^{-\sqrt{3}\xi}+\sqrt{3}\sin\xi-\cos\xi\right]$
(0, 1; 1)	$\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=e^{-\sqrt{3}\alpha}$	$\varphi_n(x)=K_1 e^{\frac{1}{2}kx}\left[e^{-\sqrt{3}\xi}+\sqrt{3}\sin\xi-\cos\xi\right]$
(0, 1; 2)	$2\cos\alpha=-e^{-\sqrt{3}\alpha}$	$\varphi_n(x)=K_1 e^{\frac{1}{2}kx}\left[e^{-\sqrt{3}\xi}+\sqrt{3}\sin\xi-\cos\xi\right]$
(0, 2; 0)	$\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=e^{-\sqrt{3}\alpha}$	$\varphi_n(x)=K_2 e^{\frac{1}{2}kx}\left[e^{-\sqrt{3}\xi}-\sqrt{3}\sin\xi-\cos\xi\right]$
(0, 2; 1)	$2\cos\alpha=-e^{-\sqrt{3}\alpha}$	$\varphi_n(x)=K_2 e^{\frac{1}{2}kx}\left[e^{-\sqrt{3}\xi}-\sqrt{3}\sin\xi-\cos\xi\right]$
(0, 2; 2)	$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=e^{-\sqrt{3}\alpha}$	$\varphi_n(x)=K_2 e^{\frac{1}{2}kx}\left[e^{-\sqrt{3}\xi}-\sqrt{3}\sin\xi-\cos\xi\right]$
(1, 2; 0)	$2\cos\alpha=-e^{-\sqrt{3}\alpha}$	$\varphi_n(x)=K_3 e^{\frac{1}{2}kx}\left[e^{-\sqrt{3}\xi}+2\cos\xi\right]$
(1, 2; 1)	$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=e^{-\sqrt{3}\alpha}$	$\varphi_n(x)=K_3 e^{\frac{1}{2}kx}\left[e^{-\sqrt{3}\xi}+2\cos\xi\right]$
(1, 2; 2)	$\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=e^{-\sqrt{3}\alpha}$	$\varphi_n(x)=K_3 e^{\frac{1}{2}kx}\left[e^{-\sqrt{3}\xi}+2\cos\xi\right]$

Останатите контурни проблеми од обликот (9′) се сведуваат на задачите од дадената таблица.

[1]) Во оваа таблица се вклучени и вредностите за веќе разгледаниот контурен проблем.

БИБЛИОГРАФИЈА

[1]. E. Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I, Leipzig, 1942.

[2]. Collatz Lothar, *Eigenwertprobleme*, Leipzig, 1945.

Danica Perčinkova-V'čkova

SUR UN PROBLÈME DE STURM—LIOUVILLE

(*Résumé*)

On dresse le tableau (voir le texte précédent) des valeurs caractéristiques et des fonctions caractéristiques du problème suivant:

$$y''' + \lambda y = 0$$

$$y^{(p)}(a) = y^{(q)}(a) = y^{(r)}(b) = 0.$$

Prof. D. S. Mitrinovitch et Prof. L. Collatz ont bien voulu lire cette Note en manuscript. J'en remercie les Professeurs Mitrinovitch et Collatz.
