ЗА НЕКОИ ПОСЛАБИ КРИТЕРИУМИ ЗА ИНТЕГРАБИЛНОСТ НА ЕДНА ХОМОГЕНА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД III РЕД ВО ЗАТВОРЕН ВИД

Боро М. Пиперевски

Во овој труд се добиени услови за интеграбилност на една специјална диференцијална равенка од III ред од вид:

$$(1)\quad y''' + (ax + b)\, y'' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, y' + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\, y = 0$$

кои треба да ги задоволуваат костантите $a, b, \alpha, \beta, \gamma, A, B, C, D$.

I. Тргнуваме од равенка од вид:

$$(1')\qquad \begin{aligned} &[y' + (A_0x + B_0)\, y]'' + (a_0x + b_0)\, [y' + (A_0x + B_0)\, y]' + \\ &+ (a_1x^2 + b_1x + c_1)\, [y' + (A_0x + B_0)\, y] = 0. \end{aligned}$$

После средувањето се добива равенката:

$$\begin{aligned} &y''' + [(A_0 + a_0)\, x + B_0 + b_0]\, y'' + [(a_0A_0 + a_1)x^2 + (b_0A_0 + \\ &+ a_0B_0 + b_1)x + 2A_0 + b_0B_0 + c_1]y' + [a_1A_0x^3 + (b_1A_0 + \\ &+ a_1B_0)\, x^2 + (a_0A_0 + c_1A_0 + b_1B_0)\, x + b_0A_0 + c_1B_0]\, y = 0. \end{aligned}$$

Последната равенка ја споредуваме со (1) и ги добиваме следните релации:

$$\begin{aligned} &A_0 + a_0 = a, && a_1A_0 = A, \\ &b_0 + B_0 = b, && b_1A_0 + a_1B_0 = B, \\ &a_0A_0 + a_1 = \alpha, && a_0A_0 + c_1A_0 + b_1B_0 = C, \\ &b_0A_0 + a_0B_0 + b_1 = \beta, && b_0A_0 + c_1B_0 = D. \\ &2A_0 + b_0B_0 + c_1 = \gamma, && \end{aligned}$$

Со елиминација на параметрите A_0, B_0, a_0, b_0, a_1, b_1, и c_1 се добиваат условите за интеграбилност на (1):

$$\begin{aligned} &a_0A_0 + c_1A_0 + b_1B_0 = C, \\ &b_0A_0 + c_1B_0 = D, \end{aligned}$$

$$(2)\qquad \begin{aligned} &(a_0b_0 - 2b_1)^2 + (a_0^2 - 4a_1)\ (4c_1 - 2a_0 - b_0^2) = \\ &= \pm\, 2\, (2n + 1)\ (a_0^2 - 4a_1)^{3/2}, \end{aligned}$$

каде што:

$$A_0 = \frac{A}{a_1}, \quad a_0 = a - \frac{A}{a_1},$$

$$B_0 = \frac{Ba_1{}^2 - A\beta a_1 + A^2 b}{\alpha a_1^2 - 2aAa_1 + 3A^2},$$

$$b_0 = \frac{(\alpha b - B)\, a_1{}^2 + (A\beta - 2a\, bA)\, a_1 + 2A^2 b}{\alpha a_1{}^2 - 2aAa_1 + 3A^2},$$

$$b_1 = \frac{(\alpha\beta - AB - aB)\, a_1{}^2 + (2AB - aA\beta)\, a_1 + A^2\beta}{\alpha a_1^2 - 2aAa_1 + 3A^2},$$

$$c_1 = \gamma - 2A_0 - b_0 B_0,$$

а параметарот a_1 се наоѓа од равенката:

$$a_1^3 - \alpha a_1^2 + aAa_1 - A^2 = 0.$$

Третиот услов е даден спрема [3] и претставува услов за интеграбилност на една диференцијална равенка од II ред на која се сведува нашата равенка (1).

Спомнатата диференцијална равенка од II ред, ако во (1′) ставиме:

$$y' + (A_0 x + B_0)\, y = z,$$

ќе има вид:

$$z'' + (a_0 x + b_0) z' + (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)\, z = 0.$$

Од овде јасно се гледа дека интеграцијата на равенката (1′), а со тоа и на равенката (1), се сведува на интеграцијата на последниве две равенки.

ПРИМЕР 1. Равенката:

$$y''' + (4x + 3)\, y'' + (5x^2 + 7x + 7)\, y' + (2x^3 + 4x^2 + 8x + 4)\, y = 0$$

ги задоволува условите (2) за интеграбилност и има општо решение:

$$y = e^{-(x^2+2x)}\, [C_1 + C_2 \int e^{x^2/2+x}\, dx + C_3 \int e^{x^2/2+2x}\, dx].$$

ПРИМЕР 2. Равенката:

$$y''' + (3x + 4)\, y'' + (-x^2 + 8x + 2)\, y' + (-3x^3 - 4x^2 + 2x - 6)\, y = 0$$

ги задоволува условите (2) и има општо решение:

$$y = e^{-x^2/2+2}\, \{C_1 + C_2 \int x e^{x^2+x}\, dx + C_3 \int]e^{x^2+x} \int (\int e^{-2x^2}\, dx)\;\; dx]\, dx.\}$$

II. Тргнувајќи од равенка од вид:

$$[y'' + (a_0x + b_0)\, y' + (a_1x^2 + b_1x + c_1)\, y]' + (A_0x + B_0)\,[y'' + \\ + (a_0x + b_0)y' + (a_1x^2 + b_1x + c_1)y] = 0$$

и спроведувајќи го истиот метод како во I., се добиваат три услови за интеграбилност на (1):

$$\begin{aligned} &2a_1 + c_1A_0 + b_1B_0 = C \\ &b_1 + c_1B_0 = D \\ (3)\quad &(a_0b_0 - 2b_1)^2 + (a_0^2 - 4a_1)\,(4c_1 - 2a_0 - b_0^2) = \\ &= \pm\, 2\,(2n + 1)\,(a_0^2 - 4a_1)^{3/2}, \end{aligned}$$

каде што:

$$a_1 = \frac{A}{A_0}, \quad a_0 = a - A_0,$$

$$B_0 = \frac{bA_0^2 - \beta A_0 + B}{3A_0^2 - 2a\,A_0 + \alpha},$$

$$b_0 = \frac{2bA_0^2 + (\beta - 2ab)\,A_0 + (\alpha b - B)}{3A_0^2 - 2aA_0 + \alpha},$$

$$b_1 = \frac{\beta A_0^2 + (2B - a\beta)\,A_0 + (a\beta - AB - aB)}{3A_0^2 - 2aA_0 + \alpha},$$

$$c_1 = \gamma - a_0 - b_0B_0,$$

а параметарот A_0 се добива од равенката:

$$A_0^3 - aA_0^2 + \alpha A_0 - A = 0.$$

ПРИМЕР 1. Равенката:

$$y''' + (4x + 3)\,y'' + (5x^2 + 7x + 5)\,y' + (2x^3 + 4x^2 + 6x + 3)\,y = 0,$$

чиишто коефициенти ги задоволуваат условите (3), има општо решение:

$$y = e^{-x^2/2}\,[C_1 + C_2e^{-x}\, C_3 \int e^{-x^2/2-x}\; (e^{-x} - 1)\,dx]$$

ПРИМЕР 2. Равенката:

$$y''' + (4x + 1)\,y'' + (x^2 + 4x - 4)\,y' + (-6x^3 + 7x^2 - 16\,x + 6)\,y = 0$$

ги задоволува условите и има општо решение:

$$y = e^{(x-1)^2/2}\,[C_1x + C_2 \int (\int e^{-2x^2}\,dx)\,dx + \\ + C_3 4\,(\{\int [e^{x^2/2} \int (\int e^{-2x^2}\; dx]\,dx]\,dx\}. \\ \cdot[\int (\int e^{-2x^2}\,dx)\,dx] - xe^{x^2/2})\,].$$

III. Во равенката (1) воведуваме смена:

$$y = ze^{\int (rx+s)dx}$$

и ја добиваме равенката:

$$\begin{aligned} & z''' + [(3r + a)x + 3s + b]z'' + [(3r^2 + 2ar + \alpha)x^2 + (6rs + 2as + \\ & + 2br + \beta)x + 3s^2 + 3r + 2bs + \gamma]z' + [(\alpha r + ar^2 + r^3 + A)x^3 + \\ & + (\alpha s + \beta r + 2ars + br^2 + 3r^2 s + B)x^2 + (\beta s + \gamma r + ar + as^2 + \\ (4) \qquad & + 2brs + 3r^2 + 3rs^2 + C)x + \gamma s + rb + bs^2 + 3rs + s^3 + D]z = 0. \end{aligned}$$

Ако полиномот пред z го изедначиме со 0, ги добиваме следните релации:

$$\begin{aligned} & r^3 + ar^2 + \alpha r + A = 0, \\ & \alpha s + 2ars + 3r^2 s + \beta r + br^2 + B = 0, \\ & \beta s + \gamma r + ar + as^2 + 2brs + 3r^2 + 3rs^2 + C = 0, \\ & \gamma s + rb + bs^2 + 3rs + s^3 + D = 0, \end{aligned}$$

Со елиминација на r и s од последните релации, се добиваат три услови за интеграбилност

$$\begin{aligned} & \alpha s + \gamma r + ar + as^2 + 2brs + 3r^2 + 3rs^2 + C = 0, \\ & \gamma s + rb + bs^2 + 3rs + s^3 + D = 0, \\ (5) \qquad & (a_0 b_0 - 2b_1)^2 + (a_0^2 - 4a_1)(4c_1 - 2a_0 - b_0^2) = \\ & = \pm 2(2n + 1)(a_0^2 - 4a_1)^{3/2} \end{aligned}$$

каде што:

$$\begin{aligned} a_0 &= 3r + a, & b_1 &= 6rs + 2as + 2br + \beta, \\ b_0 &= 3s + b, & c_1 &= 3s^2 + 3r + 2bs + \gamma, \\ a_1 &= 3r^2 + 2ar + \alpha, & s &= -\frac{\beta r + br^2 + B}{3r^2 + 2ar + \alpha}, \end{aligned}$$

а параметарот r се добива од равенката:

$$r^3 + ar^2 + \alpha r + A = 0.$$

Третиот услов за интеграбилност е добиен спрема [3], бидејќи равенката (4), после нова смена $w = z'$, се сведува на равенка од вид разгледуван во [3].

ПРИМЕР. Равенката:

$$y''' + (2x + 2)y'' + (-x^2 + 3x + 2)y' + (-2x^3 + x^2 - 5x + 2)y = 0$$

ги исполнува бараните услови (5) и има општо решение:

$$\begin{aligned} ь = e^{(x-1)^2/2}[C_1 + C_2\left(-\frac{1}{3}e^{(-3/2)x^2}\right) + \\ + C_3 \int \{e^{(-3/2)x^2}[\int(\int e^{(x+1)^2/2}dx)dx]\}dx]. \end{aligned}$$

LITERATURA

[1] Mitrinović D. S.: Procédé de formation critéres d'intégrabilité des equations diférentielles lineaires a coeficients ayant des formes données à l'avance, Fakulté de philosophie de l'Université de Skopje, sekcion des sciences naturelles (1949) 2. tome.

[2] Popov B. S.: Formation des critériums de réductibilité des équations diférentielles linéaires ayant des formes données à l'avance, Fakulté de philosophie de l'Université de Skopje, section des sciences naturelles (1952) 5. tome.

[3] Šapkarev I. A.: Sur une classe d'equations différentielles linéaires du deuxieme ordre resolubles par quadratures, Matematički vesnik (21) 6, 1969, str. 335—338.

Boro M. Piperevski

POUR CERTAINS PLUS FAIBLES CONDITIONS POUR L'INTEGRATION D'UNE ÉQUATION HOMOGÉNE DIFFÉRENTIELLE LINÉARE DU TROISIÉME ORDRE PAR QUADRATURES

Résumé

Dans cet article on démonte que l'intégrale générale de l'équation (1) peut être obtenu par quadrature si les constantes a, b, α, β, γ, A, B, C, D satisfont aux relations données par (2) ou (3) ou (5).