ДОПОЛНЕНИЕ НА КАМКЕ-ОВАТА ЗБИРКА НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

ДАНИЦА ПЕРЧИНКОВА-В'ЧКОВА

Професор Митриновиќ во својот труд [1] дава некои критериуми за интеграбилност на диференцијалната равенка

$$
(1) \qquad \begin{aligned} & x\,(A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1)\, dy + \\ & y\,(A_2x^2 + B_2xy + C_2y^2 + D_2x + E_2y + F_2)\, dx = 0 \end{aligned}
$$

и укажува на можноста за формирање на аналогни критериуми за интеграбилност на равенката од облик

$$
(2) \qquad xS\,(x, y)\, dy + y\, T\,(x, y)\, dx = 0,
$$

каде $S\,(x, y)$ и $T\,(x, y)$ се полиноми по x и y.

Користејќи ја горната можност ќе ја разгледаме диференцијалната равенка (2), кога $S\,(x, y)$ и $T\,(x, y)$ се полиноми по x и y од n-та степен, т. е. ќе ја разгледаме равенката (2) каде

$$
\begin{aligned} S\,(x, y) \equiv & A_{n,\,0}\, x^n + A_{n-1,\,1}\, x^{n-1}\, y + \cdots + A_{0,\,n}\, y^n + \\ & + A_{n-1,\,0}\, x^{n-1} + \cdots + A_{0,\,n-1}\, y^{n-1} + \cdots + A_{00}, \end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned} T\,(x, y) \equiv & B_{n,\,0}\, x^n + B_{n-1,\,1}\, x^{n-1}\, y + \cdots + B_{0,\,n}\, y^n + \\ & + B_{n-1,\,0}\, x^{n-1} + \cdots + B_{0,\,n-1}\, y^{n-1} + \cdots + B_{00}, \end{aligned}
$$

а

$$
A_{ij};\ B_{ij}\ (i + j = \lambda;\ \lambda = 0, 1, \cdots, n;\ i, j = 0, 1, \cdots, \lambda)
$$

се константи.

Равенката (2) би имала интегрален фактор од облик $M\,(u)$ каде $u = x^p y^q$ (p, q две константи)ако е исполнет условот

$$
(3) \qquad P\,(x, y)/Q\,(x, y) \equiv k,\ (k = \text{const})
$$

каде

$$
\begin{aligned}
P(x, y) \equiv & (\overline{n+1}\, A_{n,0} - B_{n,0})\, x^n + (n\, A_{n-1,1} - 2\, B_{n-1,1})\, x^{n-1} y + \\
& + \cdots + (A_{0,n} - \overline{n+1}\, B_{0,n})\, y^n + (n\, A_{n-1,0} - B_{n-1,0})\, x^{n-1} + \\
& + \cdots + (A_{0,n-1} - n\, B_{0,n-1})\, y^{n-1} + \cdots + (A_{00} - B_{00}), \\
Q(x, y) \equiv & (p\, A_{n,0} - q\, B_{n,0})\, x^n + (p\, A_{n-1,1} - q\, B_{n-1,1})\, x^{n-1} y + \\
& + \cdots + (p\, A_{0,n} - q\, B_{0,n})\, y^n + (p\, A_{n-1,0} - q\, B_{n-1,0})\, x^{n-1} + \\
& + \cdots + (p\, A_{0,n-1} - q\, B_{0,n-1})\, y^{n-1} + \cdots + (p\, A_{00} - q\, B_{00});
\end{aligned} \tag{4}
$$

т. е. ако е релацијата (3) задоволена, тогаш равенката (2) има како интегрален фактор

$$M = (x^p y^q)^{-k}.$$

Идентитетот (3) е задоволен во следните случаи:

I случај. Ако $p \neq q$ условот (3) е задоволен секога кога постои следната врска меѓу коефициентите на равенкатга (2)

$$B_{ij} = \frac{kp - (i+1)}{kq - (j+1)}\, A_{ij}, \tag{5}$$

за $i + j = \lambda$ ($\lambda = 0, 1, \ldots, n$; $i, j = 0, 1, \ldots, \lambda$), каде k е произволна константа, која го задоволува условот

$$k \neq (j+1)/q \quad (j = 0, 1, \ldots, \lambda)$$

Изразот (5) содржи $(n+1)(n+2)/2$ равенки од кои коефициентите B_{ij} се определуваат со помош на коефициентите A_{ij}, кои се произволни исто како и параметрите k, p, q.

Овој резултат може да се искаже и во следниот облик.

Нека претпоставиме дека матрицата

$$
\begin{Vmatrix}
A_{n,0}; & A_{n-1,1}; \cdots; & A_{0,n}; & A_{n-1,0}; \cdots; & A_{0,n-1}; \cdots; & A_{00} \\
B_{n,0}; & B_{n-1,1}; \cdots; & B_{0,n}; & B_{n-1,0}; \cdots; & B_{0,n-1}, \cdots; & B_{00}
\end{Vmatrix}
$$

има ранг два и нека е на пр.

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} A_{n,0}; & A_{n-1,1} \\ B_{n,0}; & B_{n-1,1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Во тој случај диференцијалната равенка (2) има како интегрален фактор

$$M = x^\lambda y^\mu,$$

каде

$$\lambda=\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} \overline{n+1}\,A_{n,0}-B_{n,0}; & -B_{n,0} \\ n\,A_{n-1,1}-2B_{n-1,1}; & -B_{n-1,1} \end{vmatrix},$$

$$\mu=\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} A_{n,0}; & \overline{n+1}\,A_{n,0}-B_{n,0} \\ A_{n-1,1}; & n\,A_{n-1,1}-2B_{n-1,1} \end{vmatrix}.$$

Равенката (2) има $(n+1)(n+2)$ коефициенти од кои $(n^2+3n+6)/2$ се произволни а $(n^2+3n-2)/2$ се определуваат од изразот

$$\text{(6)}\qquad \begin{vmatrix} A_{n,0} & B_{n,0} & \overline{n+1}\,A_{n,0}-B_{n,0} \\ A_{n-1,1} & B_{n-1,1} & n\,A_{n-1,1}-2B_{n-1,1} \\ A_{ij} & B_{ij} & \overline{i+1}\,A_{ij}-\overline{j+1}\,B_{ij} \end{vmatrix}=0.$$

Изразот (6) содржи $(n^2+3n-2)/2$ равенки.

По таков начин равенката (2) се интегрира со квадратури.

Пример 1. Равенката

$$x\,(x^3+x^2y+A_{12}xy^2+A_{20}x^2+A_{11}xy+A_{02}y^2+A_{10}x+$$
$$+A_{01}y+A_{00})\,dy+y\,(x^3+2x^2y+5\,A_{12}xy^2+\,B_{03}y^3+\frac{4}{3}A_{20}x^2+$$
$$+\frac{5}{2}A_{11}xy+6\,A_{02}y^2+\frac{5}{3}A_{10}x+3\,A_{01}y+2\,A_{00})\,dx=0$$

има како интегрален фактор

$$M=x^{-7}y^{-4}$$

и нејзиното општо решение е

$$2x^{-3}y^{-3}+3x^{-4}y^{-2}+6\,A_{12}\,x^{-5}y^{-1}+B_{03}x^{-6}+2\,A_{20}x^{-4}y^{-3}+$$
$$+3\,A_{11}x^{-5}y^{-2}+6A_{02}\,x^{-6}y^{-1}+2\,A_{10}\,x^{-5}y^{-3}+3\,A_{01}\,x^{-6}y^{-2}$$
$$+\,2\,A_{00}\,x^{-6}y^{-3}=\text{Const.}$$

II случај: $p=q$.

1. Во случај кога $A_{rr}=B_{rr}$ $(r=0,1,\ldots,[n/2])$, со исклучок на една било која вредност на r, која нека е r_1, диференцијалната равенка (2) имајќи го предвид условот (3) има како интегрален фактор функцијата

$$M=(xy)^{-(r_1+1)}.$$

а помеѓу нејзините коефициенти постои врската

$$(j-r_1)\,B_{ij}=(i-r_1)A_{ij},$$

во која $(n^2+3n+4)/2$ коефициенти се произволни а останатите оттука се определуваат.

2. Во случај кога $A_{rr}=B_{rr}, A_{n0} \neq B_{n0}, A_{n0} \cdot B_{n0} \neq 0$, равенката (2) има како интегрален фактор функцијата

$$M = (xy)^{-kp}$$

каде

$$kp=(\overline{n+1}\, A_{n0}-B_{n0})/(A_{n0}-B_{n0}).$$

Нејзините коефициенти B_{ij} се определуваат од изразот

$$(\overline{n-j}\, A_{n0}+j\, B_{n0})\, B_{ij}=(\overline{n-i}\, A_{n0}+i\, B_{n0})\, A_{ij}$$

со помош на коефициентите A_{ij} кои што се произволни, како и коефициентите A_{n0}, B_{n0}.

Во случај кога $A_{n0}=B_{n0}$ резултатот добива друг облик кој што може лесно да се искаже.

Да напоменеме на крајот дека во Kamke-овата книга [2] нема равенка од облик (2).

BIBLIOGRAFIJA

[1]. D. S. Mitrinović, *Complément au Traité de Kamke*, Note IV, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Serija II, T. 11, Zagreb 1956, Br1..

[2]. E. Kamke, *Differentialgleichungen*: *Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I, Leipzig, 1942.

Par D. Perčinkova-V'čkova

COMPLÉMENTS AU TRAITÉ DE KAMKE

(*Résumé*)

Dans cet article on indique que l'équation

$$x\, S(x, y)\, dy + y\, T(x, y)\, dx = 0,$$

où $S(x, y)$ et $T(x, y)$ présentent les polynômes à deux variables x et y de n degré, s'intégre par quadratures et a un facteur intégrant

$$M=(x^p y^q)^{-k}$$

où p, q, k sont des constantes arbitraires, si la relation

$$P(x, y)/Q(x, y) \equiv k$$

est satisfaite, où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont les expressions (4)[1].

Cette Note se rattache à un article de D. Mitrinović.

[1]) Voir le texte en macédonien.