Математички Билтен
14 (XL)
1990 (65-68)
Скопје, Југославија

ЗА ЕДНА КЛАСА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОРИ РЕД

Боро М. Пиперевски

Во овој труд се разгледува една класа линеарни диференцијални равенки од втори ред со полиномни коефициенти. Со помош на трансформација условот за егзистенција на полиномно решение добиен во [1] се проширува во услов за интеграбилност во кој фигурира природен број. При тоа, добиена е и формула со која е изразено општото решение.

1. Нека е дадена хомогена линеарна диференцијална равенка од втор ред од вид:

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)y''+B(x)y'+C(x)y = 0, \qquad (1.1)$$

каде што $B(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$, $C(x)=c_1x+c_0$, $x_1\neq x_2$, $x_1\neq x_3$, $x_2\neq x_3$, ($x_1,x_2,x_3,b_2,b_1,b_0,c_1,c_0$ - константи).

Со смената

$$y(x) = \phi(x)\cdot z(x)$$

равенката (1.1) се трансформира во равенка од ист вид, само ако функцијата $\phi(x)$ е од вид

$$\phi(x) = (x-x_1)^{\alpha}(x-x_2)^{\beta}(x-x_3)^{\gamma},$$

каде што α,β и γ се параметри [2]. За определување на параметрите α,β и γ со директна замена во равенката (1.1) се добива доста гломазен нелинеарен систем алгебарски равенки. Според теоремата на Безу, овој систем има најмногу 8 тројки решенија. Фактички се добиваат единствени ненулти вредности на параметрите α,β и γ и тие се комбинираат со 0. Во првата тројка сите се нули. Потоа доаѓаат подредени тројки од сите комбинации со по една ненулта вредност, па подредени тројки од сите комбинации со по две ненулти вредности и на крајот подредена тројка од ненултите вредности.

Од друга страна, од релацијата

$$\frac{B(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{p}{x-x_1} + \frac{q}{x-x_2} + \frac{r}{x-x_3},$$

за определување на неопределените коефициенти p,q и r се добива линеарен систем алгебарски равенки кој има единствено решение:

$$p = \frac{B(x_1)}{(x_3-x_1)(x_2-x_1)}, \quad q = \frac{B(x_2)}{(x_1-x_2)(x_3-x_2)},$$
$$r = \frac{B(x_3)}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)}. \tag{1.2}$$

Лесно се покажува дека меѓу единствените ненулти вредности на параметрите α,β и γ и вредностите на неопределените коефициенти p,q и r дадени со (1.2), постои доста едноставна врска:

$$\alpha+p = 1, \quad \beta+q = 1, \quad \gamma+r = 1.$$

Со тоа всушност се поедноставува постапката за добивање на сите равенки кои имаат ист вид со равенката (1.1).

Значи, равенката (1.1) со смените

$$y(x) = (x-x_1)^{\alpha_i}(x-x_2)^{\beta_i}(x-x_3)^{\gamma_i}z_i(x), \quad i=\overline{1,8},$$

се трансформира во равенки од ист вид:

$$\begin{aligned}&(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)z_i'' + [2\alpha_i(x-x_2)(x-x_3)+2\beta_i(x-x_1)(x-x_3)+\\ &+ 2\gamma_i(x-x_1)(x-x_2)+B(x)]z_i'+[2\alpha_i\beta_i(x-x_3) + \\ &+ 2\alpha_i\gamma_i(x-x_2)+2\beta_i\gamma_i(x-x_1)+\delta_i x+s_i+C(x)]z_i = 0, \quad i=\overline{1,8},\end{aligned} \tag{1.3}$$

каде што $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=(0,0,0)$, $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2) = (1-p,0,0)$,

$(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3) = (0,1-q,0)$, $(\alpha_4,\beta_4,\gamma_4) = (0,0,1-r)$,

$(\alpha_5,\beta_5,\gamma_5) = (1-p,1-q,0)$, $(\alpha_6,\beta_6,\gamma_6) = (1-p,0,1-r)$,

$(\alpha_7,\beta_7,\gamma_7) = (0,1-q,1-r)$, $(\alpha_8,\beta_8,\gamma_8) = (1-p,1-q,1-r)$,

а

$$\delta_i = \alpha_i(\alpha_i-1)+\beta_i(\beta_i-1)+\gamma_i(\gamma_i-1)+(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i)b_2,$$

$$s_i = \alpha_i(\alpha_i-1)(x_1-x_2-x_3)+\beta_i(\beta_i-1)(x_2-x_1-x_3) +$$

$+ \gamma_i(\gamma_i-1)(x_3-x_1-x_2)+\alpha_i(b_2x_1+b_1)+\beta_i(b_2x_2+b_1) +$

$+ \gamma_i(b_2x_3+b_1), \quad (i=\overline{1,8}).$

Во [4] е разгледуван случајот $x_3=b_0=c_0=0$ и со друга постапка се добиени исти резултати.

Може да се констатира дека ако една од осумте равенки може да се реши, тогаш можат да се решат и другите седум со што се проширува класата интеграбилни равенки. Бидејќи, пак, сите осум равенки имаат ист нормален вид, ќе бидат интеграбилни и други равенки кои го имаат истиот нормален вид.

Диференцијалната равенка (1.1) има едно полиномно решение ако се задоволени условите

$$\frac{n(n-1)}{6}A'''(x) + \frac{n}{2}B''(x) + C'(x) = 0,$$

$$\frac{n(n+1)}{2}A''(x) + (n+1)B'(x) + C(x) = 0,$$

каде што $A(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, $n\in N$ [1]. Применувајќи ги истите услови за секоја од равенките (1.3) се добиваат следниве групи услови:

$$\frac{n(n-1)}{6}A'''(x) + \frac{n}{2}B_i''(x) + C_i'(x) = 0, \qquad (1.4.i)$$

$$\frac{n(n+1)}{2}A''(x)+(n+1)B_i'(x)+C_i(x) = 0, \quad i=\overline{1,8}, \quad n\in N,$$

каде што

$$B_i(x) = 2\alpha_i(x-x_2)(x-x_3)+2\beta_i(x-x_1)(x-x_3) +$$
$$+ 2\gamma_i(x-x_1)(x-x_2)+B(x),$$

$$C_i(x) = 2\alpha_i\beta_i(x-x_3)+2\alpha_i\gamma_i(x-x_2)+2\beta_i\gamma_i(x-x_1) +$$
$$+ \delta_i x+s_i+C(x), \quad i=\overline{1,8}, \quad n\in N$$

Теорема: Диференцијалната равенка (1.1) може да се интегрира во затворен вид ако е задоволена една од групите услови (1.4.i) $i=\overline{1,8}$.

Тогаш општото решение ќе биде дадено со формулата [1]:

$$y=(x-x_1)^{\alpha_i}(x-x_2)^{\beta_i}(x-x_3)^{\gamma_i}\{A(x)\cdot\phi^{-1}(x)\left[C_1A^n(x)\phi(x)+\right.$$
$$\left.+C_2A^n(x)\int A^{-n-1}(x)\phi^{-1}(x)dx\right]^{(n+1)}\}, \tag{1.5}$$

каде што $\phi(x) = \exp(\int\frac{B(x)}{A(x)}dx)$ и C_1, C_2 - константи.

Со групите услови (1.4.i) можат да се интегрираат во затворен вид доста голем број диференцијални равенки кои не се забележени во [3].

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Пиперевски, Б.М.: За една генерализација на формулата на Родригес, Зборник на трудови на ЕТФ, бр. 5(1987), 93-98, Скопје

[2] Пиперевски, Б.М.: За една трансформација на класа линеарни диференцијални равенки од втори ред; Зборник на трудови на ЕТФ, бр. 6(1989), (во печат), Скопје

[3] Камке, Э.: Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Москва, 1971 (руски превод)

[4] Šapkarev, I.A.: Über die Rodriquesformel und line ihre anwendung, MANU Contributions, Section of Mathematical and Technical Sciences, IV 1 (1983), Skopje

ON A CLASS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

Boro M. Piperevski

S u m m a r y

A class of differential equations of the form (1.1) is considered in this paper. The main result obtained here is the following:

Theorem. If anyone of the groups of conditions (1.4.i), $i=\overline{1,8}$ is fulfilled, then the differential equation (1.1) can be integrated in a "closed way".

In that case the general solution of (1.1) is given by (1.5).