# ОПШТА ФОРМУЛА ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ ЗАПРЕМИНЕ СТАБЛА И ЊЕГОВИХ ДЕЛОВА

МИЛОРАД РАДОЊИЋ

## 1. Увод

Један од најважнијих задатака дендрометрије је одређивање запремине (дрвне масе) стабала и њихових делова. За испуњење тога задатка постоје у шумарској литератури разне формуле, међу којима се налазе и формуле за приближно одређивање запремине лежећих стабала и њихових делова.

У овом раду показаћемо како се све главне формуле за приближно одређивање запремине лежећих стабала и њихових делова могу обухватити једном јединoм формулом, која их у неку руку уопштава, а из које се свака поједина од њих може извести као њен посебан случај.

Уједно ћемо показати како се из те опште формуле може добити велики број других, нових фомула које могу послужити истом циљу као и оне претходне.

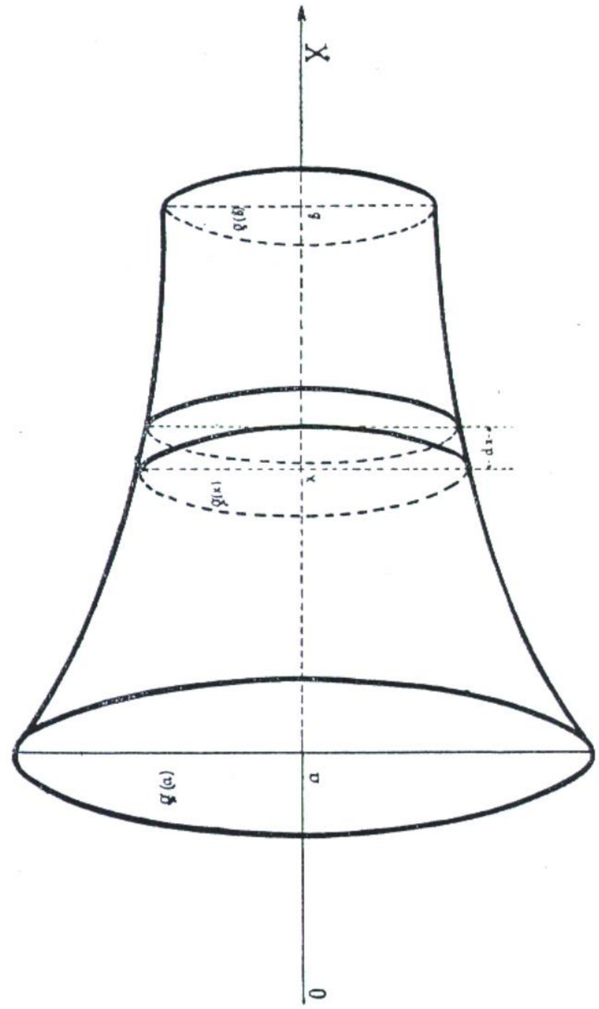
## 2. Извођење опште формуле

Пре него што пређемо на одређивање запремине самога стабла, учинићемо кратак осврт на један став из више математике.

Нека имамо тело које има особину да су површине његових пресека, повучених паралелно са неком равни, функције њихових отстојања од те равни. $X$-осовина правоуглог координатног система нека пада нормално на раван с којом су повучени пресеци тела паралелни (сл. 1). Ако двема паралелним равнинама, које стоје нормално на $X$-осовину у тачкама апсцисе $a$ и $b$, пресечемо тело, оне ће омеђавати својим површинама пресека део запремине тела. Ове површине означимо са $g(a)$ и $g(b)$. Замислимо затим раван управну на $X$-осовини у макојој тачки апсцисе $x$ и другу паралелну њој на бесконачно малом отстојању $dx$ од ње. Површину пресека прве до ових равни означимо са $g(x)$, узимајући да је функција $g(x)$ позната и непрекидна у интервалу од $a$ до $b$.

Елементарни део тела, који ограничава површина $g(x)$ и њој паралелна површина на бесконачно малом отстојању $dx$, може се сматрати да је ваљак са основицом $g\ (x)$ и висином $dx$. Запремина тога ваљка биће

$$d\ V = g\ (x)\ dx.$$



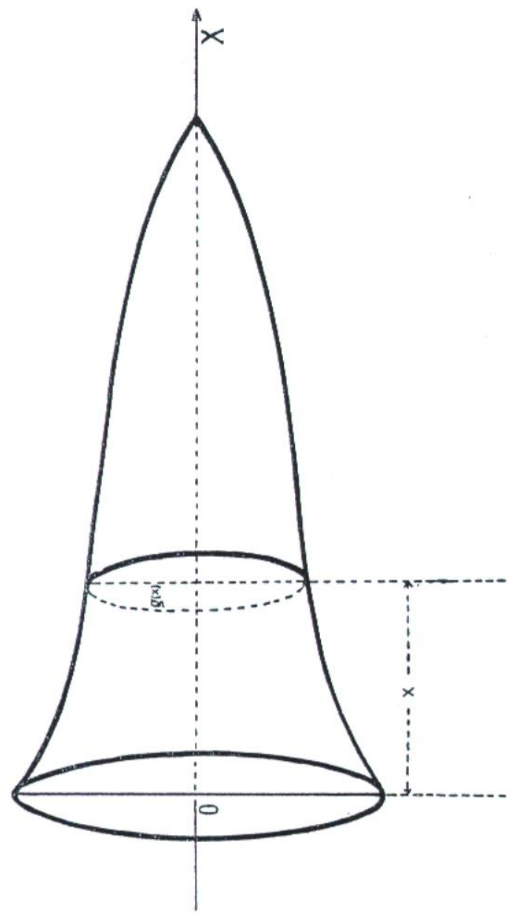

Слика 1.

Запремина тела садржана између паралелних равни које секу $X$-осовину у тачкама $a$ и $b$ добиће се као одређени интеграл функције $g\ (x)$ узет у интервалу од $a$ до $b$, тј. биће

$$V = \int_a^b g\ (x)\ dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

где је $g(x)$ дата функција од $x$. Један од крајњих пресека тела $g(a)$ или $g(b)$ или оба заједно, могу бити сведени и на тачку.

Слика 2 приказује једно оборено стабло и то тако, да се уздужна осовина стабла поклапа са $X$-осовином правоуглог координатног система, док се координатни почетак налази у средишту основе (нултог пресека). На слици су пречници нанесени у већој




Слика 2.

размери него одговарајуће висине, да би се јаче истакао облик стабла, који је иначе у природи мање изразит. Наравно, претпоставља се увек да је у нормалном случају општа тенденција при рашћењу стабла симетричан облик.

Попречни пресеци стабла нормални су на $X$-осовину, а величина површине тих пресека зависи од њиховог отстојања од основе стабла, тј. површине попречних пресека су функције отстојања $x$. Према томе површина ма ког попречног пресека стабла, у тачки апцисе $x$, дата је неком функцијом $g(x)$, за коју знамо да је непрекидна у посматраном интервалу, те ћемо применом формуле (1) у границама од $o$ до $x$ имати формулу

$$V = \int_o^x g(x)\, d\, x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

где $V$ претставља запремину дела стабла од основе до висине $x$.

Међутим, како облик функције $g(x)$ код стабла није познат, то нам није могућа директна примена формуле (2).

Али, знамо да је функција $g(x)$ непрекидна у посматраном интервалу, пошто у њему површине $g(x)$ нису ни бесконачне ни неодређене, што значи да она испуњава услове за развијање у Maclaurin-ов ред

$$g(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

где су $A, B, C, D, \ldots$ неки стални коефицијенти. Отуд, употребом формуле (2), добиће се да је запремина

$$V = \int^x (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ) \; dx$$

одакле, обичном интеграцијом

$$V = Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{3} + \frac{Dx^4}{4} + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Ако се са $l$ означи дужина целог стабла или његовог дела онда ће одговарајућа запремина бити

$$V = Al + \frac{Bl^2}{2} + \frac{Cl^3}{3} + \frac{Dl^4}{4} + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Како коефицијената $A, B, C, D, \ldots$ има бесконачно много а ми смо у могућности да употребимо само ограничен број од њих, јасно је да се на овај начин може добити само приближна вредност тражене запремине. Добијени резултат ће, и поред тога што тачност зависи од начина одређивања коефицијента, бити утолико тачнији уколико се више коефицијената употреби при рачунању.

Приближне вредности коефицијената $A, B, C, \ldots$ могу се одредити помоћу функције (3) на тај начин што се мерењем попречних пресека $g(x)$, на познатим отстојањима $x$ од основе, добија онолико једначина колико се жели. Кад се склопи онолико једначна колико се коефицијената $A$, $B$, $C$, . . . узима у обзир, онда се они из тих једначина могу и одредити.

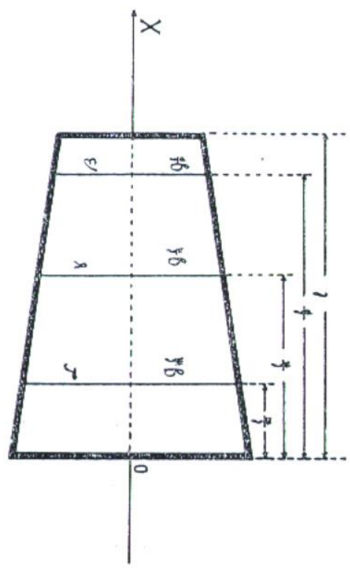
С обзиром на задатак, који смо овде поставили, довољно ће бити ако се код функције (3) задржимо само на прва три члана

$$g(x) = A + Bx + Cx^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

у ком случају ће и формула (4) бити

$$V = Al + \frac{Bl^2}{2} + \frac{Cl^3}{3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Како у формули (6) фигуришу три коефицијента, склопићемо три једначине облика функције (5). То ћемо постићи мерењем трију попречних пресека $g(x)$, на познатим отстојањима $x$ од основе.




Слика 3.

Као општи случај узећемо три произвољна попречна пресека, на отстојањима од основе $\frac{l}{m}$, $\frac{l}{n}$ и $\frac{l}{p}$ (слика 3), где $l$ означава дужину целог стабла или његовог дела, а $m$, $n$ и $p$ неке произвољне бројеве. Ако површине произвољно узетих попречних пресека обележимо знацима

$$g_{\frac{l}{m}} = \alpha, \quad g_{\frac{l}{n}} = \gamma, \quad g_{\frac{l}{p}} = \beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

онда ће се из функције (5) добити следеће три једначине:

$$A + \frac{Bl}{m} + \frac{Cl^2}{m^2} = \alpha,$$

$$A + \frac{Bl}{n} + \frac{Cl^2}{n^2} = \gamma, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$A + \frac{Bl}{p} + \frac{Cl^2}{p^2} = \beta,$$

које кад се реше по непознатим коефицијентима A, $B$ и $C$, дају

$$A = \frac{(\alpha m^2 - \gamma n^2)\ (m - p) - (\alpha m^2 - \beta p^2)\ (m - n)}{(m - n)\ (m - p)\ (n - p)},$$

$$B = - \frac{(\alpha\, m^2 - \gamma\, n^2)\ (m^2 - p^2) - (\alpha\, m^2 - \beta\, p^2)\ (m^2 - n^2)}{l\,(m - n)\ (m - p)\ (n - p)}, \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$C = \frac{m\,n\,p\ [(\alpha\, m - \gamma\, n)\ (m - p) - (\alpha\, m - \beta\, p)\ (m - n)]}{l^2\ (m - n)\ (m - p)\ (n - p)}$$

Кад се овако нађене приближне вредности коефицијената $A$, $B$ и $C$ унесу у формулу (6), добиће се

$$V = \frac{l}{6} \cdot \frac{a\,\alpha\, m^2\,(n - p) + b\,\beta\, p^2\ (m - n) - c\,\gamma\, n^2\ (m - p)}{(m - n)\ (m - p)\ (n - p)} \ldots\ldots \quad (10)$$

где је

$$a = 6 - 3\ (n + p) + 2\ n\ p$$

$$b = 6 - 3\ (m + n) + 2\ m\ n$$

$$c = 6 - 3\ (m + p) + 2\ m\ p$$

Добијена формула (10) претставља тражену општу формулу.

### 3. Добијање појединих формула из опште формуле (10)

Кад се промењљивим величинама $m$, $n$ и $p$, које фигуришу у општој формули за запремину (10), дају разне вредности, попречни пресеци $\alpha$, $\gamma$ и $\beta$ се померају и могу заузети свако отстојање од основе стабла или његовог дела, а могу се неки од њих и са свим елиминисати.

Да би се из опште формуле (10) добила нека од познатих формула за приближно одређивање запремине стабла или његовог дела, треба попречне пресеке $\alpha$, $\gamma$ и $\beta$ померањем поставити тачно на она места где су ти пресеци предвиђени формулом која се жели добити, дајући притом величинама $m$, $n$ и $p$ одговарајуће вредности. Ако у формули, која се жели добити, не фигурише неки пресек, онда га треба елиминисати, узимањем да његово отстојање од основе тежи бесконачности.

Ближи опис поступка за добијање појединих формула за приближно одређивање запремине стабала или њихових делова изнећемо у табеларном облику.

Напомињемо да се формуле за приближно одређивање запремине стабала или њихових делова, а у којима фигуришу два пресека, могу брже и лакше добити из опште формуле са два пресека

$$V = \frac{l}{2\,(m - n)}\,[\alpha m\,(2 - n) - \gamma n\,(2 - m)] \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

која произилази из опште формуле (10) кад се из ње елиминише трећи пресек $\beta$ узимајући да $\frac{l}{p} \rightarrow \infty$, тј. узимајући да $p \rightarrow 0$.

Јасно је да се општа формула (11) може извести и директно, по истој методи која је примењена при извођењу формуле (10), задржавајући код функције (3) прва два члана и узимајући у обзир само два произвољна пресека $\alpha$ и $\gamma$.

Међутим, важност општих формула (10) и (11) лежи поглавито у томе што се, мењањем места попречних пресека $\alpha$, $\gamma$ и $\beta$, тј. давањем разних произвољних вредности величинама $m$, $n$ и $p$, може доћи до читавог низа нових формула за приближно одређивање запремине стабала и њихових делова.

Тако, например, ако у формули (10) узмемо да је $m = 3$, $n = 2$, $p = \frac{3}{2}$, добићемо формулу

$$V = \frac{l}{2}\,(3g^1/_3 + 3g^2/_3 - 4g^1/_2), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

или, ако у истој формули узмемо да је $m = 6$, $n = 2$, $p = \frac{6}{5}$, добићемо формулу

$$V = \frac{l}{8}\,(3g^1/_6 + 3g^5/_6 + 2g^1/_2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

или, ако пак узмемо да је $m = 8$, $n = 2$, $p = \frac{8}{7}$, добићемо

$$V = \frac{l}{3}\,(g^1/_8 + g^1/_2 + g^7/_8) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

То би било неколико примера за добијање нових формула за приближно одређивање запремине стабала и њихових делова у којима се налазе по три попречна пресека. Нова формула са два попречна пресека

$$V = \frac{l}{2}\,(g^1/_6 + g^5/_6) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

може се добити ако се у формули (11) стави да је $m = 6$, $n = \frac{6}{5}$.

или ако се у формули (10) узме да је $m = 6$, $n = \frac{6}{5}$, а $p \to 0$.

На тај начин опште формуле (10) и (11) су неограничен извор за добијање нових формула за приближно одређивање запремине стабала и њихових делова. Оне дају могућност да се пронађу и боље формуле од постојећих, водећи при томе рачуна о врсти дрвета, условима рашћења и делу стабла чија се запремина одређује.

Наравно, које су најпогодније вредности које треба дати величинама $m$, $n$ и $p$, предмет је посебног испитивања, јер излази из граница које су овом раду постављене.

## ЗАКЉУЧАК

На основу предњих излагања могу се извући следећи закључци:

1) Главне формуле за приближно одређивање запремине целих стабала и њихових делова (Huber-ова, Smalian-ова, Hossfeld-ова, Riecke-ова итд.) обухваћене су општом формулом (10), из које се свака од њих може добити као њен посебан случај.

2) Кад се величинама $m$, $n$ и $p$, које фигуришу у општој формули (10), дају разне вредности, може се доћи до читавог низа нових формула за приближно одређивање запремине стабала и њихових делова.

Постоје, дакле, велике могућности за добијање нових формула. Потребно је само, с обзиром на обележја (врсту дрвећа, услове рашћења и део стабла), изнаћи такве вредности за $m$, $n$ и $p$, да тако добијене формуле дају боље резултате од постојећих.

### ЛИТЕРАТУРА

1) Михајлов: Дендрометрија. Скопје 1952.
2) Levaković: Dendrometrija. Zagreb 1922.
3) Мирковић: Дендрометрија. Београд 1948.
4) Тюрин: Таксация леса. Москва 1938.
5) Karapandžić: Viša matematika za studente šumarstva. Beograd 1949.
6) Кашанин: Виша математика I. Београд 1949.
7) Marković: Uvod u višu analizu. Zagreb 1947.

## EINE ALLGEMEINE FORMEL ZUR BESTIMMUNG DES INHALTES VON STÄMMEN UND STAMMABSCHNITTEN

Milorad Radonjić

Zur Bestimmung des Inhaltes (der Masse) liegender Stämme und deren Teile besteht eine grosse Zahl von Formeln. Der Verfasser hat auch eine solche Formel gefunden, die jedoch allgemeinere Bedeutung hat. Aus derselben lassen sich nämlich alle bisher bekannten

Formeln als Spezialfälle ableiten oder mit anderen Worten, es ist dies eine allgemeine Formel für die Bestimmung der Masse von liegenden Stämmen und Stammabschnitten. Aus dieser allgemeinen Formel kann, weiters, eine grosse Zahl neuer Formeln erhalten werden, die demselben Zwecke dienen, jedoch bessere Resultate geben können als mit bisher benützten Formeln erhältlich sind.

Zum Zwecke der Ableitung der allgemeinen Formel wird das rechtwinklige Koordinatensystem so gestellt, dass dessen Nullpunkt mit dem Mittelpunkte der Grundfläche, die $X$-Achse mit der Längsachse des Stammes zusammenfallen (Abb. 2).

Da die Flächeninhalte der einzelnen Stammquerschnitte von ihrem Abstand $x$ von der Grundfläche abhängen, so muss der Inhalt eines beliebigen Querschnittes, im Punkte $x$ eine Funktion $g(x)$ sein, die, wie wir wissen, im betrachteten Intervall kontinuierlich ist.

Zur Bestimmung des Inhaltes von Körpern, deren Querschnittflächen, parallel zu einer Ebene, Funktionen ihrer Entfernungen von der gemeinten Ebene sind, gilt die Formel (1) (Abb. 1). Wenn dieselbe auf Stämme innerhalb der Grenzen $0$ bis $x$ (Abb. 2) angewandt wird, so bedeutet $v$ den Stamminhalt von der Grundfläche bis zur Höhe $x$.

Da für Baumstämme die Gestalt der Funktion $g(x)$ nicht bekannt ist, wohl aber die Tatsache, dass im beobachteten Intervall die Flächen $g(x)$ weder unendlich noch unbestimmt sind, so erfüllt die Funktion $g(x)$ die Bedingungen für die Entwicklung in Maclaurinsche Reihe (3). Man erhält daher bei Benützung von Formel (2) und Integration die Formel (4), worin mit $l$ die ganze Stamm-oder Stammabschnittslänge bezeichnet wird.

Wenn man, mit Rücksicht auf die gestellte Aufgabe, nur die ersten drei Glieder der Funktion (3) beibehält, so ergibt sich die Formel (5) und infolgedessen geht Formel (4) in Formel (6) über.

Wenn drei beliebige Stammquerschnitte in Entfernungen von der Grundfläche $\frac{l}{m}$, $\frac{l}{n}$, $\frac{l}{p}$ genommen werden (Abb. 3) wobei $m$, $n$, $p$ beliebige Zahlen sein können und wenn für diese Querschnitte die Bezeichnungen (7) eingeführt werden, so erhält man aus der Funktion (5) drei Gleichungen (8).

Durch Auflösung dieser Gleichungen findet man Näherungswerte der Koeffizienten $A$, $B$, $C$, dargestellt durch die Ausdrücke (9). Führt man nun diese Werte der Koeffizienten $A$, $B$, $C$ in die Formel (6) ein, so ergibt sich Formel (10), die die gesuchte Allgemeine Formel vorstellt.

Um aus der allgemeinen Formel (10) eine der bekannten Formeln zu erhalten, müssen die Querschnitte $\alpha$, $\gamma$, $\beta$ genau an jene Stellen verschoben werden, wo sie in der entsprechenden Formel vorgesehen sind, indem den Grössen $m$, $n$, $p$ die dazugehörigen Werte gegeben werden. Genauere Anweisungen zur Erhaltung der einzelnen bekannten Formeln sind in Tabellenform im Text gegeben.

Formeln die zwei Querschnitte enthalten werden schneller und leichter aus Formel (11) erhalten, die sich aus der allgemeinen Formel (10) ergibt, wenn daraus der dritte Querschnitt eliminiert wird, indem man $p \rightarrow 0$ nimmt.

Als Beispiel, wie man aus der allgemeinen Formel (10) neue Formeln zur näherungsweisen Bestimmung von Stamm-und Stammabschnittinhalten erhalten kann, wurden die Formeln (12), (13), (14) und (15) abgeleitet.

Zum Schlusse kommt der Autor zu folgenden Schlüssen:

1) Alle Grundformeln für näherungsweise Bestimmung des Inhaltes ganzer Stämme oder deren Teile (die Formeln Hubers. Smalians, Hossfelds, Rieckes usw.) sind in der allgemeine Formel (10) enthalten, aus welcher jede der genannten Formel sich als Spezialfall ergibt.

2) Wenn man den Grössen $m$, $n$ und $p$ der allgemeinen Formel (10) verschiedene Werte gibt, so kommt man zu einer ganzen Reihe neuer Formeln für näherungsweise Bestimmung des Inhaltes ganzer Stämme und deren Teile.

Es bestehen folglich weite Möglichkeiten für die Aufstellung neuer Formeln, wobei es nur nötig ist, mit Rücksicht auf charakteristische Eigenschaften wie Holzart, Wachstumsbedingungen, Stammteil usw. solche Werte für $m$, $n$ und $p$ zu finden, mit denen die so erhaltene Formel bessere Resultate gibt als es die derzeit bekannten sind.