МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
1 (16), 1964, стр, 13 — 22.

*Danica Perčinkova*

# O HOMOGENIM PROBLEMIMA SA SOPSTVENIM VREDNOSTIMA OBIČNIH LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

(Prikazano 12. septembra 1963)

**1.** Razgledajući referativne časopise za čistu i primenjenu matematiku: Mathematical Reviews, Реферативный журнал — математика, Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete, Bulletin signalétique, primećujemo veliku raznovrsnost u rešavanju različitih problema iz raznih matematičkih disciplina. Poslednjih godina ova aktivnost je sve veća i raznovrsnija, tako da uočavamo da je raniji broj disciplina uvećan.

Među problemima koji se obrađuju vidno mesto zauzimaju i konturni problemi i problemi sa sopstvenim vrednostima kod običnih a posebno kod parcijalnih diferencijalnih jednačina. Poslednjim, u velikoj meri, bave se naročito matematičari u SSSR, među kojima je veliki broj mladih matematičara. Ne zaostaju u ovome ni matematičari u SAD. Ovim problemima bavi se i škola nemačkog matematičara L. Collatza.

**2.** U ovom članku biće reči samo o homogenim konturnim problemima i problemu sa sopstvenim vrednostima za obične linearne diferencijalne jednačine.

**2. 1.** Konturni problemi i problemi sa sopstvenim vrednostima javljaju se u raznim problemima matematičke fizike, gde su za rešavanje diferencijalne jednačine dati uslovi, koji se odnose na dve ili više tačaka intervala. Ovi uslovi su poznati pod imenom konturni uslovi i različiti su u raznim zadacima. Diferencijalne jednačine su isto tako raznog reda.

Problemi longitudinalnih i torzionih treperenja elastičnih štapova dovode do diferencijalne jednačine drugog reda, a problemi transverzalnih treperenja elastičnih štapova do diferencijalne jednačine četvrtog reda.

Konturni problem

$$\text{(2. 1)}\quad \begin{aligned} &L(y) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)\, y^{(\nu)} = f(x),\\ &u_\mu(y) \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1} [\alpha_{\mu\nu}\, y^{(\nu)}(a) + \beta_{\mu\nu}\, y^{(\nu)}(b)] = \gamma_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

zove se homogen kada su i diferencijalna jednačina i konturni uslovi homogeni; u suprotnom problem je nehomogen. Konturni problem je poluhomogen (semihomogen) ako je

$$\gamma_\mu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n), \qquad f(x) \not\equiv 0.$$

U ovakvom formulisanju konturnog problema je obuhvaćen i obični problem sa početnim vrednostima.

Budući da je $\varphi(x) \equiv 0$ rešenje svakog homogenog konturnog problema, zvaćemo ga trivijalnim ili nesopstvenim.

Sopstvena ili netrivijalna rešenja homogenih konturnih problema su samo takva rešenja koja nisu identički jednaka nuli.

**2. 2.** Kod homogenog problema sa sopstvenim vrednostima

$$L(y)+\lambda g(x) y=0, \quad u_{\mu}(y)=0, \quad (\mu=1, \ldots, n) \tag{2. 2}$$

radi se najčešće o tome da se odrede one vrednosti parametra $\lambda$ za koje problem (2. 2) ima jedno sopstveno rešenje. Takve vrednosti parametra zovemo sopstvenim vrednostima (Eigenwert; eigen value, characteristic value; valeur singulière, caractéristique; собственное значение; autovalore) a pripadna rešenja sopstvenim funkcijama (Eigenfunktion; eigenfunction, characteristic function; fonction caractéristique; собственная функция; autosoluzione).

**2. 3.** Obrađivani su razni konturni problemi i problemi sa sopstvenim vrednostima nižeg reda, uglavnom od prvog do osmog. Svakako da linearni konturni problemi zauzimaju u tome vodeće mesto. Za linearne probleme prvog reda ne postoji nikakva osnovna teškoća i obzirom na to lako se mogu naći kako sopstvene vrednosti problema tako i sopstvene funkcije pri bilo kakvim konturnim uslovima. Ispitivane su osobine sopstvenih funkcija, razvijanje po sopstvenim funkcijama, procena rešenja konturnog problema i drugo.

Kod linearnih konturnih problema drugog reda posmatra se najčešće diferencijalna jednačina oblika

$$[f(x) y']' + g(x) y = h(x)$$

sa konturnim uslovima prve vrste

$$y(a)=\gamma, \quad y(b)=\delta,$$

ili druge vrste

$$y'(a)=\gamma, \quad y'(b)=\delta,$$

ili treće vrste

$$\alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)=\gamma; \quad \beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)=\delta,$$

ili najčešće sa Sturmovim konturnim uslovima, koji se dobijaju iz uslova treće vrste za $\gamma=\delta=0$. Ovim problemima najviše se bavio Sturm [1], zatim H. E. Langer [2], E. Hilb [3], E. Dunn i F. Stein [4], P. de Lucia [5].

Isto tako u velikoj meri obrađivani su problemi sa sopstvenim vrednostima koji se odnose na diferencijalnu jednačinu četvrtog reda

$$(f_2 y'')'' + (f_1 y')' + f_0 y = \lambda g y$$

a specijalno oni sa Sturm-ovim konturnim uslovima

$$\alpha_i y(a) + \beta_i y'(a) + \gamma_i f_2(a) y''(a) + \delta_i [(f_2(a) y''(a))' + f_1(a) y'(a)] = 0,$$

$$\alpha_k y(b) + \beta_k y'(b) + \gamma_k f_2(b) y''(b) + \delta_k [(f_2(b) y''(b))' + f_1(b) y'(b)] = 0,$$

$$(i=1,\ 2; \quad k=3,\ 4).$$

Ovde možemo navesti radove: G. Cimmino [6], S. A. Janczewski [7] G. Sansone [8] [1].

[1] Ovi su radovi navedeni prema referatima u časopisu *Jahrubuch über die Fortschritte in der Mahematik.*

Od problema sa sopstvenim vrednostima šestog reda obrađivani su uglavnom oni koji se pojavljuju pri ispitivanju sopstvenih treperenja jednog kružnog luka i jedne kružne cilindrične ljuske.

Konturni problemi i problemi sa sopstvenim vrednostima neparnog reda ređe su obrađivani. Međutim ipak možemo spomenuti radove D. Jacksona [9], L. A. Warda [10] i G. Sansonea [11].

**2. 4.** U poznatom Kamkeovom delu [12] data je jedna tablica za sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije problema četvrtog reda

$$\begin{gathered} y^{(4)} + \lambda y = 0 \qquad (\lambda \neq 0) \\ y^{(p)}(a) = y^{(q)}(a) = y^{(r)}(b) = y^{(s)}(b) = 0. \end{gathered} \tag{2. 3}$$

Mi smo u jednom radu [13] dali sličnu tablicu za probleme trećeg reda

$$\begin{gathered} y''' + \lambda y = 0 \\ y^{(p)}(a) = y^{(q)}(a) = y^{(r)}(b) = 0. \end{gathered} \tag{2. 4}$$

U jednom još neobjavljenom radu obradili smo neke probleme sa sopstvenim vrednostima opštije od gore spomenutih, tj. probleme

$$\begin{gathered} y^{(p+1)} + \lambda y = 0 \qquad (\lambda \neq 0, \text{ parametar}) \\ \sum_{\nu=0}^{p} [\alpha_{\mu\nu} y^{(\nu)}(a) + \beta_{\mu\nu} y^{(\nu)}(b)] = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p+1) \end{gathered} \tag{2. 5}$$

za $p = 1, 2, 3, 4$.

**3.** U ovom radu obradićemo problem za $p = 2$, tj.

$$y''' + \lambda y = 0 \qquad (\lambda \neq 0) \tag{3. 1}$$

$$\sum_{\nu=0}^{2} [\alpha_{\mu\nu} y^{(\nu)}(a) + \beta_{\mu\nu} y^{(\nu)}(b)] = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3). \tag{3. 2}$$

Proizvoljne konstante $\alpha_{\mu\nu}$ i $\beta_{\mu\nu}$ su takve da zadovoljavaju uslov da matrica

$$\| \alpha_{\mu\nu} \beta_{\mu\nu} \| \qquad (\mu = 1, 2, 3; \quad \nu = 0, 1, 2) \tag{3. 3}$$

ima rang 3.

Da bismo odredili sopstvene vrednosti problema (3. 1) — (3. 2), treba naći za koje vrednosti parametra $\lambda$ ovaj problem ima netrivijalno rešenje.

Opšte rešenje jednačine (3. 1) je

$$y = C_1 e^{-kx} + e^{\frac{1}{2}kx} \left( C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} kx + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} kx \right) \qquad (\lambda = k^3), \tag{3. 4}$$

gde su $C_1$, $C_2$, $C_3$ integracione konstante.

Jednačine (3. 2) daju

$$
\begin{aligned}
& C_1 [(\alpha_{\mu 0} - k\,\alpha_{\mu 1} + k^2 \alpha_{\mu 2})\, e^{-ka} + (\beta_{\mu 0} - k\,\beta_{\mu 1} + k^2 \beta_{\mu 2})\, e^{-kb}] \\
& + C_2 \left\{ e^{\frac{1}{2} ka} \left[ \left( [(\alpha_{\mu 0} + \frac{1}{2} k\,\alpha_{\mu 1} - \frac{1}{2} k^2 \alpha_{\mu 2} \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} ka \right.\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{\sqrt{3}}{2} k\,(\alpha_{\mu 1} + k\,\alpha_{\mu 2}) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} ka \right] \\
& + \quad e^{\frac{1}{2} kb} \left[ \left( \beta_{\mu 0} + \frac{1}{2} k\,\beta_{\mu 1} - \frac{1}{2} k^2 \beta_{\mu 2} \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} kb \right. \\
(3.\ 5) & \qquad\qquad \left.\left. - \frac{\sqrt{3}}{2} k\,(\beta_{\mu 1} + k\,\beta_{\mu 2}) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} kb \right] \right\} \\
& + C_3 \left\{ e^{\frac{1}{2} ka} \left[ \left( \alpha_{\mu 0} + \frac{1}{1} k\,\alpha_{\mu 1} - \frac{1}{2} k^2 \alpha_{\mu 2} \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} ka \right.\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} k\,(\alpha_{\mu 1} + k\,\alpha_{\mu 2}) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} ka \right] \\
& - \quad e^{\frac{1}{2} kb} \left[ \left( \beta_{\mu 0} + \frac{1}{2} k\,\beta_{\mu 1} - \frac{1}{2} k^2 \beta_{\mu 2} \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} kb \right. \\
& \qquad\qquad \left.\left. + \frac{\sqrt{3}}{2} k\,(\beta_{\mu 1} + k\,\beta_{\mu 2}) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} kb \right] \right\} = 0.
\end{aligned}
$$

Za $\mu = 1, 2, 3$ dobijamo tri homogene jednačine po $C_i\,(i = 1, 2, 3)$, što omogućava, ako imamo i drugih rešenja po $C_i$ osim trivijalnog, da nađemo sopstvene vrednosti pomoću transcendentne jednačine

$$
\begin{aligned}
& \left[ P_1(k)\, e^{\frac{3}{2} K} - \overline{P}_1(k)\, e^{\frac{1}{2} K} \right] \sin \frac{\sqrt{3}}{2} K + \left[ P_2(k)\, e^{\frac{3}{2} K} + \overline{P}_2(k)\, e^{\frac{1}{2} K} \right] \cos \frac{\sqrt{3}}{2} K \\
(3.\ 6) & \\
& + [P_3(k)\, e^{2K} + P_4(k)\, e^{K} + P_5(k)] = 0,
\end{aligned}
$$

gde je $K = k\,(b - a)$.

Ovde su $P_1(k)$, $\overline{P}_1(k), \ldots, P_5(k)$ polinomi po $k$ i oni su dati izrazima

$$
\begin{aligned}
& P_1(k) = \sqrt{3}\, \{ -k^4 \det(\alpha_{11}\, \alpha_{22}\, \beta_{32}) + k^3 [\det(\alpha_{10}\, \alpha_{22}\, \beta_{32}) - \det(\alpha_{11}\, \alpha_{22}\, \beta_{31})] \\
& \qquad + k\, [\det(\alpha_{10}\, \alpha_{21}\, \beta_{31}) - \det(\alpha_{10}\, \alpha_{22}\, \beta_{30})] + \det(\alpha_{10}\, \alpha_{21}\, \beta_{30}) \}, \\
& P_2(k) = -k^4 \det(\alpha_{11}\, \alpha_{22}\, \beta_{32}) + k^3 [\det(\alpha_{11}\, \alpha_{22}\, \beta_{31}) - \det(\alpha_{10}\, \alpha_{22}\, \beta_{32})] \\
& \qquad + 2\, k^2 [\det(\alpha_{10}\, \alpha_{21}\, \beta_{32}) + \det(\alpha_{11}\, \alpha_{22}\, \beta_{30})] + k\, [-\det(\alpha_{10}\, \alpha_{22}\, \beta_{30}) \\
& \qquad + \det(\alpha_{10}\, \alpha_{21}\, \beta_{31})] - \det(\alpha_{10}\, \alpha_{21}\, \beta_{30}), \\
& P_3(k) = k^4 \det(\alpha_{12}\, \beta_{21}\, \beta_{32}) + k^3 [-\det(\alpha_{11}\, \beta_{21}\, \beta_{32}) + \det(\alpha_{12}\, \beta_{20}\, \beta_{32})] \\
(3.\ 7) & \qquad + k^2 [\det(\alpha_{10}\, \beta_{21}\, \beta_{32}) + \det(\alpha_{11}\, \beta_{22}\, \beta_{30}) + \det(\alpha_{12}\, \beta_{20}\, \beta_{31})] \\
& \qquad + k\, [\det(\alpha_{10}\, \beta_{20}\, \beta_{32})] - \det(\alpha_{11}\, \beta_{20}\, \beta_{31})] + \det(\alpha_{10}\, \beta_{20}\, \beta_{31}), \\
& P_4(k) = 3\, k^2 [\det(\alpha_{10}\, \alpha_{21}\, \alpha_{32}) + \det(\beta_{10}\, \beta_{21}\, \beta_{32})]\,. \\
& P_5(k) = k^4 \det(\alpha_{11}\, \alpha_{22}\, \beta_{32}) + k^3 [\det(\alpha_{10}\, \alpha_{22}\, \beta_{32}) - \det(\alpha_{11}\, \alpha_{22}\, \beta_{31})] \\
& \qquad + k^2 [\det(\alpha_{10}\, \alpha_{21}\, \beta_{32}) - \det(\alpha_{10}\, \alpha_{22}\, \beta_{31}) + \det(\alpha_{11}\, \alpha_{22}\, \beta_{30})] \\
& \qquad + k\, [-\det(\alpha_{10}\, \alpha_{21}\, \beta_{31}) + \det(\alpha_{10}\, \alpha_{22}\, \beta_{30})] + \det(\alpha_{10}\, \alpha_{21}\, \beta_{30}).
\end{aligned}
$$

Polinomi $\overline{P}_1(k)$ i $\overline{P}_2(k)$ dobijaju se respektivno iz polinoma $P_1(k)$ i $P_2(k)$, ako svuda umesto $\alpha$ napišemo $\beta$ i obratno.

Vrednosti determinanata koje se javljaju u polinomima (3. 7) date su npr.

$$\det(\alpha_{10}\,\alpha_{21}\,\alpha_{32}) = \alpha_{10}\,\alpha_{21}\,\alpha_{32} + \alpha_{20}\,\alpha_{31}\,\alpha_{12} + \alpha_{30}\,\alpha_{11}\,\alpha_{22}$$
$$-\alpha_{30}\,\alpha_{21}\,\alpha_{12} - \alpha_{10}\,\alpha_{31}\,\alpha_{22} - \alpha_{20}\,\alpha_{11}\,\alpha_{32}\,.$$

Dakle, osim trivijalnog rešenja za proizvoljne konstante $C_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ postoji i drugo rešenje uz uslov da je zadovoljena relacija (3. 6), odnosno za one vrednosti $k\,(k=\sqrt[3]{\lambda})$ za koje je zadovoljena jednačina (3. 6). Ova jednačina je zadovoljena za beskrajno mnogo sopstvenih vrednosti, koje se dobijaju kao rešenja transcendentne jednačine (3. 6).

Odgovarajuće sopstvene funkcije možemo odrediti, ako iz prve dve od jednačina (3. 5), nađemo proizvoljne konstante $C_1$ i $C_2$ i zamenimo ih u izrazu (3. 4).

Tako sa tačnošću do jednog konstantnog faktora za sopstvene funkcije $\varphi_n(x)$ dobijamo

$$\varphi_n(x) = e^{-k(x-a)}\,R_1(k) + e^{\frac{1}{2}k(x-a)}\Big[R_2(k)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,k(x-a) + R_3(k)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,k(x-a)\Big], \tag{3. 8}$$

gde su $R_1(k)$, $R_2(k)$ i $R_3(k)$ funkcije od $k$ date sledećim izrazima

$$R_1(k) = Q_1(k) + e^K\,\overline{Q}_1(k) + e^{\frac{1}{2}K}\Big[Q_2(k)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\,K + Q_3(k)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,K\Big],$$

$$\begin{aligned} R_2(k) &= Q_4(k) + e^{-K}\,Q_5(k) + [\overline{Q}_4(k) + e^K\,\overline{Q}_5(k)]\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,K \\ &\quad + [\overline{Q}_6(k) + e^K\,\overline{Q}_7(k)]\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\,K, \end{aligned} \tag{3. 9}$$

$$\begin{aligned} R_3(k) &= Q_6(k) + e^{-K}\,Q_7(k) - [\overline{Q}_4(k) + e^K|\overline{Q}_5(k)]\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\,K \\ &\quad + [\overline{Q}_6(k) + e^K\,\overline{Q}_7(k)]\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,K. \end{aligned}$$

Ovde $Q_1(k)$, $Q_2(k), \ldots, Q_7(k)$ označavaju sledeće polinome po $k$

$$Q_1(k) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,k\,[k^2\det(\alpha_{11}\,\alpha_{22}) + k\det(\alpha_{10}\,\alpha_{22}) + \det(\alpha_{10}\,\alpha_{21})],$$

$$\begin{aligned} Q_2(k) &= k^4\det(\alpha_{12}\,\beta_{22}) - \frac{1}{2}\,k^3\,[\det(\alpha_{11}\,\beta_{22}) - \det(\beta_{11}\,\alpha_{21})] \\ &\quad + \frac{1}{4}\,k^2\,[-\det(\alpha_{10}\,\beta_{22}) + \det(\beta_{10}\,\alpha_{22}) + 2\det(\alpha_{11}\,\beta_{21})] \\ &\quad + \frac{1}{2}\,k\,[\det(\alpha_{10}\,\beta_{21}) - \det(\beta_{10}\,\alpha_{21})] + \det(\alpha_{10}\,\beta_{20}), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q_3(k) &= \frac{\sqrt{3}}{2} k \{k^2 [\det(\alpha_{11}\beta_{22}) + \det(\beta_{11}\alpha_{22})] + k [\det(\alpha_{10}\beta_{22}) \\
&\quad + \det(\beta_{10}\alpha_{22})] + \det(\alpha_{10}\beta_{21}) + \det(\beta_{10}\alpha_{21})\}, \\
Q_4(k) &= \frac{3}{2} k [-k \det(\alpha_{10}\alpha_{22}) + \det(\alpha_{10}\alpha_{21})], \\
Q_5(k) &= \frac{1}{2} \{k^4 \det(\alpha_{12}\beta_{22}) - k^3 [\det(\alpha_{11}\beta_{22}) - \det(\beta_{11}\alpha_{22})] \\
&\quad + k^2 [-2\det(\alpha_{10}\beta_{22}) + \det(\alpha_{11}\beta_{21}) - \det(\beta_{10}\alpha_{22})] \\
&\quad + k [2\det(\alpha_{10}\beta_{21}) + \det(\beta_{10}\alpha_{21})] - 2\det(\alpha_{10}\beta_{20})\}, \\
Q_6(k) &= \frac{\sqrt{3}}{2} [2k^2 \det(\alpha_{11}\alpha_{22}) - k\det(\alpha_{10}\alpha_{22}) - \det(\alpha_{10}\alpha_{21})], \\
Q_7(k) &= \frac{\sqrt{3}}{2} k \{k^3 \det(\alpha_{12}\beta_{22}) + k^2 [\det(\alpha_{11}\beta_{22}) + \det(\beta_{11}\alpha_{22})] \\
&\quad - k [\det(\alpha_{11}\beta_{21}) + \det(\beta_{10}\alpha_{22})] - \det(\beta_{10}\alpha_{21})\}.
\end{aligned} \tag{3. 10}
$$

$\overline{Q}_1(k)$, $\overline{Q}_4(k)$, $\overline{Q}_5(k)$, $\overline{Q}_6(k)$, $\overline{Q}_7(k)$ označavaju polinome po $k$ koji se dobijaju respektivno iz polinoma $Q_1(k)$, $Q_4(k)$, $Q_5(k)$, $Q_6(k)$, $Q_7(k)$ ako u njima umesto $\alpha$ napišemo $\beta$ i obratno.

Kao što se vidi, ostaje otvoreno pitanje rešavanja transcendentnih jednačina za sopstvene vrednosti u svakom posebnom slučaju koji dobijamo dajući proizvoljnim konstantama posebne vrednosti. To je ustvari dosta težak problem tehničke prirode. Mi ćemo malo dalje navesti jedan partikularni slučaj.

4. Ako u problemu (2. 5) uzmemo $p=3$, videćemo da će izrazi za transcendentne jednačine za sopstvene vrednosti i izrazi za sopstvene funkcije biti komplikovaniji.

Za $p=4$ ovi su izrazi još komplikovaniji, tako da se sa povećanjem reda problema ovoga tipa znatno otežavaju sva izračunavanja. Rešavanje transcendentnih jednačina je još teže.

Dalje obrađivanje problema (2. 5) dovešće do još većih teškoća tehničke prirode, kao i neizbežno do vanredno komplikovanog rezultata.

5. Navešćemo još jedan specijalni slučaj za $p=2$, koji se dobija direktno iz problema (3. 1), (3. 2) i jedan specijalni slučaj za $p=3$.

5. 1. Ako u konturnim uslovima (3. 2) uzmemo da je $\alpha_{10}=\alpha_{21}=\beta_{30}=1$ i da su ostale konstante jednake nuli, dobijamo konturne uslove oblika

$$y(a)=y'(a)=y(b)=0.$$

Polinomi po $k$ (3. 7) svode se na $P_1(k)=\sqrt{3}$; $P_2(k)=-1$; $P_5(k)=1$; a jednačina (3. 6) postaje

$$\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}K-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}K\right)e^{\frac{3}{2}K}=1. \tag{5. 1}$$

Sopstvene vrednosti $\lambda_n$ iz ove transcendentne jednačine približno ćemo odrediti grafičkim putem.

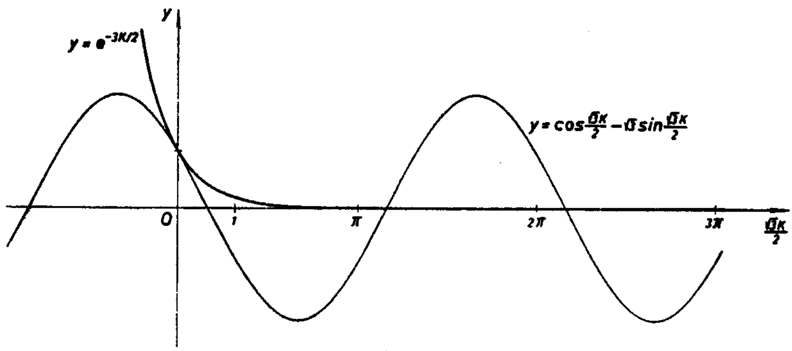
Prvih nekoliko približnih vrednosti za $\frac{\sqrt{3}}{2} K$ izračunao je D. Slavić i one su

0
3,66606 49681
6,80678 02916
9,94837 67527
13,08996 93898

(sve navedene cifre su tačne). Ostale vrednosti su približno

$$\left(n+\frac{1}{6}\right)\pi \qquad (n \text{ prirodan broj})$$

i one su utoliko tačnije ukoliko je $n$ veće. Za $n>4$ apsolutna vrednost greške manja je od $10^{-12}$.




Sl. 1

Rešenje $k=0$ jednačine (5.1) dovodi do trivijalnog rešenja $\varphi(x)\equiv 0$, te prema tome ne uzima se u obzir.

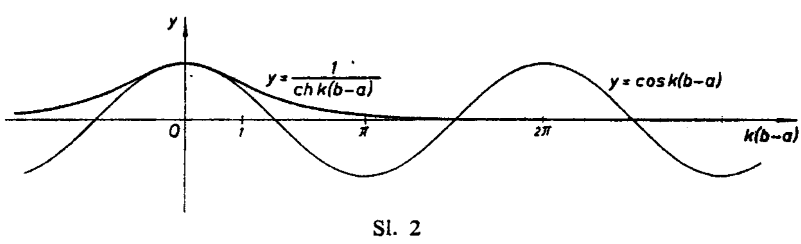
Sopstvene funkcije na osnovu (3.8) imaju sledeći oblik

$$\varphi_n(x)=e^{\frac{1}{2}Kx}\left[e^{-\frac{3}{2}K(x-a)}+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k(x-a)-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k(x-a)\right].$$

**5.2.** Posmatraćemo problem (2.5) za $p=3$; $\alpha_{10}=\alpha_{21}=\beta_{30}=\beta_{41}=1$, dok su ostale konstante jednake nuli, tj. problem

(5.2) $$y^{(4)}+\lambda y=0 \qquad (\lambda \text{ parametar}),$$

(5.3) $$y(a)=y'(a)=y(b)=y'(b)=0.$$




Sl. 2

Diferencijalna jednačina (5.2) za $\lambda\neq 0$ ima opšte rešenje

(5.4) $$y=C_1 \operatorname{ch} kx + C_2 \operatorname{sh} kx + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx.$$

Uslovi (5.3) postaju

$$
\begin{aligned}
&C_1 \operatorname{ch} ka + C_2 \operatorname{sh} ka + C_3 \cos ka + C_4 \sin ka = 0,\\
&C_1 \operatorname{sh} ka + C_2 \operatorname{ch} ka - C_3 \sin ka + C_4 \cos ka = 0,\\
&C_1 \operatorname{ch} kb + C_2 \operatorname{sh} kb + C_3 \cos kb + C_4 \sin kb = 0,\\
&C_1 \operatorname{sh} kb + C_2 \operatorname{ch} kb - C_3 \sin kb + C_4 \cos kb = 0,
\end{aligned} \tag{5. 5}
$$

a transcendentna jednačina za sopstvene vrednosti, koja se dobija iz uslova da sistem jednačina (5. 5) ima i druga rešenja po $C_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ osim trivijalnog, glasi

$$\operatorname{ch} k(b-a) \cos k(b-a) = 1.$$

Nekoliko približnih pozitivnih rešenja ove jednačine po $k(b-a)$ izračunao je D. Slavić i ona su

0
4,73004 07448
7.85320 46241
10,99560 78380
14,13716 54912
17,27875 96573
20,42035 22456
23,56194 49020.

Sve navedene cifre su tačne. Ostala pozitivna rešenja su približno

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \qquad (n \text{ prirodan broj}),$$

tačnija ukoliko je $n$ veće. Za $n>7$ greška je manja od $10^{-11}$.

(Prvih pet pozitivnih rešenja na 7 decimala navedena su takođe u knjizi Rayleigha [14].)

Rešenje $k=0$ dovodi do trivijalnog rešenja $\varphi(x)\equiv 0$, te prema tome ne uzima se u obzir.

Negativna rešenja su po apsolutnoj vrednosti jednaka pozitivnim.

Sopstvene vrednosti $\lambda_n$ dobijaju se lako iz jednačine $\lambda_n = -k^4$.

## LITERATURA


[1] M. Bôcher, *Leçons sur les méthodes de Sturm*, Paris 1917.

[2] R. E. Langer, *The boundary problem associated with a differential system rational in the parameter*, Transactions Americ. Math. Soc. 31 (1929), 868 — 906.

[3] E. Hilb, *Zur Theorie der Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen*, Math. Zeitschrift, 1 (1918), 58 — 69.

[4] E. Dunn and F. Stein, *Families of Sturm-Liouville systems*, SIAM Rev. 3 (1961), 54 — 65.

[5] P. de Lucia, *Su un problema ai limiti con condizioni al contorno dipendenti dal parametro*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) 27 (1960), 39 — 58.

[6] G. Cimmino, *Autosoluzioni e autovalori nelle equazioni differenziali lineari ordinarie, autoaggiunte di ordine superiore*, Math. Zeitschrift 32 (1930) 4 — 58.

[7] S. A. Janczewski, *Oxillation theorems for the differential boundary value problems of the fourth order*, Annals of Math. (2) 29 (1928), 521 — 542.

[8] G. Sansone, *Esistenza di infiniti autovalori per le equazioni differenziali ordinarie del quarto ordine, lineari omogenee a coefficienti costanti*, Rendiconti Istituto Lombardo (2) 64 (1931), 724 — 736.

[9] D. Jackson. *Expansion problems with irregular boundary conditions*, Proceedings Americ. Acad. 51 (1916), 383 — 417.

[10] L. E. Ward, *Some third-order irregular boundary value problems*, Transactions Americ. Math. Soc. 29 (1927), 716 — 745.

[11] G. Sansone *Il teorema di oscillatione per le equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine lineari omogenee a coefficienti costanti*, Bolletino Unione Mat. Italiana 10 (1931), 277 — 282.

[12] E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, I, Leipzig 1959, 525 — 526.

[13] D. Perčinkova, *Za eden Sturm-Liouville-ov problem*, Godišen zbornik na Fil. fak. Prir. mat. oddel vo Skopje 9 (1956), 31 — 36.

[14] L. Rayleigh, *The Theory of Sound*, I, p. 278, London 1894.

# SUR LES PROBLÈMES AUX LIMITES HOMOGÈNES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ORDINAIRES

*Danica Perčinkova*

## Résumé

On considère le problème aux limites

$$
(1)\qquad \begin{gathered} y''' + \lambda y = 0 \qquad (\lambda \neq 0) \\ \sum_{\nu=0}^{2} [\alpha_{\mu\nu} y^{(\nu)}(a) + \beta_{\mu\nu} y^{(\nu)}(b)] = 0 \qquad (\mu = 1,\ 2,\ 3); \end{gathered}
$$

où les constantes arbitraires $\alpha_{\mu\nu}$ et $\beta_{\mu\nu}$ sont telles que la matrice

$$
\| \alpha_{\mu\nu} \beta_{\mu\nu} \| \qquad (\mu = 1,\ 2,\ 3;\ \nu = 0,\ 1,\ 2)
$$

soit du rang 3.

On montre que les valeurs propres du problème en question sont les solutions de l'équation transcendante suivante

$$
\left[P_1(k)\, e^{\frac{3}{2}K} - \overline{P}_1(k)\, e^{\frac{1}{2}K}\right] \sin \frac{\sqrt{3}}{2} K + \left[P_2(k)\, e^{\frac{3}{2}K} + \overline{P}_2(k)\, e^{\frac{1}{2}K}\right] \cos \frac{\sqrt{3}}{2} K
$$
$$
+ [P_3(k)\, e^{2K} + P_4(k)\, e^{K} + P_5(k)] = 0,
$$

où $K = k(b-a)$.

Par $P_1(k)$, $\overline{P}_1(k)$, $P_2(k)$, $\overline{P}_2(k)$, $P_3(k)$, $P_4(k)$, $P_5(k)$ sont désignés les polynômes en $k$, donnés par (3. 7), tandis que $\overline{P}_1(k)$ et $\overline{P}_2(k)$ sont les polynômes en $k$, que l'on obtient des polynômes $P_1(k)$ et $P_2(k)$ en mettant $\alpha$ au lieu de $\beta$, et vice versa.

Les fonctions propres, exactes jusqu'à un facteur constant, sont données par l'expression

$$
\varphi_n(x) = e^{-k(x-a)} R_1(k) + e^{\frac{1}{2}k(x-a)} \left[ R_2(k) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k(x-a) \right.
$$
$$
\left. + R_3(k) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k(x-a) \right]
$$

où $R_1(k)$, $R_2(k)$, $R_3(k)$ désignent des fonctions en $k$, données par (3. 9) et (3. 10)

On a considéré d'une manière plus détaillée les problèmes aux limites suivants:

$$y^{(p+1)}+\lambda y=0 \qquad (\lambda \neq 0),$$
$$\sum_{\nu=0}^{p}[\alpha_{\mu\nu} y^{(\nu)}(a)+\beta_{\mu\nu} y^{(\nu)}(b)]=0 \qquad (\mu=1,\ 2, \ldots, p+1)$$

pour $p=1$, 2, 3, 4 dans un travail qui sera publié ailleurs.

On $y$ indique la possibilité d'une étude des problèmes aux limites (2) pour $p=5$, 6, .... L'étude de ces problèms exige des calculs fastidieux.

Les valeurs propres de ces problèmes sont les solutions des équations transcendantes. dont résolution effective est un problème assez difficile au point de vue technique.