РЕШЕНИЈА НА НЕКОИ ИНТЕРЕСНИ ТРАНСЦЕНДЕНТНИ РАВЕНКИ

Д. Перчинкова

Обработувајќи, на повеќе наврати, разни проблеми со сопствени вредности, полесни или потешки [1], [2], [3], [4], почнувајќи од третиот ред па се до осми ред дојдовме и до разни трансцендентни равенки. Решавањето на овие трансцендентни равенки претставуваше посебен проблем, така што некои од нив беа решавани, т. е. најдени по неколку приближни вредности, додека другите не. Во меѓувреме, за повеќето од овие равенки добивме решенија и тоа за некои (означени со *) од R. Bodard од Нумеричкиот институт „Blaise Pascal" во Париз, а за други (означени со **) од Д. Карчицка од Нумеричкиот центар при Сеизмолошкиот институт во Скопје.

Проблемите со сопствени вредности за коишто стана збор погоре се следните:

(1) $$y''' + \lambda y = 0, \qquad \lambda = k^3$$

$$y(a) = y'(a) = y(b) = 0;$$

$$y''' + \lambda y = 0, \qquad \lambda = k^3$$

l2) $$y(a) = y'(a) = y'(b) = 0;$$

$$y'''(a) + \lambda y = 0, \qquad \lambda = k^3$$

(3) $$y(a) = y'(a) = y''(b) = 0$$

$$y^{\mathrm{V}} + \lambda y = 0, \qquad \lambda = k^5$$

(4) $$y(a) = y'(a) = y''(a) = y(b) = y'(b) = 0;$$

$$y^{\mathrm{V}} + \lambda y = 0, \qquad \lambda = k^5$$

(5) $$y(a) = y'(a) = y''(a) = y'''(b) = y^{\mathrm{IV}}(b) = 0;$$

$$y^{\mathrm{VI}} + \lambda y = 0, \qquad \lambda = -k^6$$

(6) $$y(a_i) = y'(a_i) = y''(a_i) = 0 \quad (i = 1{,}2)$$

$$0 = \text{ʎ}y + {}_{\mathrm{VIII}}\lambda \qquad \lambda = -k^8$$

(7) $$y(a_i) = y'(a_i) = y''(a_i) = y'''(a_i) = 0 \qquad (i = 1{,}2)$$

Одредувајќи ги вредностите на параметарот λ, за секој посебен проблем, за којшто дадениот проблем со сопствени вредности има сопствени решениа, дојдовме до следните резултати:

1. Сопствените вредности λ за проблемот (1) се дадени со трансцендентната равенка

$$\left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} K - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} K\right) e^{\frac{3}{2} K} = 1, \quad K = k(b-a). \tag{1.1}$$

Првите десет приближни вредности по K на оваа равенка со точност до 10^{-10} се следните*: [1])

$$\begin{array}{r} 4,\ 23320\ 71924 \\ 7,\ 85979\ 28673 \\ 11,\ 48739\ 59923 \\ 15,\ 11499\ 47017 \\ 18,\ 74259\ 34300 \\ 22,\ 37019\ 21585 \\ 25,\ 99779\ 08870 \\ 29,\ 62538\ 96155 \\ 33,\ 25298\ 83441 \\ 36,\ 88058\ 70721 \end{array} \tag{1.11}$$

Приближните вредности на равенката (1.1) можат да се одредат и од изразот

$$L_n = \frac{6n+1}{9} \pi \sqrt{3} \qquad (n = 1,2,\ldots) \tag{1.2}$$

кој почнувајќи од $n = 5$ ни дава вредности точни до 10^{-10} како што се гледа подолу.

Земајќи во (1.2) за $n = 1,2,\ldots 10$ со точност до 10^{-10} имаме;

$$\begin{array}{r} 4,\ 23219\ 85165 \\ 7,\ 85979\ 72450 \\ 11,\ 48739\ 59734 \\ 15,\ 11499\ 47019 \\ 18,\ 74259\ 34300 \\ 22,\ 37019\ 21585 \\ 25,\ 99779\ 08870 \\ 29,\ 62538\ 96155 \\ 33,\ 25298\ 83441 \\ 36,\ 88058\ 70721 \end{array}$$

[1]) За оваа равенка приближни решенија има дадено Д. Славиќ [2, стр. 33].

2. Сопствените вредности λ за проблемот (2) се дадени со трансцендентната равенка

$$\left(\sqrt{3}\,\sin\frac{\sqrt{3}}{2}K+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}K\right)e^{\frac{3}{2}K}=1,\quad K=k\,(b-a). \tag{2.1}$$

Првите десет приближни вредности по K на оваа равенка со точност до 10^{-10} се следните:*

$$\begin{array}{r} 3,\ 01674\ 42121 \\ 6,\ 65062\ 45189 \\ 10,\ 27819\ 62808 \\ 13,\ 90579\ 51262 \\ 17,\ 53339\ 38538 \\ 21,\ 16099\ 25823 \\ 24,\ 78859\ 13108 \\ 28,\ 41619\ 00394 \\ 32,\ 04378\ 87674 \\ 35,\ 67138\ 74964 \end{array} \tag{2.11}$$

Слично на претходниот случај, приближните вредности на равенката (2.1) можат да се одредат и од изразот

$$L_n=\frac{6\,n-1}{9}\pi\,\sqrt{3} \qquad (n=1,2\ldots) \tag{2.2}$$

кој почнувајќи од $n=5$ ни дава вредности точни до 10^{-10} како што можеме да видиме подолу. Земајќи во (2.2) за $n=1,2,\ldots,10$ со точност до 10^{-10} имаме:

$$\begin{array}{r} 3,\ 02299\ 89404 \\ 6,\ 65059\ 76688 \\ 10,\ 27819\ 63972 \\ 13,\ 90579\ 51258 \\ 17,\ 53339\ 38538 \\ 21,\ 16099\ 25823 \\ 24,\ 78859\ 13108 \\ 28,\ 41619\ 00394 \\ 32,\ 04378\ 87674 \\ 35,\ 67138\ 74964 \end{array}$$

3. Сопствените, пак, вредности λ за проблемот (3) се дадени со трансцен дентната равенка

$$2\,e^{\frac{3}{2}K}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}K=1, \qquad K=k\,(b-a \tag{3.1}$$

чиишто првите десет приближни вредности со точност до 10^{-10} се следните*:

$$
(3.11)\qquad
\begin{aligned}
&1,\ 77341\ 12230\\
&5,\ 44156\ 27490\\
&9,\ 06899\ 61074\\
&12,\ 69659\ 55526\\
&16,\ 32419\ 42776\\
&19,\ 95179\ 30062\\
&23,\ 57939\ 17347\\
&27,\ 20699\ 04632\\
&30,\ 83458\ 91917\\
&34,\ 46218\ 79198
\end{aligned}
$$

Решенијата на равенката (3.1) приближно можат да се одредат и од изразот

$$
(3.2)\qquad L_n = \frac{2n-1}{3}\pi\sqrt{3} \qquad (n = 1,2,\ldots)
$$

кој, како што можеме лесно да видиме, почнувајќи од $n = 6$ ни дава вредности точни и до 10^{-10}:

$$
\begin{aligned}
&1,\ 81379\ 93642\\
&5,\ 44139\ 80927\\
&9,\ 06899\ 68211\\
&12,\ 69659\ 55496\\
&16,\ 32419\ 42781\\
&19,\ 95179\ 30062\\
&23,\ 57939\ 17347\\
&27,\ 20699\ 04632\\
&30,\ 83458\ 91917\\
&34,\ 46218\ 79198
\end{aligned}
$$

4. Проблемот со сопствени вредности од V ред (4) за сопствените вредности λ доведува до трансцендентната равенка

$$
(4.1)\qquad
\begin{aligned}
&A_1\, e^{2BK} + A_2\, e^{-2DK} + e^{(B-1)K}(A_3 \cos AK\\
&\quad - A_4 \sin AK) + e^{-(D+1)K}(-A_3 \cos CK + A_5 \sin CK)\\
&\quad + e^{(B-D)K}(A_4 \sin AK \cos CK - A_5 \cos AK \sin CK)\\
&\quad + A_6 \cos AK \cos CK - A_7 \sin AK \sin CK) = 0,
\end{aligned}
$$

каде

$$
A = \sin\frac{\pi}{5},\quad B = \cos\frac{\pi}{5},\quad C = \sin\frac{2\pi}{5},\quad D = \cos\frac{2\pi}{5};
$$

$$
(4.2)\qquad
\begin{aligned}
&A_1 = A(2C - A),\ A_2 = C(2A + C),\ A_3 = A^2 + C^2,\\
&A_4 = 2BC + \frac{3}{2}A + \frac{3}{2}C,\quad A_5 = 2AD + \frac{3}{2}C - \frac{3}{2}A,\\
&A_6 = A^2 - C^2 - 4AC,\qquad A_7 = B^2 + D^2 + 2B - 2D + 2,\quad K = k(b-a)
\end{aligned}
$$

чии што првите десет приближни решенија со точност до 10^{-5} се**:

$$
(4.11)\qquad
\begin{array}{r}
0,\ 00000\\
-\ 5,\ 64117\\
-\ 8,\ 91600\\
-12,\ 22238\\
-15,\ 52532\\
-18,\ 82862\\
-22,\ 13188\\
-25,\ 43515\\
-28,\ 73842\\
-32,\ 04168
\end{array}
$$

5. Проблемот, пак, со сопствени вредности (5), исто така од петти ред, за сопствените вредности λ ни ја дава равенката

$$
\begin{aligned}
&A_1 e^{2BK} + A_2 e^{-2DK} + 2A_2 e^{(B-1)K} \cos AK\\
(5.1)\qquad &+ 2A_1 e^{-(D+1)K} \cos CK + 2e^{(B-D)K} (A_8 \sin AK \sin CK\\
&- A_6 \cos AK \cos CK) = 0,
\end{aligned}
$$

каде $A_1, A_2, \ldots, A_7$ се дадени со (4.2) и

$$A_8 = (B + D)^2,$$

чиишто првите десет приближни решенија со точност до 10^{-5} се**;

$$
(5.11)\qquad
\begin{array}{r}
-\ 2,\ 09769\\
-\ 4,\ 91987\\
-\ 8,\ 26276\\
-11,\ 56096\\
-14,\ 86474\\
-18,\ 16796\\
-21,\ 47123\\
-24,\ 77450\\
-28,\ 07777\\
-31,\ 38103
\end{array}
$$

6. Проблемот со сопствени вредности (6) од шести ред не доведува до трансцендентната равенка

$$
\begin{aligned}
&2\, e^{K}(5\, e^{2K} + 2) \cos^2 \frac{\sqrt{3}}{2} K + 16\, e^{\frac{3}{2} K} (e^{K} - 1) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} K\\
(6.1)\qquad &+ (e^{2K} - 1)\, (e^{2K} - 6\, e^{K} + 1) = 0, \qquad\qquad K = k\,(b - a)
\end{aligned}
$$

чие што едно приближно решение по K со точност до 10^{-8} е**

$$(6.11)\qquad -1,\ 4728\ 3649$$

Врз основа на голем број тестирања изгледа дека ова решение е и единствено.

7. И накрај, проблемот со сопствени вредности од осми ред (7) не доведува до трансцендентната равенка

$$(\cos^2 K_1 + ch^2 K_1 - 2)(1+\alpha) + 2\sqrt{2}(\gamma_1 sh\, K$$
$$- \delta_1 \sin K) - 4(\cos K + chK)\,\alpha_1 - \sqrt{2}(\gamma\, sh 2K_1 \tag{7.1}$$
$$- \delta \sin 2K_1) + 2(\cos^2 K_1 + ch^2 K_1)\,\alpha = 0,$$

каде

$$K_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} K, \qquad K = k(b-a)$$

$$\alpha = \cos K\, ch\, K, \qquad \gamma = \cos K\, sh\, K,$$

$$\beta = \sin K\, sh\, K, \qquad \delta = \sin K\, ch\, K,$$

и

$$\alpha_1 = \cos K_1\, ch\, K_1, \qquad \gamma_1 = \cos K_1\, sh\, K_1,$$

$$\beta_1 = \sin K_1\, sh\, И_1, \qquad \delta_1 = \sin K_1\, ch\, K_1$$

Првите петнаесет приближни решенија по K на равенката (7.1) со точност до 10^{-10} се следните*:

(7.11)

3, 32009 52917
7, 81870 61627
10, 99583 05126
14, 13769 83859
17, 27882 26516
20, 42035 44422
23, 56194 44409
26, 70353 74693
29, 84513 02028
32, 98672 28623
36, 12831 55158
39, 26990 81693
42, 41150 08228
45, 55309 34762
48, 69468 61306

Приближните решенија по K на равенката (7.1) можат да се одредат и од изразот

$$L_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{7.2}$$

каде што, почнувајќи од $n = 11$ добиваме решенија со точност до 10^{-10}, што може да се види ако во изразот (7.2) даваме вредности на $n = 1,2,\ldots, 15$, па добиваме:

4, 71238 89803
7, 85398 16339
10, 99557 42874
14, 13716 69411
17, 27875 95945
20, 42035 22480
23, 56194 49015
26, 70353 75554
29, 84513 02089
32, 98672 28623
36, 12831 55158
39, 26990 81693
42, 41150 08228
45, 55309 34762
48, 69468 61306.

Д. Перчинкова:

ЛИТЕРАТУРА

[1] За еден Sturm-Liouville-ов проблем, Годишен збирник, на Фил. фак., Природно-математ. оддел, Скопје, 9, 31—36, Скопје.

[2] Прилог кон изучувањето на хомогените проблеми со сопствени вредности при обичните линеарни диференцијални равенки. Посебни изданија на Природно-математичкиот факултет во Скопје, кн. 13, 1—96, 1963.

[3] За еден Sturm-Liouville-ов проблем од VIII ред. Годишен зборник на ПМФ, Секција А, кн. 16 (1965), 5—14.

[4] За еден проблем со сопствени вредности од VI ред. Годишен зборник на ПМФ, Секција А, кн. 19—20 (1968—1969), во печат.

Да се види:

[1] E. Kamke, Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen, Bd I, Leipzig 1959.

[2] L. Collatz, Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, Leipzig 1945.

D. Perčinkova

LES SOLUTIONS DE QUELQUES EQUATIONS TRANSCENDANTES INTERESSENTES

(Résumé)

Pour les équations transcendentes (1.1), (2.1), (3.1), (4.1), (5.1), (6.1). (7.1)[1]), dans ce travail sont données plusieures solutions pour chacune d'elles par (1.11), (2.11), (3.11), (4.11), (5.11), (6.11), (7.11), respectivement.

Cettes équations transcendantes sont en réalité les équations caracteristiques des valeurs propres des problèmes aux limites (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), respectivement données.

Les problèmes aux limites ci-dessus sont considérées dans les travails [1], [2], [3], [4].

[1]) Voir le texte macêdonien.