# РЕШАВАЊЕ НА ЕДНА ЛИНЕАРНА ХОМОГЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД III РЕД СО КВАДРАТУРИ

**Боро М. Пиперевски**

Во [1] разгледувано е решавањето на една класа линеарни хомогени диференцијални равенки од III ред со помош на квадратури и покажано е дека равенката:

$$\begin{aligned}(1)\qquad & y''' + (P+R)\,y'' + [P' + PR - (Q' + PQ + Q^2)]\,y' - \\ & -[R(Q' + PQ + Q^2) + (Q' + PQ + Q^2)']\,y = 0\end{aligned}$$

има решение:

$$(2)\qquad y = C_1 e^{\int Q dx} + C_2 e^{\int Q dx} \int e^{-\int (P+2Q)\,dx} dx + C_3 \delta,$$

каде што $\delta$ е едно партикуларно решение на диференцијалната равенка:

$$(3)\qquad \delta'' + P\delta' - (Q' + PQ + Q^2)\,\delta = e^{-\int R dx}$$

и каде што $P$, $Q$, $R$ се диференцијабилни функции од $x$.

Во овој труд ги користиме резултатите добиени во [1] за решавање на една специјална линеарна хомогена диференцијална равенка од III ред со помош на квадратури од вид

$$(4)\qquad y''' + (ax + b)\,y'' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,y' + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)y = 0.$$

Со соодветен избор на функциите $P$, $Q$, $R$ добиваме равенка од вид (4) чие што општо решение, во општ случај, за така избраните $P$, $Q$, $R$ е дадено во [1]. При тоа се добиваат услови за интеграбилност кои треба да ги задоволуваат коефициентите $a$, $b$, $\alpha$ $\beta$, $\gamma$, $A$, $B$, $C$, $D$.

1. Нека се $P = a_1$, $Q = a_2 x$, $R = a_3 x$ Со эамена во (1) ја добиваме следната диференцијална равенка:

$$y''' + (a_3 x + a_1) y'' + [-a_2^2 x^2 + a_1 (a_3 - a_2) x - a_2] y' - [a_2^2 a_3 x^3 +$$
$$+ a_1 a_2 a_3 x^2 + a_2 (a_3 + 2a_2) x + a_1 a_2] y = 0.$$

Споредувајќи ја со равенката (4), ги добиваме следниве равенки:

$$a = a_3, \qquad A = -a_2^2 a_3,$$
$$b = a_1, \qquad B = -a_1 a_2 a_3,$$
$$\alpha = -a_2^2, \qquad C = -a_2 (a_3 + a_2),$$
$$\beta = a_1(a_3 - a_2), \qquad D = -a_1 a_2,$$
$$\gamma = -a_2,$$

Потоа од овие равенки со елиминација на $a_1$, $a_2$, $a_3$ ги добиваме условите за интеграбилност на равенката (4):

$$\alpha + \gamma^2 = 0, \qquad \beta - ab\gamma = 0,$$
$$\beta - b(a + \gamma) = 0, \qquad C - \gamma(a + 2\gamma) = 0, \tag{1'}$$
$$A + a\gamma^2 = 0, \qquad D - b\gamma = 0.$$

Избирајќи ги понатаму функциите $P$, $Q$, $R$ на следниов начин:

2. $P = a_1 x + b_1$, $Q = a_2 x$, $R = a_3 x$.
3. $P = a_1$, $Q = a_2 x + b_2$, $R = a_3 x$.
4. $P = a_1$, $Q = a_2 x$, $R = a_3 x + b_3$.
5. $P = a_1 x$, $Q = a_2 x$, $R = a_3 x + b_3$
6. $P = a_1$, $Q = a_2 x + b_2$, $R = a_3 x + b_3$.

и спроведувајќи ја истата постапка како во 1., ги добиваме соодветно следниве услови за интеграбилност на равенката (4):

$$b^2\alpha + D^2 + (D - b\gamma)(ab + 2D - b\gamma) = 0,$$
$$\beta + b\gamma - ab - 2D = 0,$$
$$Ab^3 + D(2D - b\gamma)(ab + D - b\gamma) = 0, \tag{2'}$$
$$bB - D(ab + D - b\gamma) = 0,$$
$$b^2 C - D(ab + b\gamma - 3D) = 0.$$

$$
\begin{aligned}
& ab + D - \beta = 0, \\
& (\alpha b^2 + D^2 - 4\alpha\gamma)^2 + 16\alpha^3 = 0, \\
(3') \qquad & A - a\,\alpha = 0, \\
& B - aD = 0, \\
& (a\alpha b^2 + 8\alpha^2 + aD^2 - 4\alpha C)^2 + 16a^2\,\alpha^3 = 0.
\end{aligned}
$$

---

$$
\begin{aligned}
& \alpha b^2 + D^2 = 0, \\
& (ab + D)^2\,(\gamma b - D) - b^2\,\beta(ab + D - \beta) = 0, \\
(4') \qquad & Ab^2 + aD^2 = 0, \\
& bB(ab + D) + D^2\,(ab + D - \beta) - ab\beta D = 0, \\
& (ab + D)^2\,(b^2C - abD + 2D^2) - b^3\beta\,D(ab + D - \beta) = 0.
\end{aligned}
$$

---

$$
\begin{aligned}
& \alpha b^2 + D^2 - \beta\,(ab + D - \beta) = 0, \\
& \gamma b - \beta - D = 0, \\
(5') \qquad & Ab^3 - D\,(ab - \beta)\;(\beta - D) = 0, \\
& bB - D(D - \beta) = 0, \\
& D(ab + \beta - 2D) - b^2\,C = 0,
\end{aligned}
$$

---

$$
\begin{aligned}
& [(4\alpha\gamma - \beta^2)\,(a^2 + \alpha)^2 + (\alpha\,b + a\beta - B)\,(5a\,\alpha\beta - 5a^2\,b\alpha - \\
& \qquad - 3\alpha B - \alpha^2\,b + a^3\,\beta + a^2\beta)]^2 + 16\,\alpha^3\,(a + \alpha)^4 = 0, \\
& A - a\alpha = 0, \\
& [(a\beta^2 + 8\alpha^2 - 4\alpha C)\,(a^2 + \alpha)^2 + a\,(\alpha^2\,b - a\alpha\beta - B\alpha + a^2\,\alpha\,b - \\
(6') \qquad & \qquad - a^3\,\beta - a^2\,B)\,(\alpha b + a\beta - B) + 4\alpha\,(\alpha\beta - ab\alpha + aB)\,(a^2b - \\
& \qquad - a\beta + B)]^2 + 16\alpha^3a^2\,(a^2 + \alpha)^4 = 0, \\
& \{[\alpha\beta^2\,(a^2b - a\beta + B) - 4\alpha(\alpha\beta - ab\alpha + aB) - 4\alpha D(a^2 + \alpha)] \\
& (a^2 + \alpha)^2 + (\alpha^2b - a\alpha\beta - \alpha B - 2a^3\beta + a^2\alpha)\,(\alpha b + a\beta - B) \\
& (a^2b - a\beta + B)\}^2 + 16\alpha^3\,(a^2 + \alpha)^4\,(a^2b - a\beta + B)^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Примери:

1''. Диференцијалната равенка:

$$y''' + (x + 1)\,y'' + (-x^2 + 2x + 1)\,y' + (-x^3 + x^2 - x + 1)\,y = 0$$

чиишто коефициенти ги задоволуваат условите (1'), спрема [1] и [2] има општо решение:

$$y = e^{-x^2/2}\left[C_1 + C_2\int e^{x^2-x}\,dx + C_3\int\frac{\int e^{x-x^2}\,dx}{e^{x-x^2}}\,dx\right].$$

2'' Равенката:

$$y''' + (2x+1)\,y'' + (-7x^2-2x+2)\,y' + (4x^3+x^2-7x-1)\,y = 0$$

ги задоволува бараните услови (2') и спрема [1] и [2] има општо решение:

$$y = e^{x^2/2}\left[C_1 + C_2\int e^{-(5x^2/2+x)}\,dx + C_3\int\frac{\int e^{5x^2/2+x}\,dx}{e^{5x^2/2+x}}\right].$$

3''. Диференцијалната равенка:

$$y''' + (x+2)\,y'' - (x^2+2x+4)\,y' - (x^3+4x^2+6x+4)\,y = 0$$

има општо решение:

$$y = e^{x^2/2+x}\left[C_1 + C_2\int e^{-(x^2+4x)}\,dx + C_3/3\int e^{-(x^2+x)}\,dx\right].$$

4''. Диференцијалната равенка:

$$y''' + (3x-1)\,y'' + (-x^2+2x-3)\,y' + (-3x^3-x^2-3x+1)\,y = 0$$

ги задоволува условите за интеграбилност (4') и спрема [1] и [2] има општо решение:

$$y = e^{x^2/2}\left[C_1 + C_2\int e^{-(x^2+x)}\,dx + C_3\int\left(e^{-(x^2+x)}\int e^{-(x^2-3x)}\,dx\right)dx\right]$$

5''. Диференцијалната равенка:

$$y''' + (x+1)\,y'' - (9x^2+2x+1)\,y' - (9x^3+3x^2+3x-1)\,y = 0$$

спрема [1] и [2] има општо решение:

$$y = e^{-x^2/2}\left[C_1 + C_2\int e^{2x^2}\,dx + C_3\int\left(e^{2x^2}\int e^{-(3x^2+x)}\,dx\right)dx\right].$$

6''. Равенката:

$$y''' + (2x+1)\,y'' - (x^2-x+1)\,y' - (2x^3+2x^2+4x+1)\,y = 0$$

чиишто коефициенти ги задоволуваат условите (6′), спрема [1] и [2] има општо решение:

$$y = e^{x^2/2}\left[C_1 + C_2\int e^{-(x^2+x)}\,dx + C_3\int\left(e^{-(x^2+x)}\int e^{x-x^2/2}\,dx\right)dx\right].$$

LITERATURA

[1] Šapkarev I., A., Über die Integration der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung in geschlossener Form, Glasnik Matematički 5 (25) (1970), 63—66.

[2] Šapkarev I., A., Nekoliko primedaba o homogenim linearnim diferencijalnim jednačinama drugog reda čiji se opšti integrali dobijaju pomoću kvadratura, Mat. Vesnik, 5 (20) (1968), 505—512.

## SUR L'INTEGRATION D'UNE ÉQUATION HOMOGÈNE DIFFÉRENTIELLE LINÉARE DU TROISIÈME ORDRE PAR QUADRATURES

**Boro M. Piperevski**

(Rézimé)

Dans cet article on démonte que l'intégrale générale de l'équation (4) peut être obtenu par quadrature si les constantes $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $A$, $B$, $C$, $D$ satisfont aux relations données par (1′) ou (2′) ou (3′) ou (4′) ou (5′) ou (6′).