ОДРЕЂИВАЊЕ ПАРАМЕТАРА ГЛАВНЕ LEVAKOVIĆ-еве ФУНКЦИЈЕ РАСТЕЊА НЕ ПОСТАВЉАЈУЋИ УСЛОВ ДА ОРДИНАТЕ ОДАБРАНИХ КООРДИНАТНИХ ПАРОВА ЗАДОВОЉАВАЈУ НЕКИ КОНСТАНТНИ ОДНОС

МИЛОРАД РАДОЊИЋ

1. УВОД

У *„Spomenici o 150-godišnjici drž. gimnazije u Vinkovcima"*, објавио је *Levaković*[3] као претходно саопштење, без извођења, своју главну функцију растења:

$$y = a\left(\frac{x^d}{b + x^d}\right)^c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

под насловом: *"Jedna nova jednadžba rastenja"*.

Пет година касније, у *„Glasniku za šumske pokuse"*, књига 4, бави се опширније том својом функцијом и даје њено извођење[3], индиректно преко функције приraшћивања. После тога, 1938 године, у истоименом *„Glasniku"*, књига 6, објављује поново њено директно извођење[6], доводећи у везу просечан ток растења, који треба да преставља функција растења, са *„dinamičkim zbivanjem"* (стр. 375) које је он сматрао да се одиграва при растењу дрвећа.

Peschel[10], у *Thar. forstl. Jahrb.* 1938, стр. 203, дајући прилично детаљан преглед и анализу функција растења важних у шумарству*, каже за ову *Levaković*-еву функцију да је најопштија функција која се по спољa уочљивим особинама може формирати, да се свакој кривој растења може најбоље приљубити, али да је без практичног значаја пошто израчунавање њених параметара води ка великим тешкоћама.

На те тешкоће указује и сам *Levaković* на више места у својим радовима и покушава да их умањи на разне начине. Тако, например, у *„Glasniku za šumske pokuse"*, књига 6, стр. 321, пише[5]: *„Na žalost je računanje parametara za prednju funkciju vrlo dugotrajno i tegobno, pa sam stoga, a u cilju skraćenja posla, uzeo u izgled*

---

* Слично овоме, преглед и анализу функција растења дао је Михајлов[9].

stavljanje odnosa c = 1, *čime se ta funkcija vrlo znatno ujednostavnjuje i poprima oblik*:

$$y = a \; \frac{x^d}{b+x^d} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{3}$$

У истом циљу је *„uzeo u izgled"*, стављајући d = 1, функцију:

$$y = a \left(\frac{x}{b+x}\right)^c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{2}$$

Међутим, познато је да изостављањем појединих параметара или њиховим изједначивањем са јединицом, функција, углавном, губи од својих битних особина, а нарочито губи од способности за прилагођавање уз какав дати низ емпиричких података.

Да би ипак решио тај проблем, *Levaković*[7] у раду *„Metode ubrzanog izračunavanja parametara za neke novije funkcije rastenja"*, поред осталог, приказује и методу за убрзано израчунавање параметара функције (1). По тој методи координате тачака узетих са емпиричке криве, ради формирања једначина за одређивање приближних вредности параметара, морају стајати у неком нарочитом, константом, односу. Међутим, потреба да координате изабраних тачака задовољавају онај константан однос и чини велику ману ове убрзане методе, пошто се смеју узимати са криве само оне тачке чије ординате испуњавају нарочити услов, услед чега се ограничава слобода при избору тачака.

Као последица могућности употребе само везаних тачака овим условом, добијају се за параметре вредности које се знатно разликују од највероватнијих вредности тих параметара, а криве, које се добију на основу тих вредности, су далеко од тога да се подударају са емпиричком кривом. Отуд *Levaković*[7], подвлачи у истом раду, да су параметри добијени на тај начин подесни само *„kao podloga za daljne njihovo izračunavanje po metodi najmanjih kvadrata"*.

Од добијених вредности параметара, као почетних, зависи број потребног понављања рачунања при изравњавању тих вредности по методи најмањих квадрата. Како ове почетне вредности параметара зависе од избора тачака са емпиричке криве, то онда излази да је важно, да се има пуна слобода при избору тачака са емпиричке криве, па било да се задовољавамо само са приближним вредностима параметара израчунатих на елементарни начин, било да се те вредности израчунавају по методи најмањих квадрата.

У овом раду показаћемо како се одређују приближне вредности параметара *Levaković*-еве функције (1), а да се притом не мора водити рачуна о неком, споља наметнутом, теориском услову, који морају да испуњавају координате изабраних тачака са емпиричке криве. Ослобођени тог услова, у стању смо да бирамо тачке које су карактеристичне за ток растења, водећи уједно рачуна и о распореду тих тачака по појединим деловима емпиричке криве.

2. ОДРЕЂИВАЊЕ ПРИБЛИЖНИХ ВРЕДНОСТИ ПАРАМЕТАРА

С обзиром да *Levaković*-ева функција (1) има четири параметра (a, b, c, d) потребно је за одређивање њихових приближних вредности изабрати са емпиричке криве 4 карактеристичне тачке, па координате тих тачака (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) и (x_4, y_4) редом уврстити уместо текућих координата (x, y) у једначини (1). Тако се добијају следеће четири једначине:

$$\left.\begin{aligned} y_4 &= a\left(\frac{x_4{}^d}{b + x_4{}^d}\right)^c \\ y_3 &= a\left(\frac{x_3{}^d}{b + x_3{}^d}\right)^c \\ y_2 &= a\left(\frac{x_2{}^d}{b + x_2{}^d}\right)^c \\ y_1 &= a\left(\frac{x_1{}^d}{b + x_1{}^d}\right)^c \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

чијим се решењем долази до непознатих параметара a, b, c и d.

Кад се из система једначина (4) елиминише параметар a добија се систем једначина са три непознате:

$$\left.\begin{aligned} \frac{y_4}{y_1} &= \left(\frac{x_4{}^d}{b + x_4{}^d} \cdot \frac{b + x_1{}^d}{x_1{}^d}\right)^c \\ \frac{y_3}{y_1} &= \left(\frac{x_3{}^d}{b + x_3{}^d} \cdot \frac{b + x_1{}^d}{x_1{}^d}\right)^c \\ \frac{y_2}{y_1} &= \left(\frac{x_2{}^d}{b + x_2{}^d} \cdot \frac{b + x_1{}^d}{x_1{}^d}\right)^c \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

који, кад се логаритмује, прелази у:

$$\left.\begin{aligned} c \log \frac{x_4^{\mathbf{d}} (b + x_1^{\mathbf{d}})}{x_1^{\mathbf{d}} (b + x_4^{\mathbf{d}})} &= \log y_4 - \log y_1 \\ c \log \frac{x_3^{\mathbf{d}} (b + x_1^{\mathbf{d}})}{x_1^{\mathbf{d}} (b + x_3^{\mathbf{d}})} &= \log y_3 - \log y_1 \\ c \log \frac{x_2^{\mathbf{d}} (b + x_1^{\mathbf{d}})}{x_1^{d} (b + x_2^{\mathbf{d}})} &= \log y_2 - \log y_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Из система једначина (6), елиминацијом параметра *c*, долази се до једначина:

$$\frac{\log \dfrac{x_4^{\mathbf{d}} (b + x_1^{\mathbf{d}})}{x_1^{\mathbf{d}} (b + x_4^{\mathbf{d}})}}{\log \dfrac{x_2^{d} (b + x_1^{\mathbf{d}})}{x_1^{\mathbf{d}} (b + x_2^{\mathbf{d}})}} = \frac{\log y_4 - \log y_1}{\log y_2 - \log y_1}$$

$$\frac{\log \dfrac{x_3^{\mathbf{d}} (b + x_1^{\mathbf{d}})}{x_1^{\mathbf{d}} (b + x_3^{\mathbf{d}})}}{\log \dfrac{x_2^{\mathbf{d}} (b + x_1^{d})}{x_1^{\mathbf{d}} (b + x_2^{\mathbf{d}})}} = \frac{\log y_3 - \log y_1}{\log y_2 - \log y_1}$$

из којих се коначно, по ослобођењу од разломака и свођењем, добијају једначине:

$$\left.\begin{aligned} \log (b + x_4^{\mathbf{d}}) + (\alpha_1 - 1) \log (b + x_1^{\mathbf{d}}) &= \alpha_1 \log (b + x_2^{\mathbf{d}}) + d \cdot k_1 \\ \log (b + x_3^{\mathbf{d}}) + (\alpha_2 - 1) \log (b + x_1^{\mathbf{d}}) &= \alpha_2 \log (b + x_2^{\mathbf{d}}) + d \cdot k_2 \end{aligned}\right\} \; (7)$$

у којима је, ради упрошћавања, пошто ти изрази претстављају константне износе за један дати низ података, стављено да је:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\log y_4 - \log y_1}{\log y_2 - \log y_1} = \alpha_1 \\ &\frac{\log y_3 - \log y_1}{\log y_2 - \log y_1} = \alpha_2 \\ &\log x_4 + (\alpha_1 - 1) \log x_1 - \alpha_1 \log x_2 = k_1 \\ &\log x_3 + (\alpha_2 - 1) \log x_1 - \alpha_2 \log x_2 = k_2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (8)$$

Добијени систем једначина (7) састоји се из две једначине са два непозната параметра *d* и *b* и не може се даље сводити на нижи систем.

Приближним вредностима параметара d и b ћемо се постепено приближавати једновременим радом са обадвема једначинама, те ћемо тако у исти мах добити обадве непознате.

Параметру d дајемо неку унапред усвојену вредност, напр. d_1. Кад у првој једначини ставимо $d = d_1$, добиће се једначина са једном непознатом b. Вредност ове непознате нека је b_1. Сменимо ли у другој једначини d са d_1, b са b_1, лева страна те једначине неће бити једнака десној, већ ће се појавити нека разлика коју ћемо означити са Δ_1. Даље се овај посао понавља на исти начин. Правој вредности параметра d приближавамо се дајући јој неку другу вредност, напр. d_2, исту замењујемо у првој једначини и добијамо параметар b_2. Кад се у другој једначини стави да је $d = d_2$ и $b = b_2$, добиће се разлика између вредности израза са леве и десне стране једначине Δ_2. Овај посао се продужава све дотле, док се не добију решења једначина (7) по непознатим параметрима d и b. Да би се избегла непотребна лутања при усвајању величина b_1, b_2, . . . и d_1, d_2, . . . и да би се убрзало приближавање траженим вредностима d и b, могу се користити следеће напомене:

1) Ако је знак разлике Δ позитиван, треба повећавати вредност параметра d.

2) Ако је знак разлике Δ негативан, треба смањивати вредност параметра d.

3) Ако су вредности двеју разлика $\Delta_к$ и Δ_j супротно означене, онда вредност за d лежи између одговарајућих вредности $d_к$ и d_j.

4) Ако се при настављању овога рада разлика Δ смањује по апсолутној вредности, онда је то знак да се правилно приближавамо траженој вредности параметра d; кад разлика Δ постане нула, одговарајућа вредност за d је тражено решење једначина (7), са тачношћу која зависи од броја децимала логаритамских таблица са којима се служимо.

5) Кад су већ нађене, на почетку рада, неке од приближних вредности за d, посао око тражења следећих вредности може се знатно убрзати узимајући да су приближно пропорционалне разлике вредности за d са разликама одговарајућих вредност за Δ. Ако се нека од следећих непознатих вредности за d означи са d_x, па се из напред поменутих разлика склопи пропорција, њеним решењем налази се приближна вредност следеће непознате d_x.

6) Све напред наведене напомене од 1—5, треба користити и при тражењу вредности пораметра b из прве од једначина (7).

Кад су нађене приближне вредности параметара d и b, онда се налази из једне од једначина (6) приближна вредност параметра c. Тако, напр. из треће од тих једначина, добија се:

$$c = \frac{log\ y_2 - log\ y_1}{d\ (log\ x_2 - log\ x_1) + log\ (b + x_1^d) - log\ (b + x_2^d)} \quad . \quad . \quad (9)$$

Најзад, из једне од једначина (4) налази се приближна вредност параметра a. Тако, напр. из четврте једначине система (4), имамо:

$$a = y_1 \left(\frac{b + x_1^d}{x_1^d} \right)^c$$

или

$$\log a = \log y_1 + c \left[\log \left(b + x_1^d \right) - d \log x_1 \right] \quad . \quad . \quad (10)$$

При оваквом начину рачунања параметара, као што је у уводу већ наглашено, не мора се водити рачуна о томе, да ли координате тачака узетих са емпиричке криве, задовољавају неки теориски наметнути услов или не. Предност ове методе састоји се у томе што нам пружа могућност за што повољнији избор тачака. Узевши у обзир ову околност добиће се вредности приближних параметара које ће се мало рвзликовати од њихових највероватнијих вредности. Исто тако није потребно за израчунавање највероватнијих вредности параметара по овој методи утрошити много времена и вршити дуге рачунске операције, јер се избегава вишеструко понављање изравњавања с обзиром да су приближни параметри блиски највероватнијим.

Показаћемо напред приказану методу одређивања параметара на конкретном примеру.

Ради лакшег упоређивања добијених резултата, послужићемо се истим подацима као и *Levaković*[3] (стр. 248). Ови подаци се односе на средње састојинске висине из *Guttenberg*-ових[1] таблица прихода за Тиролску смрчу I бонитета. Ти су подаци приказани у приложеној табели 1.

Табела 1 — Tabelle 1

x_i	h_i	y_i	H_i	y_i'	H_i'
10	14	14·61	—0·61	15·10	-1·10
20	53	52·43	+0·57	52·87	+0·13
30	100	99·84	+0·16	100·00	0·00
40	147	147·34	—0·34	147·33	—0·33
50	190	190·52	– 0·52	190·47	—0·47
60	228	228·01	—0·01	228·00	0·00
70	260	259·90	+0·10	259·94	+0·06
80	287	286·80	+0·20	286·88	+0·12
90	310	309·48	+0·52	309·58	+0·42
100	329	328·66	+0·34	328·75	+0·25
110	345	344·95	+0·05	345·00	0·00
120	358	358·86	—0·86	358·86	– 0·86
130	370	370·82	—0·82	370·74	—0·74
140	381	381·15	0·15	381·00	0·00
150	391	390·14	+0·86	389·90	+1·10
Средње отступање Mittlere Abweichung			±0·58		±0·63

У првом ступцу (x_i) те табеле дате су старости састојина, а у другом (h_i), одговарајуће средње састојинске висине, чији су износи изравнати графички и окуларно од стране аутора таблица.

За овај пример *Levaković* је израчунао параметре* по методи најмањих квадрата и понављајући изравњавање пет пута, добио је следеће износе:

$$\left.\begin{aligned} a &= 487{,}701\,0464 \\ b &= 473{,}327\,3355 \\ c &= 1{,}338\,8108\,08 \\ d &= 1{,}569\,9838\,31 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

На основу тих параметара израчунао је из функције (1) теориске износе висина (y_i, 3. стубац табеле 1) и најзад нашао разлику између мерених и срачунатих висина (H_i, 4. стубац табеле 1).

Да бисмо срачунали приближне вредности истих параметара, ми смо пошли од координатних парова:

$x_1 = 30$, $x_2 = 60$, $x_3 = 110$, $x_4 = 140$,
$y_1 = 100$, $y_2 = 228$, $y_3 = 345$, $y_4 = 381$,

а затим према обрасцима (8) нашли смо да је:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1{,}622\,9911 \\ \alpha_2 &= 1{,}502\,5616 \\ k_1 &= 0{,}180\,4377 \\ k_2 &= 0{,}111\,9553 \end{aligned}$$

услед чега једначине (7) добијају облик:

$$\left.\begin{aligned} &\log(b + 140^d) + 0{,}622\,9911 \log(b + 30^d) = \\ &= 1{,}622\,9911 \log(b + 60^d) + d \cdot 0{,}180\,4377 \\ &\log(b + 110^d) + 0{,}502\,5616 \log(b + 30^d) = \\ &= 1{,}502\,5616 \log(b + 60^d) + d \cdot 0{,}111\,9553 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Из ових једначина треба одредити параметре d и b.

Кад смо параметру d дали вредност најмањег броја из скупа природних бројева, тј. кад смо узели да је $d_1 = 1$, и ставили ову вредност место d у првој једначини, нашли смо да је $b_1 = 7{,}5632$. На основу ових овако добијених вредности за параметре d_1 и b_1 добили смо из друге једначине да је $\Delta_1 = + 0{,}000\,4790$. Затим смо (према напомени 1 на страни 230) узели да је вредност $d_2 = 2$, и заменили је у првој једначини и из ње

---

*Levaković је употребљавао у првом делу рачунања логаритамске таблице са 7, а затим са 10 децимала. Ми смо овде употребљавали искључиво логариамске таб [illegible] децимала.

добили да је $b_2 = 4656{,}798$. Заменом у другој једначини параметара d и b са $d_2 = 2$, $b_2 = 4656{,}798$ добили смо разлику $\Delta_2 = - 0{,}002\,9654$. Према знацима вредности добијених за Δ_1 и Δ_2 (напомена 3 на страни 230) вредност за d налази се између $d_1 = 1$ и $d_2 = 2$. Испитујући даље интервал између 1 и 2, нашли смо:

за $d_3 = 1{,}6$ да је $b_3 = 562{,}5363$, а $\Delta_3 = + 0{,}000\,0377$
за $d_4 = 1{,}7$ да је $b_4 = 972{,}248$, а $\Delta_4 = - 0{,}000\,5130$.

Знаци добијених вредности за Δ_3 и Δ_4 показују, да се тражена вредност за d налази у интервалу од 1,6 до 1,7 који би сад требало даље, на исти начин, испитивати.

Изналажење следећих ближих вредности за d може се убрзати, користећи напомену 5 на страни 230. Притом се могу претходно нађени резултати за параметре и потребне разлике претставити у табеларном облику:

d	Δ
1,6	+ 0,000 0377
1,7	— 0,000 5130
Разлика: — 0,1	+ 0,000 5507

d	Δ
1,7	— 0,000 5130
d_x	0,000 0000
Разлика: 1,7—d_x	— 0,000 5130

Из ових табеларних прегледа, узимајући да су разлике приближно пропорционалне, може се поставити пропорција:

$$\frac{- 0{,}1}{+ 0{,}000\ 5507} \approx \frac{1{,}7 - d_x}{- 0{,}000\ 5130}$$

из које је $d_x \approx 1{,}6068\ldots$

Како последњи децимали нису сигурни, то се изврши заокружавање на три децимала и добија се $d_5 = 1{,}607\ldots$ Заменом ове последње вредности за d у првој једначини, добија се $b_5 = 584{,}826$. Заменом овако добијених вредности за d и b у другој једначини добиће се $\Delta_5 = + 0{,}000\ 0038$.

Ради употпуњавања даљних децимала параметра d, потребно је наставити даље исти поступак. Притом се оба горња табеларна прегледа могу слити у један и продужити даљи рад по следећем скраћеном табеларном прегледу:

d	Δ
1,7	— 0,000 5130
1,607	+ 0,000 0038
Разлика: 0,093	— 0,000 5168

Кад из овако скраћеног табеларног прегледа узмемо потребне разлике и образујемо пропорцију:

$$\frac{0{,}093}{-\,0{,}000\ 5168} \approx \frac{1{,}607\ -\ d_x}{+\ 0{,}000\ 0038}$$

добиће се $d_x \approx 1{,}60768\ldots$ По заокруживању на четири децимала биће $d_6 = 1{,}6077\ldots$

Кад поновимо ову операцију још једанпут биће $d_7 = 1{,}60773\ldots$ Заменом ове последње вредности за d у првој једначини и решењем исте по b, добија се $b_7 = 587{,}196$. Када вредности d_7 и b_7 заменимо у другој једначини, налазимо да је $\Delta_7 = 0{,}000\ 0000$, што значи да нађене вредности $d_7 = 1{,}60773$ и $b_7 = 587{,}196$ претстављају решења система једначина (12) са највећом тачношћу, која се може постићи логаритамским таблицама са 7 децимала.

Додајмо још и то, да се сви напред наведени табеларни прегледи могу заменити једним јединим, следећег облика:

d	Δ	b
1,6	+0,000 0377	562,5363
1,7	−0,000 5130	972,247
1,607	+0,000 0038	584,826
1,6077	+0,000 0002	587,101
1,60773	0,000 0000	587,196

из кога се директно могу узимати потребне разлике, ради постављања предњих пропорција. У трећем ступцу последњег табеларног прегледа, сложили смо и вредности параметра b по оном реду, по коме се до њих долазило. Тај трећи стубац може да се употреби и за истовремено налажење вредности за параметар b, према напомени 6 на страни 230.

Најзад, на основу последњих вредности параметара

$$d = 1{,}60773$$
$$b = 587{,}196$$

из образаца (9) и (10) налазимо да је

$$c = 1{,}265\ 317$$
$$a = 483{,}9897.$$

Ове приближне вредности параметара a, b, c и d унели смо у функцију (1) и срачунали теориске износе висина (y_i', пети стубац табеле 1). Из мерених и срачунатих висина образовали смо разлике (H_i') и сложили их у шестом ступци исте табеле.

На крају смо срачунали средња (квадратна) отступања наших и *Levaković*-евих резултата (последњи хоризонтални ред табеле 1) по познатом обрасцу:

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{[LL]}{n - u}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{13}$$

где је *[LL]* сума квадрата отступања, *n* бој једначина отступања и *u* број параметара.

Исти пример израђен је и логаритамским таблицама са 10 децимала и добијене су следеће приближне вредности параметара:

$a = 483{,}989\ 7119$
$b = 587{,}218\ 09$
$c = 1{,}265\ 3065\ 25$
$d = 1{,}607\ 7365.$

Међутим, кад смо на основу ових последњих вредности параметара извршили сва потребна рачунања, добили смо практички исте резултате као кад смо се служили логаритамским таблицама са 7 децимала.

Да бисмо проверили и допунили истраживање, узели смо још један пример. Притоме смо узели исте податке које је узео *Levaković*[3] (стр. 249) за свој други пример. То су подаци о износима средњих састојинских висина из *Guttenberg*-ових таблица прихода[1] за Тиролску смрчу V бонитета. Исти су сложени у првом и другом ступцу табеле 2.

Табела 2 — Tabelle 2

x_i	h_i	y_i	H_i	y_i'	H_i'
—	—	—	—	—	—
20	13	13·18	−0·18	13·00	0·00
30	28	27·75	+0·25	27·64	+0·36
40	44	44·16	−0·16	44·13	−0·13
50	61	60·84	+0·16	60·86	+0·14
60	77	76·95	+0·05	77·00	0·00
70	92	92·11	−0·11	92·17	−0·17
80	106	106·17	−0·17	106·22	−0·22
90	119	119·11	−0·11	119·15	−0·15
100	131	130·98	+0·02	131·00	0·00
110	142	141·84	+0·16	141·85	+0·15
120	152	151·79	+0·21	151·80	+0·20
130	161	160·91	+0·09	160·91	+0·09
140	169	169·28	−0·28	169·29	−0·29
150	177	176·97	+0·03	177·00	0·00
Средње отступање Mittlere Abweichung			±0·19		±0·20

Код *Levaković*-а су вредности параметара одређене по методи најмањих квадрата, и пошто је изравњавање поновљено више пута, нађени су за њих износи:

$$\left.\begin{aligned} a &= 334{,}241\ 3228 \\ b &= 90{,}378\ 34314 \\ c &= 2{,}295\ 009752 \\ d &= 1{,}126\ 763\ 791 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (14)$$

На основу ових параметара израчунате су из функције (1) теориске висине (y^{i}, трећи стубац табеле 2) и разлике између мерених и теориских висина (H_i, четврти стубац исте табеле).

При одређивању приближних вредности параметара, за овај пример, пошли смо од координатних парова:

$$\begin{aligned} x_1 &= 20, & y_1 &= 13 \\ x_2 &= 60, & y_2 &= 77 \\ x_3 &= 100, & y_3 &= 131 \\ x_4 &= 150, & y_4 &= 177 \end{aligned}$$

Примењујући и овде исти поступак као код првог примера, добили смо за параметре следеће вредности:

$$\begin{aligned} a &= 338{,}98425 \\ b &= 73{,}24578 \\ c &= 2{,}471848 \\ d &= 1{,}096770 \end{aligned}$$

Тако добијене приближне вредности параметара унете су у функцију (1) и израчунати теориски износи висина ($y^{i\prime}$, пети стубац табеле 2). Из мерених и срачунатих висина образоване су разлике (H_i') и сложене у шестом ступцу исте табеле.

Најзад смо срачунали средња (квадратна) отступања по обрасцу (13), како за наше тако и за *Levaković*-еве резултате, па исте сложили у табели 2 (последњи хоризонтални ред).

Из последњих стубаца табеле 1 и 2 (стубци H_i') види се да смо ми, иако смо употребили само приближне вредности параметара, добили резултате блиске резултатима које је добио *Levaković* изравњавањем по методи најмањих квадрата и то понављајући то изравњавање више пута.

Сасвим је разумљиво да поступак одређивања параметара, који је приказан у овом раду, није ограничен само на *Levaković*-еву функцију (1), већ се може применити и на многе друге функције.

Други део овде изложеног поступка за одређивање приближних вредности параметара може се применити и на функцију (2). Кад се у ту функцију место текућих координата (x, y) уврсте редом координате трију произвољно изабраних тачака са емпиричке криве, па се из тако добијеног система једначина елиминишу параметри a и c добија се једна једначина у којој се још налази само параметар b као непозната величина. Тражење вредности овога параметра b се може знатно убрзати применом става о приближно пропорционалним разликама (напомена 6 на страни 230). Међутим, када се аналогно поступи са функцијом (3), при тражењу вредности њеног параметра d, приметиће се да се не може користити горња олакшица. Отуд у овом погледу функција (2) има предност над функцијом (3).

Од интереса је навести, да се *Levaković*-евој функцији (2), сасвим погрешно, приписују извесне негативне особине. Тако Михајлов[8], у *„Glasniku za šumske pokuse“*, књига 7_1, у првој тачки закључка своје докторске дисертације (стр. 97), пише:

„Funkcija 3 bolja je u svakom pogledu od funkcije 2. Kod nje je izračunavanje parametara po metodi najmanjih kvadrata moguće i onda, kad to kod funkcije **2** nije moguće. Kod vrlo strmih i nepravilnih krivulja rastenja znadu parametri b i c funkcije 2 pri izračunavanju po metodi najmanjih kvadrata dobiti još u toku računanja negativne vrednosti i onda se s njima ne da dalje ništa više da postigne. Oni su za daljnji rad neupotrebivi. Naprotiv kod funkcije 3 ne može takova šta da se desi. Stoga funkciji 3 treba u svakom pogledu dati prednost pred funkcijom 2“.

Исто тако, у Годишњем зборнику Земјоделско-шумарског факултета у Скопју (књига I, стр. 13 и 14) Михајлов[9] наводи даље:

„Осем тоа, функцијата (16[*]) пројавува извесни аномалии при пресметнувањето на нејзините константи по методот на најмалите квадрати. Константата й c е многу осетлива спрема формата на кривата на растението и во извесни случаи може дури да добие негативни вредности. Во такви случаи нејзините графики не излегуваат од координатниот почеток и пресметнувањето на константите по методот на најмалите квадрати станува неможно“.

Ми ћемо показати да ниједан од параметара функције (2) не може имати негативну вредност, кад се та функција примени на реалне податке растења.

а) Ако би било $b < o$, онда функција (2) има прекид на месту $x = -b$ (где је $-b > o$) и била би опадајућа функција у интервалу $(-b, +\infty)$, што је без смисла код низова растења. Како не може бити ни $b = o$, то остаје једино да је $b > o$.

б) Ако је $c < o$, тада функција (2) има прекид у тачки $x = o$, и опада у интервалу $(o, +\infty)$, тј. опада у области података растења, а ово очигледно претставља бесмисленост. Крива функције (2), за $c < o$, долази са леве стране са ординатом $y = +\infty$, у целом интервалу података растења је конвексна према апсцисној осовини са ординатама које опадају у супротном смислу растења ордината тачака емпиричке криве растења. Од познатих услова које треба да задовољава функција растења, она задовољава само један: кад $x \rightarrow +\infty$, $y' \rightarrow o$, $y \rightarrow a$.

Кад се функција (2) реши по параметру c, добија се

$$c = \frac{\log a - \log y}{\log (b+x) - \log x}$$

Како, кад се функција (2) примени на податке растења, мора бити $\log (b+x) - \log x > o$ (јер је $b \geq o$), то ће параметар c имати знак бројитеља $\log a - \log y$. Пошто вредност функције y, за коначне вредности x, не може никад достићи своју асимптотску вредност a, то мора бити $\log a - \log y > o$. Према томе параметар c не може имати негативну вредност.

в) Нека је истовремено $b < o$ и $c < o$. Тада би функција (2) имала прекид на месту $x = o$, док би на месту $x = -b$ $(-b \geq o)$ имала вредност нулу, што опет претставља немогућност ако се функција примењује на податке растења. Од познатих услова које треба да задовољава функција растења био би задовољен само услов: кад $x \rightarrow +\infty$, $y' \rightarrow o$, $y \rightarrow a$.

Када се функција (2) примени на конкретне низове растења, при израчунавању њених параметара по елементарној методи, добијају се позитивне вредности за параметре a, b и c. Такве вредности имају и сви параметри приказани у табели 10 (стр. 86) поменуте дисертације. Израчунавањем параметара

---

[*] Ознака (16) односи се на функцију (2).

помоћу методе најмањих квадрата постиже се, узимањем координата више тачака са емпиричке криве, да се добије најповољнији састав вредности параметара *a*, *b* и *c* да би се омогућило што боље приближавање између теориске криве функције (2) и емпиричке криве растења. Отуд нема разлога да неки од тих параметара добију негативне вредности, услед чега би одговарајућа теориска крива не само се удаљавала него би добила ненормалан ток у односу на емпиричку криву растења.

Ми смо израчунали параметре функције (2) по методи најмањих квадрата за случајеве за које се у пом. дисертацији тврди да је то израчунавање *„nemoguće“*, пошто *„parametri b* и *c postaju negativnima“*. За те случајеве одговарајуће место за вредности параметара *a*, *b* и *c*, у табели 10 (стр. 86) поменуте дисертације, стоји непопуњено. Понављајући рачунање два пута, узимајући у обзир број стабала из којих су добијене аритметичке средине висина, добили смо резултате приказане у табели 3.

Табела 3

Врсте дрвећа	Параметри функције (2) израчунати по елементарној методи		Параметри функције (2) израчунати по методи најмањих квадрата			
			Прво рачунање		Друго рачунање	
	Употребљени координатни парови	Приближне вредности параметара	Поправке	Параметри после првог рачунања	Поправке	Параметри после другог рачунања
Тиролска смрча (II бонитет)	20;47 50;167 90;261	$a_o = 485,3981$ $b_o = 11,8212$ $c_o = 5,0276$	$\alpha = +4,3395$ $\beta = +0,6780$ $\gamma = -0,2287$	$a = 489,7376$ $b = 12,4992$ $c = 4,7989$	$\alpha = +0,0212$ $\beta = +0,0149$ $\gamma = +0,0073$	$a = 489,7588$ $b = 12,5141$ $c = 4,8062$
Храст (III бонитет)	20;40 40;85 150;201	$a_o = 316,0160$ $b_o = 42,4903$ $c_o = 1,8142$	$\alpha = -15,1448$ $\beta = -8,9131$ $\gamma = +0,1870$	$a = 300,8712$ $b = 33,5772$ $c = 2,0012$	$\alpha = +1,6860$ $\beta = +1,3636$ $\gamma = -0,0004$	$a = 302,5572$ $b = 34,9408$ $c = 2,0008$

При овоме рачунању нисмо наишли ни на какве „аномалии“ иако смо се служили логаритамским таблицама са 7 децимала.

У погледу подесности израчунавања параметара, функција (2) има предност над функцијом (3).

Ако се приближне вредности параметара рачунају по „скраћеној методи“ применом *Levaković*-евих формула, приказаних на стр. 80 и 81 дисертације, пада одмах у очи да је подеснији рад са формулама за функцију (2). А ако се ова „скраћена метода“ напусти, ради недостатака изложених на стр. 227 овога рада, и употреби метода постепеног приближавања, у том случају се при одређивању приближне вредности параметра *b* функције (2) могу користити олакшице описане напред на стр. 237.

При рачунању највероватнијих вредности параметара помоћу методе најмањих квадрата, изналажење потребних коефицијената *Ai*, *Bi*, *Ci* и *Hi* је подесније код функције (2), наравно, ако се не употребљавају формуле (41) приказане на стр. 83 поменуте дисертације, него оне једноставније, које је објавио *Levaković* 1938 год. у *„Glasniku za šumske pokuse“*, књига 6, стр. 321.

Од једне функције растења тражи се, у првом реду, да даје што бољу претставу растења, тј. да се што боље прилагођава подацима опажања неке везе елемената растења. Колико ће се у овоме успети зависи од природе функције и од природе података. Једна се функција боље прилагођава подацима једне врсте, друга подацима друге врсте, а ни за једну се не може тврдити да за све податке даје најбољу претставу растења. Степен подударања са конкретним низовима растења мења се не само за разне корелационе везе, већ и за разне врсте дрвећа и за разне бонитете исте везе и исте врсте дрвећа. Отуд је разумљиво да се ниједној функцији растења не може дати предност у сваком погледу над неком другом функцијом пре него што се оне детаљно не испитају на што већем броју разних података растења, разних врста веза растења, разних врста дрвећа и разних бонитета. Тако, например, тврђење у поменутој дисертацији *„Funkcija 3 bolja je u svakom pogledu od funkcije 2“* јесте нетачно, јер има података растења које функцији (2) много тачније претставља него функција (3), као што има обрнутих случајева. О овоме се можемо уверити из података који се налазе у самој поменутој дисертацији.

Тако, например, у табелама 10 и 11 (стр. 86 и 87), поред осталог, приказане су приближне вредности параметара функција (2) и (3) које су добијене применом тих функција на податке растења Тиролске смрче свих пет бонитета (табела 2 поменуте дисертације). На основу тих приказаних приближних параметара срачунали смо из функција (2) и (3) теориске висине, одузели их од мерених висина, па из добијених отступања срачунали помоћу обрасца (13) средња отступања (табела 4).

Табела 4

Бонитет	Средња отступања функција	
	(2)	(3)
I	± 3,54	± 2,32
II	± 2,84	± 2,23
III	± 3,83	± 13,42
IV	± 1,57	± 3,20
V	± 2,06	± 2,45

На основу средњих отступања табеле 4 може се закључити, да кад су у питању овде употребљени подаци, функција (2) даје бољу претставу растења података лошијег бонитета него функција (3), док је за податке бољег бонитета обрнут случај.

Пошто су резултати, добијени само на основу приближних вредности параметара, зависни од избора координатних парова са емпиричке криве, као почетне основе при рачунању, то смо закључке донете само на осову табеле 4 морали проверити. У том циљу смо искористили већ израчунате највероватније вредности параметара које је *Levaković* дао за своју функцију (1) применивши је на податке из *Guttenberg*-ових таблица прихода за Тиролску смрчу I и V бонитета. То су вредности параметара a, b, c и d које смо ми напред приказали под бројем (11) и (14). Ради лакшег извођења потребних закључака ми те вредности параметара овде поново износимо, у облику табеларног прегледа.

Бонитет	Највероватније вредности параметара функције (1)			
	a	b	c	d
I	487,701 0464	473,327 3355	1,338 8108 08	1,569 9838 31
V	334,241 3228	90,378 34314	2,295 0097 52	1,126 7637 91

На основу познате чињенице, да се *Levaković*-ева функција (1) изванредно добро прилагођава поменутим *Guttenberg*-овим подацима, могу се из горњег табеларног прегледа извући следећи закључци:

а) За податке V бонитета вредност параметра *d* *Levaković*-еве функције (1) ближа је јединици него вредност параметра *c*. То значи да се функција (2) боље прилагођава поменутим подацима V бонитета него функција (3).

б) За податке I бонитета вредност параметра *c* *Levaković*-еве функције (1) ближа је јединици него вредност параметра *d*. То значи па функција (3) даје бољу претставу растења поменутих података I бонитета него функција (2).

У циљу даљег проверавања, ми смо *Levaković*-еве функције (2) и (3) директно применили на горе поменуте *Guttenberg*-ове податке за Тиролску смрчу I и V бонитета (ови подаци се налазе и у 2 и 6 ступцу табеле 1 поменуте дисертације). Израчунали смо највероватније вредности параметара (ове вредности се налазе у табели 5), нашли теориске висине и одузели их од мерених висина, па из тако добијених отступања, помоћу обрасца (13), одредили смо средње отступање (последњи хоризонтални ред табеле 5).

Табела 5

Параметри	Највероватније вредности параметара функције			
	I бонитет		V бонитет	
	(2*)	(3)	(2)	(3)
a	585,422	463,3424	362,6853	259,1736
b	11,409	1914,14705	39,79307	3432,4578
c	5,4117		3,043048	
d		1,837 1906		1,774787
Средње отступање	± 2,76	± 1,27	± 0,24	± 0,82

Подаци о средњим отступањима функција (2) и (3) потврђују тачност нашег ранијег закључка, да за поменуте *Guttenberg*-ове податке функција (2) даје бољу претставу растења за V бонитет, а функција (3) даје боље резултате за I бонитет.

Из предњег излази да је тврђење изнето у првој тачки закључка поменуте докторске дисертације нетачно. У остале тачке закључка нисмо се упуштали јер немају директне везе са овим нашим радом.

ЗАКЉУЧАК

Из напред изложеног текста и табела 1, 2, 3, 4 и 5 можемо извући следеће закључке:

1) По изложеној овде методи, могу се израчунати приближне вредности параметара *Levaković*-еве функције (1), не постављајући притоме услов да ординате употребљених тачака са емпиричке криве морају стајати у неком константном односу.

Ослобођени од тога споља наметнутог теориског услова, у могућности смо да бирамо са емпиричке криве тачке карактеристичне за сам ток растења, водећи притоме рачуна о

---

* Ове параметре израчунао је Levaković (други стубац табеле 3 дисертације).

њиховом распореду по појединим деловима криве. Отуд смо и добили резултате помоћу приближних параметара, који су блиски резултатима које је добио *Levaković* изравњавањем по методи најмањих квадрата и то понављајући изравњавање више пута.

2) Из последњих стубаца табеле 1 и 2 види се да се *Levaković*-ева функција (1) изванредно добро прилагођава употребљеним *Guttenberg*-овим подацима, иако смо ми израчунали само приближне вредности параметара.

Средње грешке наших резултата су приближно исте, за оба примера, са средњим грешкама *Levaković*-евих резултата. Разлике средњих отступања наших и *Levaković*-евих резултата су у стотим деловима; у првом примеру су 0,05, у другом 0,01.

Ако ипак, поред већ овако добијених добрих резултата, треба вршити рачунање по методи најмањих квадрата, онда ће и тај посао бити много краћи ако се рачунање врши по нашој методи, јер од тачности приближних вредности параметара, као почетних, зависи колико ће се пута понављати изравњавање. Међутим, свако изравњавање је скопчано са великим утрошком времена.

Дакле, по нашем поступку одређивање приближних параметара је нешто сложеније, али се зато добија у тачности, јер су средње грешке резултата добијених из приближних параметара, одређених по нашем поступку, знатно мање него по поступку који је предложио *Levaković*, а у вези стим не постоји потреба за понављањем изравњавања које је врло заметно и дуготрајно.

3) Поступак одређивања параметара на горе изложен начин има и општи значај, јер се и код осталих сличних функција може применити.

4) Противно тврђењу изнетом у првој тачки закључка поменуте докторске дисертације *Mihajlov*-а: „Funkcija 3 bolja je u svakom pogledu od funkcije 2 . . . .", из наших налаза излази да:

а) ниједан од параметара *Levaković*-еве функције (2) не добија негативне вредности при примени на податке растења. Иста функција се може употребити за претставу растења за све случајеве података растења;

б) у погледу подесности израчунавања параметара, по елементарној методи или по методи најмањих квадрата, функција (2) има предност над функцијом (3);

в) за неке податке растења функција (2) даје бољу претставу растења него функција (3) као што има и обрнутих случајева.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Guttenberg A.* — Wachstum und Ertrag der Fichte im Hochgebirge. Wien und Leipzig 1915.

2. *Emrović B.* — Grafička primjena Levakovićevih formula. Šumarski list, broj 3—4, str. 148—156, Zagreb 1951.

3. *Levaković A.* — Analitički oblik zakona rastenja. Glasnik za šumske pokuse, knjiga 4, str. 189—253, Zagreb 1935.

4. *Levaković A.* — Analitički izraz za sastojinsku visinsku krivulju. Glasnik za šumske pokuse, knjiga 4, str. 283—301, Zagreb 1935.

5. *Leваković A.* — O izgledima i mogućnostima numeričkog bonitiranja stojbina. Glasnik za šumske pokuse, knjiga 6, str. 319 —361, Zagreb 1938.

6. *Levaković A.* — Fiziološko-dinamički osnovi funkcija rastenja. Glasnik za šumske pokuse, knjiga 6, str. 374—385, Zagreb 1938.

7. *Levaković A.* — Metode ubrzanog izračunavanja parametara za neke novije funkcije rastenja. Šumarski list, str. 299—309, Zagreb 1939.

8. *Mihajlov I.* — Numeričko bonitiranje šumskih stojbina. Glasnik za šumske pokuse, knjiga 7_1, str. 57—99, Zagreb 1940.

9. *Михајлов И.* — Математичко формулирање на законот за растењето на шумските дрва и насади. Годишен зборник на Земјоделско-шумарскиот факултет на Универзитетот—Скопје, книга I, стр. 3—70, Скопје 1949.

10. *Peschel W.* — Die mathematischen Methoden zur Herleitung der Wachstumsgezetze von Baum und Bestand und die Ergebnisse ihrer Anwendung. Tharandter forstl. Jahrbuch 1938, Heft 3/4, S. 169—247.

11. *Тодоровић Д.* — Аналитичка претстава растења. Годишен зборник на Земјоделско-шумарскиот факултет на Универзитетот — Скопје, књига VI — VII. Скопје 1955.

DIE BERECHNUNG DER PARAMETER VON LEVAKOVIĆ' HAUPTFORMEL OHNE AUSWAHL VON GÜNSTIGEN PUNKTEN

Milorad Radonjić

Die in dieser Arbeit gestellte Aufgabe hat zu zeigen wie die Annäherungswerte der Parameter in der Funktion von Levaković

$$y = a\left(\frac{x^d}{b + x^d}\right)^c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

bestimmt werden können unter Benützung von beliebigen Punkten der empirischen Kurve.

Der Autor nahm aus der empirischen Kurve 4 Punkte mit beliebigen Koordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), führte dieselben in die Funktion ein und erhielt die Gleichungen (4). Durch Elimination der Parameter a und c kam er zum Gleichungssystem (7) nachdem er vorher die Substitutionen ausführte, die durch die Ausdrücke (8) gegeben sind. Da das letzte Gleichungssystem (7) auf keinen niedrigeren Grad gebracht werden kann, so löst der Autor beide Gleichungen gleichzeitig auf, wobei er den Arbeitsvorgang bei dieser Auflösung erklärt.

Bei der Annahme, der Parameter d habe den Wert der kleinsten Zahl aus der Gruppe der natürlichen Zahlen, d.h. dass $d_1 = 1$ sei, wird dieser Wert $d_1 = 1$ in die erste Gleichung eingeführt und aus derselben der entsprechende Wert des anderen unbekanten Parameters b_1 berechnet. Hierauf werden beide Grössen, für d_1 und b_1 in die zweite Gleichung eingeführt und die Wertdifferenz der Ausdrücke der linken und rechten Seite berechnet und mit Δ_1 bezeichnet.

Hierauf nimmt man an, d habe den Wert der folgenden Zahl aus der Gruppe der natürlichen Zählen, d. h. $d_2 = 2$ und bei Wiederholung des oben angegebenen Vorganges bekommt man die Differenzgrösse Δ_2.

Entsprechend den Vorzeichen der erhaltenen Werte Δ_1 und Δ_2 orientiert sich der Autor, welche Werte er weiterhin dem Parameter d zu geben hätte um jenen Wert zu erhalten, der beide Gleichungen des Systems (7) befriedige.

Findet man schliesslich das $\Delta = o$ geworden ist, so sind die letzten Werte für d und b die gesuchte Lösung.

Die Werte der Parameter c und a wurden nach Formel (9) und (10) gefunden.

Als konkretes Beispiel für eine solche Berechnung bediente sich der Autor der Daten für mittlere Bestandeshöhen aus Guttenbergs Ertragstafeln für die Fichte I u. V Bonität in Tirol. Diese Angaben zeigt der Autor in der erste u. zweite Kolonne in der Tabelle 1 u. 2. Nach Berechnung der Parameter a, b, c, d, mit Hilfe der Funktion (1), bestimmt er die theoretischen Beträge der Höhen (fünfte Kolonne in der Tabelle 1 u. 2). Hierauf, nach Abzug der berechneten von den gemessenen Höhen, ermittelt er die Abweichung der untersuchten Funktion (sechste Kolonne in Tab. 1 und 2). Vergleichshalber werden gleichzeitig die Resultate, zu denen Levaković gekommen war, gezeigt (dritte u. vierte Kolonne der Tabellen). Zu diesen Werten war Levaković gekommen, nachdem er deren Berechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate fünfmal wiederholt hatte.

Auf Grund der erhaltenen Resultate kommt der Autor zu folgenden Schlussfolgerungen:

1) Aus den Daten der letzten Kolonnen beider Tabellen ist ersichtlich, dass sich die untersuchte Funktion ausserordentlich gut den benützten Guttenbergschen Angaben anpasst, wenngleich die verwendeten Annäherungswerte der Parameter auf elementare Art berechnet wurden.

2) Die Parameter der Funktion (1) von Levaković lassen sich berechnen ohne dass die Bedingung gestellt wird, dass die Koordinaten der benützten Punkte der empirischen Kurve in einem gewissen konstanten Verhältnisse zu stehen hätten.

3) Ohne von aussen aufgenötigte Bedingungen, denen die Punktkoordinaten entsprechen, berücksichtigen zu müssen, haben wir, im Gegenteil, die Möglichkeit, aus der empirischen Kurve jene Punkte zu wählen, die für den Wachstumsverlauf charakteristisch sind, wobei auch deren Verteilung auf die einzelnen Kurvenabschnitte berücksichtigt werden kann.

4) Aus den letzten Kolonnen der beigelegten Tabellen ist ersichtlich, dass die erhaltenen Resultate sich denen von Levaković annähern (vierte Kolonnen der Tabellen), obgleich dieser die Berechnung mehrmals nach der Methode der kleinsten Quadrate wiederholt hatte. Wäre es aber nötig die erhaltenen Resultate

noch weiter nach der Methode der kleinsten Quadrate zu verbessern, dann würde auch diese Arbeit viel kürzer sein, denn von den Annäherungswerten der Parameter als Ausgangswerten, hängt es ab, wievielmal die Berechnung wiederholt werden müsse; die Annäherungswerte der Parameter sind ihrerseits aber abhängig von der Auswahl der Punkte der empirischen Kurve.