

ЈЕДНА ФУНКЦИЈА КОЈА СЕ ДОБРО ПРИЛАГОЂАВА ПОДАЦИМА РАСТЕЊА

Доц. Милорад Радоњић

Катедра за техничке предмете

Садржај: А) Увод. В) Добијање функције (1). С) Аналитичка верификација. Д) Израчунавање параметара функције (1). Е) Израчунавање приближних вредности параметара. И) Израчунавање највероватнијих вредности параметара. Ј) Погодност функције (1) при елиминасању њених параметара. Ф) Резултати примене функције (1) на неке конкретне податке растења. Г) Закључак. Н) Литература. П) Резиме.

А) УВОД

Растење или пораст живе материје (тквива) јесте стање организама младих бића у којем процеси асимилације превлађују над процесима дезасимилације. Сам механизам растења још није научно потпуно испитан, а дефиниције растења различне су према томе са које се тачке гледишта оно посматра. Ми ћемо у овом раду под растењем подразумевати промене на неком организму, за време продужења једног дела његовог живота, при којима се повећавају износи неких од његових особина, као, на пример, висина, дужина, ширина, дебљина, маса, запремина, тежина и сл. О резултату промена услед растења у току одређеног периода времена, тј. о прирасту или брзини растења, неће бити говора у овом раду.

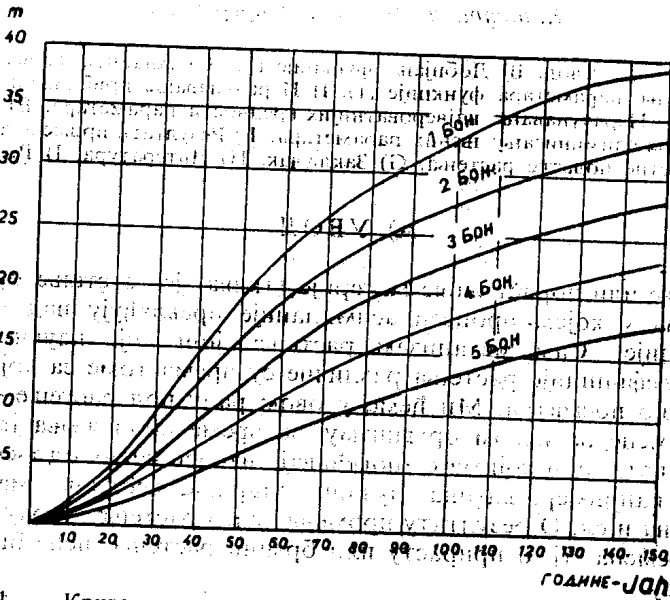
С обзиром да се свако растење врши током времена, то је величина сваког од посматраних елемената растења извесна функција времена, па се може написати да је

$$y = f(x)$$

где x означава време (старост целог организма или неког од његових органа), док y означава величину елемента растења који се посматра.

Налажење функције $f(x)$, која би давала тачну везу између величине посматраног елемента растења (y) и времена трајања растења (x), претстављало би важан допринос решењу проблема растења. Тада би таква функција показивала да је растење организама (биљака и животиња) потчињено једном општем закону. — Налажење овог закона интересовало је многе научнике већ више од једно и по столеће. Нажалост, поред свих дугогодишњих напора, прави аналитички израз горње функције није још нађен.

Пут којим треба ићи при тражењу поменуте функције $f(x)$ почиње графичка претстава растења. Кад се неки ток растења претстави графички, наношењем времена на апсисну осовину а величине одговарајућег елемента растења на ординатну осовину, добија се крива линија која се зове крива растења. Дугогодишња испитивања великог броја научних радника, почев још од Harting-a (1842), па до данас, потпомогнута многобројним анализама биљака и животиња, показала су да криве растења, како код биљака, тако и код животиња, имају свој карактеристичан облик, тзв. S-облик, назван тако по облику слова S. Само ради илустрације тога карактеристичног облика, без неких других претензија, приложене су овде слике 1 и 2, које претстављају неке криве растења нацртане према подацима основаним на искуству.



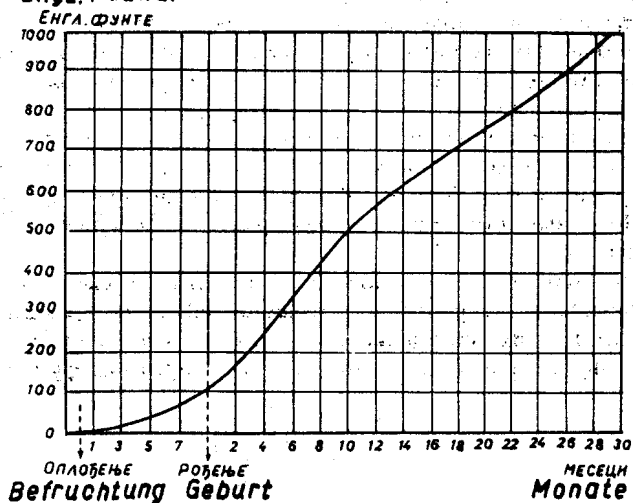
Сл. 1. — Криве растења средње састојинске висине Тиролске смрче [према Guttenberg-у (3)]

Abb. 1. — Wachstumskurven der Bestandsmittelhöhen bei der Tirolerfichte [aus Guttenberg (3)]

Са слика 1 и 2 види се, да све криве линије полазе из координатног почетка (тј: у старости $x = 0$, почињу са износом $y = 0$, пошто ток раста оплођењем почиње нова индивидуа своје растење и тек са сејањем или пресађивањем почињу растење нове биљке), да из координатног почетка излазе тангенцијално према апсисној осовини, да је затим до извесне старости растење убрзано, да после тога пролазе кроз једну прелојну тачку у којој прелазе из конвексности у конкавност (тако да крива добија тзв. S-облик) и да најзад у поодмаклој старости постају паралелне апсисној осовини.

Пошто се ток растења, графички претстављен, јавља као S-крива, то онда, ако желимо да нађемо функцију која ће аналитички дашпрет-

Engl. Pfund.



Сл. 2. — Крива растења тежине Холштајнске женске телади [према Schmidt-у (16)]
 Abb. 2. — Wachstumskurve des Gewichtes von Holstein-Färsen [aus Schmidt (16)]

ставља ток растења, морамо је тражити међу функцијама, које кад се претставе графички могу да даду једну S-криву. Отуд излази, да би једна функција била функција растења, тј. да би облик њене криве био у сагласности са карактеристичним S-обликом, треба та функција да задовољава следеће услове:

1) За вредност $x \rightarrow 0 + 0$, треба да и $y \rightarrow 0$, тј. крива функције растења треба да полази из координатног почетка.

2) За вредност $x \rightarrow 0 + 0$, треба да и $y' \rightarrow 0$, тј. крива функције растења треба да излази из координатног почетка тангенцијално према апсцисној осовини.

3) У поодмаклој старости наступа време завршетка растења, а крива растења заузима правац паралелан апсцисној осовини, тј. за $x \rightarrow \infty$ треба да $y' \rightarrow 0$, или што је исто кад $x \rightarrow \infty$ треба $y \rightarrow k$ (где је k нека константа).

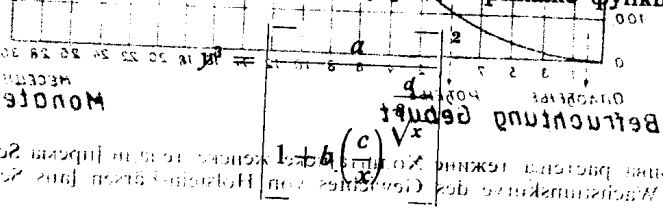
4) За неку коначну вредност x , десно од координатног почетка, функција треба да има једну превојну тачку, тако да крива може да узме тзв. S-облик.

Ипак, поред горњих услова који олакшавају посао око тражења функције растења, наилази се притом на разне веће и мање тешкоће. Сваки организам у току свога живота расте све дотле, док за то постоје биолошки услови. Међутим, на свако физиолошко растење утиче мноштво познатих и непознатих органских и аорганских сила, које се уз то током времена мењају и на разне начине комбинују. Отуд је немогуће наћи ни два индивидуума исте врсте да подједнако расту па макар се развијали и под сасвим сличним условима. Кад се још дода неизбежност

грешки при мерењу, онда тек видимо како је ~~теже~~ ^{теже} говорити о некој строго математички формулисаној функцији растења.

Али ако не посматрамо пораст сваког појединог индивидуа, него просечни индивидуални пораст у склопу целих скупова организама, онда нам искуство показује да се такав пораст може претставити неком прилично једноставном кривом линијом, као што је напр. нека од кривих на сл. 1 и 2. У том случају можемо да поставимо функције које могу, са већом или мањом приближношћу, да претставе просечан ток растења, изједначајући тиме емпиричку криву растења у криву правилније и простије конструкције.

Питање, пак, које би функције могле што боље и потпуније да претставе просечан ток растења, потврде се већ више од једног и по столећа и предмет је интересовања још и данас. Овај рад је скроман допринос решењу тога питања и циљ му је да прикаже функцију



(1)

која има четири параметра (a, b, c, d) и која се добро прилагођава просечном току података растења.

В) ДОБИЈАЊЕ ФУНКЦИЈЕ (9)

Ако се, на основу познатих поставки за добијање нових функција растења (15), у функцији

(2) $Y = F(X) \quad (0 < X < \infty)$

која испуњава услове који се траже од једне функције растења узима да је X сложени аргумент, напр.

(3) $X = f(x)$

где функција (3) такође испуњава услове који се траже од функције растења, онда ће и **новодобивена сложена функција**

(4) $Y = F[f(x)]$

испуњавати напред наведене услове који се траже од једне функције растења.

Кад се у добро познатој Mitscherlich-овој (9) функцији растења

$$y = a_1 \left(1 - \frac{1}{e^{b_1 x}} \right)$$

именитељ $e^{b_1 x}$ развије у **Maclaurin-ов ред**

$$y = a_1 \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{b_1 x}{1!} + \frac{(b_1 x)^2}{2!} + \frac{(b_1 x)^3}{3!} + \dots} \right]^{c_1}$$

па се у именитељу задрже само прва два члана реда, добиће се функција

$$y = a_1 b_1^{c_1} \left(\frac{x}{1 + b_1 x} \right)^{c_1}$$

или

$$(5) \quad y = a_2 \left(\frac{x}{1 + b_1 x} \right)^{c_1}$$

где је $a_2 = a_1 b_1^{c_1}$.

Кад у функцији (5), која испуњава услове који се траже од једне функције растења, узмемо да је x сложени аргумент и сменимо га са y из функције

$$(6) \quad y = a_3 \left(\frac{c}{x} \right)^{\frac{d}{x^m}}$$

која исто тако испуњава услове који се траже од једне функције растења, добићемо сложену функцију

$$y = a_2 \left[\frac{\frac{1}{b_1}}{1 + \frac{1}{a_3 b_1} \left(\frac{c}{x} \right)^{\frac{d}{x^m}}} \right]^{c_1}$$

Кад се у овој последњој функцији стави да је $a_2 \left(\frac{1}{b_1} \right)^{c_1} = a_1$; $\frac{1}{a_3 b_1} = b$; $c_1 = n_1$, добија се функција

$$(1) \quad y = \frac{a_1}{\left[1 + b \left(\frac{c}{x} \right)^{\frac{d}{x^m}} \right]^{n_1}}$$

која такође испуњава услове који се траже од једне функције растења. Кад се у њој узме да је $a_1 = a^n$, $n_1 = 2/3$, $m = 1/8$, прелази она у функцију

$$(1) \quad y^3 = \frac{a}{\left[1 + b \left(\frac{c}{x} \right)^{\frac{8}{\sqrt{x}}} \right]^2}$$

коју смо навели на стр. 176 као функцију (1), која има четири параметра (a, b, c, d) и за коју смо рекли да се добро прилагођава просечном току података растења. Параметри a, b, c и d морају имати позитивне вредности.

Ц) АНАЛИТИЧКА ВЕРИФИКАЦИЈА ФУНКЦИЈА (5), (6) и (1)

У уводу смо набројали четири услова које треба да задовољава једна функција да би њен график био крива линија чији је облик у сагласности са карактеристичним S-обликом криве растења. Функција која испуњава те услове може да дође у обзир за претставу везе између елемента растења и времена, тј. може да дође у обзир као функција растења. Да бисмо видели да ли функције (5), (6) и (1) испуњавају поменута четири услова, извршићемо њихову аналитичку верификацију.

Д) Аналитичка верификација функције

$$(5) \quad y = a_2 \left(\frac{x}{1 + b_1 x} \right)^{c_1}$$

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} y = a_2 \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{x}{1 + b_1 x} \right)^{c_1} = a_2 \cdot 0^{c_1} = 0,$$

тј. кад $x \rightarrow 0 + 0$, $y \rightarrow 0$, што значи да функција задовољава први услов.

2) Извод функције (5) по независно променљивој x има облик

$$(7) \quad y' = \frac{a_2 c_1 x^{c_1 - 1}}{(1 + b_1 x)^{c_1 + 1}},$$

па је

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} y' = a_2 c_1 \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^{c_1 - 1}}{(1 + b_1 x)^{c_1 + 1}} = 0, \text{ за } c_1 > 1,$$

тј. кад $x \rightarrow 0 + 0$, $y' \rightarrow 0$, што значи да функција задовољава други услов и њена крива излази из координатног почетка тангенцијално према апсцисној осовини, уз услов да је $c_1 > 1$.

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = a_2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x + b_1} \right)^{c_1} = a_2 \cdot \left(\frac{1}{b_1} \right)^{c_1} = \frac{a_2}{b_1^{c_1}},$$

тј. кад $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \frac{a_2}{b_1^{c_1}}$, дакле, функција задовољава трећи услов и њена крива у поодмаклој старости заузима правац паралелан са апсцисном осовином.

4) Кад се први извод, дат изразом (7), још једном диференцира, добиће се други извод функције (5)

$$(8) \quad y'' = \frac{a_2 c_1 x^{c_1-2} (c_1 - 1 - 2b_1 x)}{(1 + b_1 x)^{c_1+2}}$$

који ће имати вредност једнаку нули за

- a) $x = 0$, ако је $c_1 > 2$
- b) $x = \infty$
- c) $c_1 - 1 - 2b_1 x = 0$.

Пошто код функције растења долази у обзир превојна тачка која долази десно од координатног почетка на коначној удаљености, то онда долази у обзир превојна тачка одређена изразом под c), тј. превојна тачка чија се апсциса одређује из једначине

$$(9) \quad c_1 - 1 - 2b_1 x = 0,$$

одакле је

$$(10) \quad x = \frac{c_1 - 1}{2b_1}$$

Кад се одреди вредност трећег извода функције (5) у превојној тачки из другог извода датог изразом (8), водећи притом рачуна о постојању једначине (9), добиће се

$$(11) \quad x''' = -2a_2 b_1 c_1 \cdot \frac{x^{c_1-2}}{(1 + b_1 x)^{c_1+2}}$$

Вредност овог трећег извода за x одређено горе под (10) различита је од нуле, што значи да функција (5) у тачки чија је апсциса дата изразом (10) има превојну тачку.

Значи, функција (5) задовољава и четврти услов.

Према томе функција (5) задовољава сва четири услова који се траже од једне функције да би она могла да претставља просечан ток података растења.

(I) Аналитичка верификација функције

$$(6) \quad y = a_3 \left(\frac{c}{x} \right)^{-d \frac{\ln c - \ln x}{x^m}} = a_3 e^{-d \frac{\ln c - \ln x}{x^m}}$$

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} y = a_3 \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{-d \frac{\ln c - \ln x}{x^m}} = a_3 e^{-\infty} = \frac{a_3}{e^{\infty}} = 0.$$

Значи да функција (6) задовољава први услов.

2) Извод функције (6) узет по независно променљивој x може написати у облику:

$$(12) \quad y' = a_3 d \frac{1 + m (\operatorname{lnc} - \operatorname{ln}x)}{x^{m+1} e^{\frac{\operatorname{lnc} - \operatorname{ln}x}{x^m}}}$$

или

$$(13) \quad y' = a_3 d \left[\frac{\frac{1}{x^{m+1}}}{e^{\frac{\operatorname{lnc} - \operatorname{ln}x}{x^m}}} + \frac{m \frac{\operatorname{lnc} - \operatorname{ln}x}{x^{m+1}}}{e^{\frac{\operatorname{lnc} - \operatorname{ln}x}{x^m}}} \right]$$

Кад се у изразу (13) употреби смена

$$(14) \quad -\operatorname{ln}x = t$$

одакле

$$x = e^{-t}$$

добија се

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} y' = a_3 d \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(m+1)t}}{e^{d(\operatorname{lnc}+t)e^{mt}}} + \frac{m(\operatorname{lnc}+t)e^{(m+1)t}}{e^{d(\operatorname{lnc}+t)e^{mt}}} \right] = 0,$$

пошто кад $t \rightarrow \infty$, именитељи разломака у загради далеко брже теже бесконачности од одговарајућих бројитеља, јер ти именитељи имају експоненту фактор e^{mt} .

Тако смо видели да функција (6) задовољава и други услов.

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = a_3 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-d \frac{\operatorname{lnc} - \operatorname{ln}x}{x^m}} = a_3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{d(\operatorname{lnc} - \operatorname{ln}x)}{x^m}}} = a_3 \cdot \frac{1}{1} = a_3.$$

Овде израз $\frac{\operatorname{ln}x}{x^m}$ тежи нули кад $x \rightarrow \infty$, јер $\operatorname{ln}x$ спорије расте него ма који степен од x , док израз $\frac{d \operatorname{lnc}}{x^m}$ такође тежи нули кад $x \rightarrow \infty$, те је

$$(15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{d(\operatorname{lnc} - \operatorname{ln}x)}{x^m}} = e^0 = 1$$

Тако смо утврдили да функција (6) задовољава и трећи услов.

4) Ако се израз (12), којим је одређен први извод функције (6), још једном диференцира по x , добиће се други извод

$$(16) \quad y'' = a_3 d \cdot \frac{dw^2 - (m+1)x^m w - mx^m}{u, x^{2(m+1)}}$$

или

$$(17) \quad y'' = \frac{a_3 d^2 v}{u x^{2(m+1)}}$$

где је

$$(18) \quad w = 1 + m (\ln c - \ln x)$$

$$(19) \quad v = dw^2 - (m + 1) x^m w - mx^m$$

и

$$(20) \quad u = \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{d}{x^m}} = e^{\frac{d(\ln c - \ln x)}{x^m}}$$

Кад се други извод (16) изједначи са нулом, апсциса превојне тачке, која код функција растења долази у обзир, налази се решењем једначине

$$(21) \quad dw^2 - (m + 1) wx^m - mx^m = 0$$

Да једначина (21) има једно коначно и позитивно решење може се видети из следећег разматрања:

а) За $w = -1$, лева страна једначине (21) своди се на $d + x^m > 0$, а одговарајућа вредност решења је $x_1 = ce^{\frac{2}{m}}$.

б) За $w = 0$ лева страна једначине (21) постаје $-mx^m < 0$, док одговарајућа вредност решења је $x_2 = ce^{\frac{1}{m}}$.

Очигледно је да се између вредности x_1 и x_2 налази вредност корена једначине (21), који пошто има позитивну и коначну вредност претставља апсцису превојне тачке функције (6).

Поновним диференцирањем другог извода (17), водећи при томе рачуна о постојању једначине (21), пошто нас интересује вредност трећег извода за апсцису превојне тачке, добиће се израз одговарајуће вредности трећег извода

$$y''' = -a_3 dm \frac{2 dw + (m + 1) wx^m - x^m}{u x^{2m+3}}$$

која је различита од нуле за све реалне вредности x између $x_1 = ce^{\frac{2}{m}}$ и $x_2 = ce^{\frac{1}{m}}$. Према томе функција (6) има једну превојну тачку на коначној удаљености десно од координатног почетка, а апсциса те превојне тачке има вредност између $x_1 = ce^{\frac{2}{m}}$ и $x_2 = ce^{\frac{1}{m}}$.

Према томе функција (6) задовољава сва четири услова који се траже од једне функције да би она могла да претставља просечан ток података растења.

III) Аналитичка верификација функције

$$(1) \quad y = \frac{a_1}{\left[1 + b \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{d}{x^m}}\right]^{n_1}} = \frac{a_1}{\left(1 + be^{\frac{d \ln c - \ln x}{x^m}}\right)^{n_1}}$$

Да бисмо показали да функција (1) испуњава услове који се траже од једне функције да би она могла претстављати просечан ток података растења, обавићемо сличан поступак као код функције (6).

1) Сменом

$$-\ln x = t, \text{ одакле } x = e^{-t}, \text{ имаћемо}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} d \frac{\ln c - \ln x}{x^m} = d \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln c + t}{e^{-mt}} = d \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln c + t) e^{mt} = \infty,$$

па ће бити

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} y = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{a_1}{\left(1 + be^{\frac{d \ln c - \ln x}{x^m}}\right)^{n_1}} = 0,$$

што показује да функција (1) задовољава први услов.

2) Извод функције (1) узет по независно променљивој x може се претставити у облику:

$$(22) \quad y' = a_1 b d n_1 \cdot \frac{u w x^{-m-1}}{(1 + bu)^{n_1+1}}$$

или

$$(24) \quad y' = a_1 b d n_1 \left[\frac{(u w x^{-m-1})^{\frac{1}{n_1+1}}}{1 + bu} \right]^{n_1+1}$$

где су, као код функције (6), извршене замене

$$(18) \quad w = 1 + m (\ln c - \ln x)$$

и

$$(20) \quad u = \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{d}{x^m}} = e^{\frac{d \ln c - \ln x}{x^m}}$$

Кад се у изразу (24) бројитељ и именитељ разломка у средњој загради подели са

$$(u x^{-m-1})^{\frac{1}{n_1+1}}$$

добиће се

$$y' = a_1 b d n_1 \left[\frac{w^{\frac{1}{n_1+1}}}{1 + bu} \cdot \frac{1}{(ux^{-m-1})^{\frac{1}{n_1+1}}} \right]^{n_1+1}$$

или

$$(25) \quad y' = a_1 b d n_1 \left[\frac{w^{\frac{1}{n_1+1}}}{\frac{1}{(ux^{-m-1})^{\frac{1}{n_1+1}}} + \frac{bu}{(ux^{-m-1})^{\frac{1}{n_1+1}}}} \right]^{n_1+1}$$

Кад се у изразу (25) w и u смене својим вредностима из (18) и (20) и стави у добијеном изразу да је

$$- \ln x = t, \text{ одакле } x = e^{-t}$$

добиће се за први извод функције (1) израз

$$y' = a_1 b d n_1 \left[\frac{(1 + m \ln c + mt)^{\frac{1}{n_1+1}}}{\frac{1}{e^{\frac{d}{n_1+1} (\ln c + t) e^{mt} + \frac{m+1}{n_1+1} t}} + b e^{\frac{n_1}{n_1+1} d (\ln c + t) e^{mt} - \frac{m+1}{n_1+1} t}} \right]^{n_1+1}$$

одакле

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} y' = a_1 b d n_1 \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{(1 + m \ln c + mt)^{\frac{1}{n_1+1}}}{\frac{1}{e^{\frac{d}{n_1+1} (\ln c + t) e^{mt} + \frac{m+1}{n_1+1} t}} + b e^{\frac{n_1}{n_1+1} d (\ln c + t) e^{mt} - \frac{m+1}{n_1+1} t}} \right]^{n_1+1} = 0$$

пошто први израз у именитељу тежи нули за $t \rightarrow \infty$, а бројитељ очигледно спорије расте од другог израза у именитељу који у експоненту има фактор e^{mt} .

Тако смо утврдили да функција (1) задовољава и други услов.

3) Како је

$$\lim_{x \rightarrow \infty} d \frac{\ln c - \ln x}{x^m} = 0,$$

јер израз $\frac{\ln x}{x^m}$ тежи нули кад $x \rightarrow \infty$, пошто $\ln x$ спорије расте него ма који степен од x , док израз $\frac{\ln c}{x^m}$ такође тежи нули кад $x \rightarrow \infty$, па ће бити

$$(26) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_1}{\left(1 + be^{\frac{d \ln c - \ln x}{x^m}}\right)^{n_1}} = \frac{a_1}{(1 + be^0)^{n_1}} = \frac{a_1}{(1 + b)^{n_1}} = \text{const.}$$

Тако смо утврдили да функција (1) задовољава и трећи услов.

4) Ако израз (22), којим је одређен први извод функције (1), још једном диференцирамо по x , добићемо други извод:

$$(27) \quad y' = a_1 b d n_1 u \cdot \frac{(n_1 b u - 1) d w^2 - (m + 1) (1 + b u) w x^m - m (1 + b u) x^m}{(1 + b u)^{n_1 + 2} \cdot x^{2m + 2}}$$

или

$$(28) \quad y' = \frac{a_1 b d n_1 u v}{(1 + b u)^{n_1 + 2} \cdot x^{2m + 2}}$$

где је

$$(29) \quad v = (n_1 b u - 1) d w^2 - (m + 1) (1 + b u) w x^m - m (1 + b u) x^m$$

Кад се израз за други извод (27) изједначи са нулом, апсциса превојне тачке, која код функција растења може доћи у обзир, налази се решењем једначине

$$(30) \quad (n_1 b u - 1) d w^2 - (m + 1) (1 + b u) w x^m - m (1 + b u) x^m = 0.$$

Једначина (30) има једно коначно и позитивно решење, што се може видети из следећег разматрања:

а) За $w = 0$, лева страна једначине (30) своди се на $-m(1 + bu)x^m < 0$, а одговарајућа вредност решења је $x_1 = ce^{\frac{1}{m}}$.

б) За $w = -1$, лева страна једначине (30) постаје $(n_1 b u - 1)d + (1 + bu)x^m > 0$, док одговарајућа вредност решења је $x_2 = ce^{\frac{2}{m}}$.

Поновним диференцирањем другог извода (28), водећи при томе рачуна о једначини (30), добиће се вредност трећег извода за x једнако апсциси превојне тачке

$$y''' = \frac{a_1 b d n_1 u v'}{(1 + b u)^{n_1 + 2} \cdot x^{2m + 2}}$$

где је v' извод функције (29) узет по x :

$$v' = x^{-1} \{m(1 + bu)x^m - m[(m + 1)(1 + bu)x^m + 2d(n_1 b u - 1) - bdu]w + (m + 1)bdw^2 - n_1 b d^2 u x^{-m} w^2\}.$$

Вредност овог трећег извода је различита од нуле за све реалне вредности x које се налазе између $x_1 = ce^{\frac{1}{m}}$ и $x_2 = ce^{\frac{2}{m}}$, што значи да функција (1) има једну превојну тачку на коначној удаљености десно од координатног почетка, док се вредност апсцисе превојне тачке налази између вредности

$$x_1 = ce^{\frac{1}{m}} \text{ и } x_2 = ce^{\frac{2}{m}}.$$

Према томе функција (1) задовољава сва четири услова који се траже од једне функције да би она могла да претставља просечан ток података растења.

Д) ИЗРАЧУНАВАЊЕ ПАРАМЕТАРА ФУНКЦИЈЕ (1)

Да би се применила функција (1) на неке податке и испитала њена погодност за претставу тих података потребно је претходно одредити конкретне вредности њених параметара, тако, да се она што је могуће више прилагоди датим подацима. Геометриски то значи, од бесконачно много кривих линија одређених функцијом (1), наћи ону од њих, која ће се најбоље прилагодити кривој линији одређеној мереним подацима растења. То ће бити она од тих бесконачно много кривих линија, која је смештена између тачака емпиричке криве тако, да је збир квадрата отступања тачака са емпиричке криве од одговарајућих тачака прилагођене (теориске) криве, — *minimum*. Од свих кривих линија датих функцијом (1) постоји само једна која задовољава тај услов. Вредности параметара те функције, тзв. највероватније вредности параметара, одређују се, према нивоу наших садашњих знања, најсавршеније помоћу методе најмањих квадрата.

Пошто функција (1) није линеарна у односу на своје параметре a, b, c, d , то да би се применила метода најмањих квадрата за одређивање највероватнијих вредности тих параметара, мора се приступити познатом начину развијања функције у Таулог-ов ред за функције више независно променљивих. За ово је, пак, потребно претходно одредити приближне вредности тих параметара a_0, b_0, c_0, d_0 , да би се затим помоћу њих израчунале највероватније вредности a, b, c, d . Зато ћемо прво показати како се израчунавају приближне вредности параметара функције (1), а затим израчунавање њихових највероватнијих вредности.

1) Одређивање приближних вредности параметара функције (1)

Ако функцију (1) напишемо у облику

$$(1) \quad y^n = \frac{a}{1 + b \left(\frac{c}{x} \right)^{\frac{d}{m}}}$$

где је $n = 1,5$; $m = 0,125$, па се стави да је

$$(20) \quad \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{d}{x^m}} = u$$

добеће она облик

$$y^n = \frac{a}{1+bu}$$

одакле

$$bu = \frac{a - y^n}{y^n}$$

или

(1a)

где је

$$bu = v$$

(30a)

$$v = \frac{a - y^n}{y^n}$$

С обзиром да функција (1) има четири непозната параметара (a , b , c , d), потребно је, за одређивање њихових приближних вредности, изабрати са емпиричке криве 4 карактеристичне тачке за ток растења, па координате тих тачака (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) редом уврстити на место текућих координата (x, y) у функцији (1), односно (1a). Тако ће се, имајући у виду извршене замене, добити следећи систем једначина:

$$(31) \quad \begin{aligned} bu_4 &= v_4 \\ bu_3 &= v_3 \\ bu_2 &= v_2 \\ bu_1 &= v_1 \end{aligned}$$

Елиминацијом параметра b (деобом), па затим логаритмовањем, добија се следећи нижи систем:

$$(32) \quad \begin{aligned} \log u_4 - \log u_1 &= \log v_4 - \log v_1 \\ \log u_3 - \log u_1 &= \log v_3 - \log v_1 \\ \log u_2 - \log u_1 &= \log v_2 - \log v_1 \end{aligned}$$

Стављајући

$$(33) \quad \begin{aligned} \log v_4 - \log v_1 &= w_4 \\ \log v_3 - \log v_1 &= w_3 \\ \log v_2 - \log v_1 &= w_2 \end{aligned}$$

и узимајући у обзир замену (20), добија се систем:

$$(34) \quad \begin{aligned} d[x_1^m (\log c - \log x_4) - x_4^m (\log c - \log x_1)] &= x_1^m x_4^m w_4 \\ d[x_1^m (\log c - \log x_3) - x_3^m (\log c - \log x_1)] &= x_1^m x_3^m w_3 \\ d[x_1^m (\log c - \log x_2) - x_2^m (\log c - \log x_1)] &= x_1^m x_2^m w_2 \end{aligned}$$

Кад се сад, из система (34), елиминише параметар d , долази се до нижег система:

$$\begin{aligned}
 & \log c [x_4^m w_4 (x_2^m - x_1^m) - x_2^m w_2 (x_4^m - x_1^m)] \pm \\
 (35) \quad & = x_4^m w_4 (x_2^m \log x_1 - x_1^m \log x_2) - x_2^m w_2 (x_4^m \log x_1 - x_1^m \log x_4), \\
 & \log c [x_3 w_3 (x_2^m - x_1^m) - x_2^m w_2 (x_3^m - x_1^m)] = \\
 & = x_3^m w_3 (x_2^m \log x_1 - x_1^m \log x_2) - x_2^m w_2 (x_3^m \log x_1 - x_1^m \log x_3)
 \end{aligned}$$

Најзад, кад се из овог последњег система једначина елиминише $\log c$, изврши потребно свођење, и узме у обзир замена (33) и (30а), добија се једна једначина са још само једним непознатим параметром a :

$$(36) \quad K_4 \log(a - y_4^n) + K_2 \log(a - y_2^n) - Kn - K_3 \log(a - y_3^n) - K_1 \log(a - y_1^n) = 0,$$

у којој константе K_4, K_3, K_2, K_1, K имају сталне износе за један дати низ података растења, а дате су изразима:

$$K_4 = x_4^m \left[x_3^m \log \frac{x_2}{x_1} + x_1^m \log \frac{x_3}{x_2} - x_2^m \log \frac{x_3}{x_1} \right]$$

$$K_3 = x_3^m \left[x_1^m \log \frac{x_2}{x_1} + x_1^m \log \frac{x_4}{x_2} - x_2^m \log \frac{x_4}{x_1} \right]$$

$$K_2 = x_2^m \left[x_4^m \log \frac{x_3}{x_1} + x_1^m \log \frac{x_4}{x_3} - x_3^m \log \frac{x_4}{x_1} \right]$$

$$K_1 = x_1^m \left[x_4^m \log \frac{x_2}{x_2} + x_2^m \log \frac{x_4}{x_3} - x_3^m \log \frac{x_4}{x_2} \right]$$

$$K = K_4 \log y_4 + K_2 \log y_2 - K_3 \log y_3 - K_1 \log y_1$$

Као контрола тачности срачунавања коефицијената K_4, K_3, K_2, K_1 , може послужити идентитет:

$$K_4 + K_2 = K_3 + K_1$$

Из једначине (36), може се одредити приближна вредност параметра a , са тачношћу која се жели. Кад је тај посао завршен, онда се израчунава $\log c$ из система једначина (35), затим d из система (34) и најзад b из система (31).

На тај начин би биле одређене све четири приближне вредности параметара функције (1).

II) Израчунавање највероватнијих вредности параметара функције (1)

Када смо већ одредили приближне вредности параметара a_0, b_0, c_0, d_0 онда се највероватније вредности тих параметара a, b, c, d , добијају, по познатом поступку, из једначина

$$(38) \quad \begin{aligned} a &= a_0 + \alpha \\ b &= b_0 + \beta \\ c &= c_0 + \gamma \\ d &= d_0 + \delta \end{aligned}$$

Приближне вредности величина α , β , γ , δ налазе се решењем система тзв. нормалних једначина:

$$(39) \quad \begin{aligned} [AA] \alpha + [AB] \beta + [AC] \gamma + [AD] \delta &= [AH], \\ [AB] \alpha + [BB] \beta + [BC] \gamma + [BD] \delta &= [BH], \\ [AC] \alpha + [BC] \beta + [CC] \gamma + [CD] \delta &= [CH], \\ [AD] \alpha + [BD] \beta + [CD] \gamma + [DD] \delta &= [DH], \end{aligned}$$

које се добијају из линеарних једначина отступања уз услов да је збир квадрата отступања minimum.

Коефицијенти нормалних једначина (39) рачунају се по обрасцима

$$\begin{aligned} [AA] &= A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_i^2 \\ [AB] &= A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_i B_i \\ [AC] &= A_1 C_1 + A_2 C_2 + \dots + A_i C_i \\ [AD] &= A_1 D_1 + A_2 D_2 + \dots + A_i D_i \\ [AH] &= A_1 H_1 + A_2 H_2 + \dots + A_i H_i \\ [BB] &= B_1^2 + B_2^2 + \dots + B_i^2 \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Коефицијенти, пак, линеарних једначина отступања A_i , B_i , C_i , D_i налазе се као вредности делимичних извода функције (1) узетих по појединим од приближних параметара a_0 , b_0 , c_0 , d_0 , и кад се послужимо уобичајеним начином обележавања, имаћемо за њих изразе:

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\partial f}{\partial a_0} = \frac{1}{(1 + b_0 u_i)^{n_1}} \\ B_i &= \frac{\partial f}{\partial b_0} = -a_1 n_1 \cdot \frac{A_i u_i}{1 + b_0 u_i}, \\ C_i &= \frac{\partial f}{\partial c_0} = \frac{b_0 d_0}{c_0} \cdot \frac{B_i}{x_i^m}, \\ D_i &= \frac{\partial f}{\partial d_0} = \frac{c_0}{d_0} \cdot c_i \ln \frac{c_0}{x_i}, \end{aligned}$$

док коефицијент H_i има вредност

$$H_i = h_i - y_i.$$

У претходним изразима значе:

x_i — апсцисе

h_i — ординате тачака емпиричке криве

y_i — ординате тачака теориске криве

$n_1 = 2/3$

$m = 1/8$

$a_1 = a_0^{n_1}$

$$u_i = \left(\frac{c_0}{x_i} \right)^{\frac{d}{m}}$$

Према једначинама (38) највероватније вредности параметара a , b , c , d добијају се кад се приближним вредностима a_0 , b_0 , c_0 , d_0 додаду или одузму, према њиховим знацима, одговарајуће приближне вредности поправки α , β , γ , δ , које се добијају решењем нормалних једначина (39). Цео овај процес рачунања поправки α , β , γ , δ , понавња се дотле, док износи тих поправки не падну на величину која може да се занемари.

Е) ПОГОДНОСТ ФУНКЦИЈЕ (1) ПРИ ЕЛИМИНИСАЊУ ЊЕНИХ ПАРАМЕТАРА

Видели смо, на стр. 186 и 187, да се при израчунавању приближних вредности параметара функције (1) могу из система једначина (31) елиминисати три параметра (b , c , d), тако да се на крају добија само једна једначина (36) која садржи четврти параметар a . Ово је једна од важних особина функције (1) која повећава њен практични значај и даје јој предност над осталим добрим функцијама растења са истим бројем параметара.

Да би истакли значај ове особине функције (1), осврнућемо се на начин израчунавања приближних вредности параметара једне од добрих функција растења. Узећемо Levaković-еву функцију растења

$$(40) \quad y = a \left(\frac{x^d}{b + x^d} \right)^c$$

која има четири параметра (a , b , c , d) и која се добро прилагођава подацима растења. Навешћемо мишљења неких од многобројних аутора о тој функцији:

Тодоровић (15) у своме раду „Аналитичка претстава растења” каже за ту функцију: „Леваковић-ева функција се може убројити у ред квалитетних функција растења. Довољно је еластична, крива јој се врло добро прилагођава подацима опажања.”

Емровић (17) у раду: „Граfiчка примјена Levaković-евих formula” пише за ту функцију: „Levakovićeva 4-parametarska funkcija najjednostavnija je mnogoparametarska funkcija i najbolji do sada poznati analitički izraz zakona rasteња, elastična je, dobro se prilagoђuje podacima i zadovoljava sve nuorne formalne uvjete funkcije rasteња, a ipak je relativno jednostavna.”

Peschel (13), који је дао детаљну анализу неких функција растења, каже за ову Levaković-еву функцију да је најопштија функција која се по споља уочљивим особинама може формирати, да се свакој кривој растења може најбоље приљубити, али да је без практичног значаја пошто израчунавање њених параметара води ка великим тешкоћама.

Те тешкоће, о којима говори Peschel, састоје се у томе што кад се функција (40) примени на податке растења, па се узму четири тачке са емпиричке криве и њине координате унесу у једначину (40), добија се систем једначина који дозвољава да се из њега елиминишу само два параметра (a и c), а остају две једначине

$$(41) \quad \begin{aligned} \log(b + x_1^d) + (K_1 - 1) \log(b + x_1^d) &= K_1 \log(b + x_2^d) + K_2 d^* \\ \log(b + x_3^d) + (K_3 - 1) \log(b + x_1^d) &= K_3 \log(b + x_2^d) + K_1 d^* \end{aligned}$$

у којима су остала још два параметра (b и d) који се не могу елиминисати. Отуд се приближне вредности тих параметара b и d добијају методом постепеног приближавања једновременим радом са обадвема једначинама, што претставља дуг и тежак посао.

На те тешкоће указује и сам Levaković на више места у својим радовима и покушава да их умањи на разне начине. Тако, на пример, у „Glasniku za šumske pokuse” (18), knjiga 6, str. 321, пише: „Na žalost je računanje parametara za prednju funkciju vrlo dugotrajno i tegobno, ...” и предлаже да се узме да је $c = 1$ или $d = 1$, како би се горње тешкоће избегле.

Међутим, јасно је, да изједначавањем појединих параметара са јединицом, функција, углавном, губи од својих битних особина, а нарочито губи од способности за прилагођавање уз какав дати низ података.

Да би ипак решио тај проблем, Levaković (8) у раду: „Metode ubrzanog izračunavanja parametara za neke novije funkcije rasteња”, поред осталог, приказује и методу за убрзано израчунавање параметара функције (40). По тој методи, уз услов да између ордината изабраних тачака са емпиричке криве постоји однос:

$$(42) \quad \frac{y_4}{y_3} = \frac{y_3}{y_2} = \frac{y_2}{y_1} = k$$

Levaković успева да елиминише параметре a , b , c и да добије само једну једначину са једним непознатим параметром d .

Међутим, овом методом, проблем није целисходно решен, пошто се при узимању тачака са емпиричке криве не могу узимати тачке које су карактеристичне за ток растења, водећи при томе рачуна и о распореду тачака по појединим деловима емпиричке криве, већ се морају узимати тачке чије ординате задовољавају горе постављени услов (42). Као последица тога може бити добијање таквих вредности параметара

*) K_1, K_2, K_3, K_4 су константе које имају сталан износ за један дати низ података растења.

које се знатно разликују од њихових највероватнијих вредности, услед чега примена методе најмањих квадрата постаје или немогућа или јако отежана потребом вишеструког понављања рачунања ради добијања изравнатих вредности параметара.

Наводећи, ради упоређења, случај са Levaković-евом функцијом (40) хтели смо да истакнемо особину функције (1), из које се, при њеној примени на податке растења, директно елиминишу три параметра и остаје само један у једначини (36), имајући притом пуну слободу у избору координата тачака са емпиричке криве.

F) РЕЗУЛТАТИ ПРИМЕНЕ ФУНКЦИЈЕ (1) НА НЕКЕ КОНКРЕТНЕ ПОДАТКЕ РАСТЕЊА

Сада ћемо показати резултате који се добијају кад се функција (1) примени на конкретне податке растења. Да бисмо добили очигледнију претставу о степену ваљаности функције (1) при њеној примени, ради лакшег упоређивања резултата, као први пример послужићемо се истим подацима које је употребио Levaković (6, стр. 248) при приказивању степена приљубљивости своје функције (40). Ови подаци се односе на ток растења средње састојинске висине из Guttenberg-ових таблица прихода (3) за Тиролску смрчу I бонитета. Ти су подаци приказани у табели 1. У првом ступцу (x_i) те табеле дате су старости састојина, од деценија до деценија, од 10 до 150 година, а у другом (h_i) одговарајуће средње састојинске висине, чији су износи изравнати графички и окуларно од стране аутора таблица.

При примени своје функције (40) на ове податке Levaković је израчунао параметре по методи најмањих квадрата и понављајући рачунање пет пута, добио је следеће износе:

$$\begin{aligned} a &= 487,701\ 0464 \\ b &= 473,327\ 3355 \\ c &= 1,338\ 8108\ 08 \\ d &= 1,569\ 9838\ 31. \end{aligned}$$

На основу вредности тих параметара израчунао је из функције (40) теориске износе висина (y_i , трећи стубац табеле 1) и нашао разлике између мерених и срачунатих висина (H_i , четврти стубац табеле 1).

При примени функције (1) на исте податке пошли смо од координатних парова:

$$\begin{aligned} x_1 &= 30, & x_2 &= 60, & x_3 &= 110, & x_4 &= 140, \\ y_1 &= 100, & y_2 &= 228, & y_3 &= 345, & y_4 &= 381, \end{aligned}$$

а затим смо према обрасцима (37) израчунали коефицијенте:

$$\begin{aligned} K_4 &= 0,005\ 7131 \\ K_3 &= 0,009\ 2822 \\ K_2 &= 0,004\ 7088 \\ K_1 &= 0,001\ 1397 \\ K &= 0,000\ 0122. \end{aligned}$$

Табела 1 — Tabelle 1

x_i	h_i	y_i	H_i	y_i'	H_i'	y_i''	H_i''
1	2	3	4	5	6	7	8
10	14	14,61	-0,61	13,86	+0,14	13,93	+0,07
20	53	52,43	+0,57	52,51	+0,49	52,62	+0,38
30	100	99,84	+0,16	100,00	0,00	100,06	-0,06
40	147	147,34	-0,34	147,35	-0,35	147,33	-0,33
50	190	190,52	-0,52	190,46	-0,46	190,39	-0,39
60	228	228,01	-0,01	228,00	0,00	227,88	+0,12
70	260	259,90	+0,10	259,96	+0,04	259,83	+0,17
80	287	286,80	+0,20	286,92	+0,08	286,79	+0,21
90	310	309,48	+0,52	309,61	+0,39	309,52	+0,48
100	329	328,66	+0,34	328,76	+0,24	328,70	+0,30
110	345	344,95	+0,05	345,00	0,00	344,98	+0,02
120	358	358,86	-0,86	358,85	-0,85	358,87	-0,87
130	370	370,82	-0,82	370,73	-0,73	370,80	-0,80
140	381	381,15	-0,15	381,00	0,00	381,12	-0,12
150	391	390,14	+0,86	389,93	+1,07	390,09	+0,91
Збир квадрата отступања Quadratsumme der Abweichungen			3,7213		3,2059		3,0709
Средње отступање Mittlere Abweichung			± 0,58		± 0,54		± 0,53

Пошто смо решили једначину (36) добили смо приближну вредност параметра a и то:

$$a = 11424,026813\dots,$$

a затим смо из система једначина (35), (34) и (31) нашли да је

$$\log c = 0,866\ 1592\dots$$

$$d = 4,432\ 2863\dots$$

$$\log b = 2,788\ 1522\dots$$

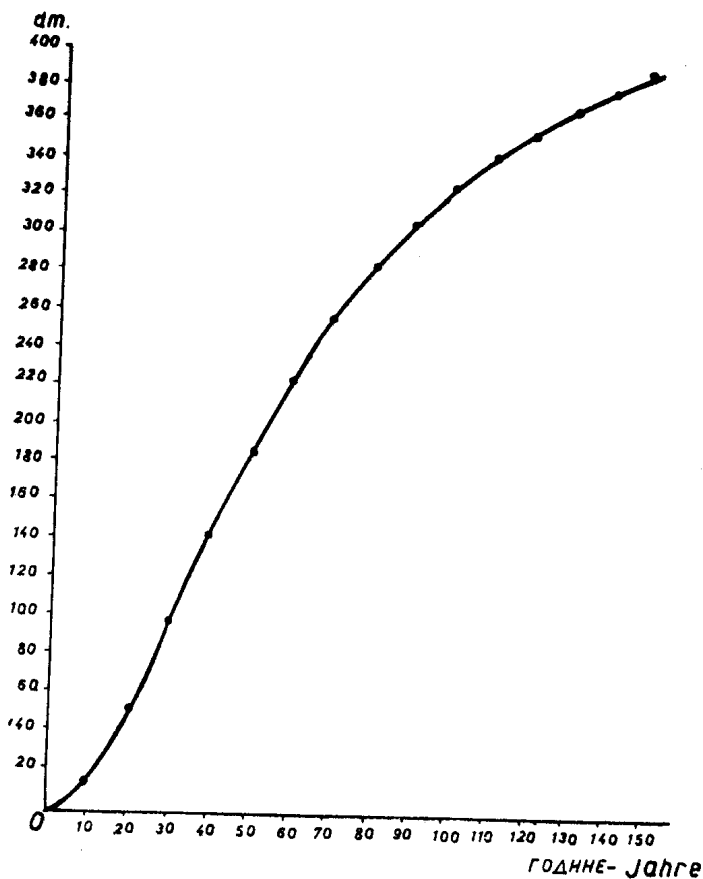
Добијене вредности параметара унели смо у функцију (1) и срачунали теориске износе висина (y_i' , пети стубац табеле 1). Из мерених и срачунатих висина образовали смо разлике (H_i') и сложили их у шести стубац исте табеле.

Најзад смо срачунали збир квадрата отступања и средња квадратна отступања за наше резултате добијене помоћу функције (1) као и за Леваковић-еве резултате добијене помоћу функције (40) по познатом обрасцу:

$$(43) \quad \sigma = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-u}}$$

где је $[\delta\delta]$ сума квадрата отступања, n број једначина отступања, а u број параметара.

Из табеле 1 се види, да су наша отступања (стубац H_i'), добијена помоћу функције (1) без употребе методе најмањих квадрата, мања од отступања које је добио Levaković (стубац H_i) помоћу своје функције (40) иако је он рачунање вршио помоћу методе најмањих квадрата и то понављајући то рачунање пет пута (6, страна 248). Стубац u_i' табеле 1 показује да се резултати добијени помоћу функције (1) изванредно добро подударају са Guttenberg-овим емпиричким износима (h_i , други стубац табеле 1) иако нисмо при рачунању употребили методу најмањих квадрата. Слика 3 на очигледан начин показује степен тога подударања. Крива линија на тој слици претставља графички саму функцију (1), док тачке поред ње Guttenberg-ове висинске износе.



Сл. 3 — Abb. 3

Иако су добијени резултати изванредно добри, ипак смо извршили једно рачунање највероватнијих вредности параметара функције (1) помоћу методе најмањих квадрата. Користећи се напред нађеним приближним вредностима параметара

$$\begin{aligned}
 a_{01} &= 507,2392 & (a_{01} = \sqrt[n]{a}; n = 1,5) \\
 b_0 &= 613,9771 \\
 c_0 &= 7,347 \ 8315 \\
 d_0 &= 4,432 \ 2863,
 \end{aligned}$$

склопили смо нормалне једначине (39) и из њих израчунали приближне вредности поправки

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 1,3539 \\
 \beta &= -7,4007 \\
 \gamma &= 0,012 \ 8889 \\
 \delta &= -0,011 \ 3706
 \end{aligned}$$

а затим, према једначинама (38), нашли смо највероватније вредности параметара

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 508,5931 \\
 b &= 606,5764 \\
 c &= 7,360 \ 7204 \\
 d &= 4,420 \ 9157.
 \end{aligned}$$

Не понављајући ово рачунање, помоћу ових параметара добијени су из функције (1) резултати који су сложени у седмом и осмом ступцу табеле 1. Добијени резултати показују да се функција (1) још више приљубила уз дате емпиричке податке.

Да бисмо проверили и употпунили добијене резултате, за други пример узели смо опет исте податке које је узео Levaković (6, стр. 249) за свој други пример при приказивању приљубљивости своје функције (40) уз тај други низ података. То су подаци о износима средњих састојинских висина из Guttenberg-ових таблица прихода (3) за Тиролску смрчу V бонитета. Они су сложени у првом и другом ступцу табеле 2. У првом ступцу (x_i) те табеле дате су старости састојина, од деценија до деценија, од 20 до 150 година, а у другом (h_i) одговарајући Guttenberg-ов емпирички ток растења средње састојинске висине, чији су износи изравнати графички и окуларно од стране аутора таблица.

При примени своје функције (40) на овај други ток растења Levaković је израчунао параметре по методи најмањих квадрата, и пошто је рачунање поновљено више пута, нађени су за параметре следећи износи:

$$\begin{aligned}
 a &= 334,241 \ 3228 \\
 b &= 90,378 \ 34314 \\
 c &= 2,295 \ 009752 \\
 d &= 1,126 \ 763791.
 \end{aligned}$$

На основу ових параметара израчунао је Levaković из своје функције (40) износе теориских висина (y_i , трећи стубац табеле 2) и нашао разлике између мерених и срачунатих висина (H_i , четврти стубац табеле 2). Ми смо, при примени функције (1) на исте податке, пошли од координатних парова:

Табела 2 — Tabelle 2

x_i	h_i	y_i	H_i	y_i'	H_i'	y_i''	H_i''
20	13	13,18	-0,18	13,00	0,00	12,98	+0,02
30	28	27,75	+0,25	27,81	+0,19	27,81	+0,19
40	44	44,16	-0,16	44,28	-0,28	44,25	-0,25
50	61	60,84	+0,16	60,93	+0,07	60,89	+0,11
60	77	76,95	+0,05	77,00	0,00	76,96	+0,04
70	92	92,11	-0,11	92,13	-0,13	92,08	-0,08
80	106	106,17	-0,17	106,18	-0,18	106,13	-0,13
90	119	119,11	-0,11	119,12	-0,12	119,08	-0,08
100	131	130,98	+0,02	131,00	0,00	130,96	+0,04
110	142	141,84	+0,16	141,88	+0,12	141,84	+0,16
120	152	151,79	+0,21	151,84	+0,16	151,80	+0,20
130	161	160,91	+0,09	160,96	+0,04	160,93	+0,07
140	169	169,28	-0,28	169,32	-0,32	169,29	-0,29
150	177	176,97	+0,03	177,00	0,00	176,97	+0,03
Збир квадрата отступања Quadratsumme der Abweichungen			0,3592		0,3285		0,3104
Средње отступање Mittlere Abweichung			+0,189		+0,181		+0,176

$$x_1 = 20, \quad x_2 = 60, \quad x_3 = 100, \quad x_4 = 150,$$

$$y_1 = 13, \quad y_2 = 77, \quad y_3 = 131, \quad y_4 = 177,$$

а затим према обрасцима (37) израчунали смо коефицијенте:

$$K_4 = 0,009 \ 3409$$

$$K_3 = 0,020 \ 2885$$

$$K_2 = 0,012 \ 6060$$

$$K_1 = 0,001 \ 6584$$

$$K = -0,000 \ 0245.$$

Потом смо решили једначину (36) и нашли да је:

$$a = 10 \ 099,826\dots$$

одакле смо израчунали

$$a_1 = \sqrt[n]{a} = 467,2428\dots,$$

и најзад из система једначина (35), (34) и (31) нашли смо да је

$$\log c = -0,376 \ 8115\dots$$

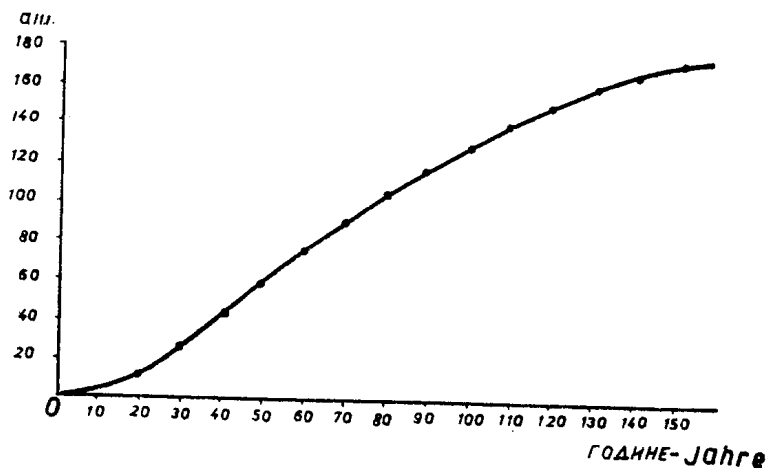
$$d = 8,603 \ 6698\dots$$

$$\log b = 12,258 \ 1020\dots$$

Добијене приближне вредности параметара унели смо у функцију (1) и срачунали теориске износе висина (y_i' , пети стубац табеле 2). Из мерених и срачунатих висина образовали смо разлике (H_i' , шести стубац табеле 2), па израчунали збир квадрата отступања и средња отступања, према

обрасцу (43), како за наше резултате добијене помоћу функције (1), тако и за Levaković-еве резултате добијене помоћу функције (40).

Из табеле 2 види се да смо ми, још пре прелаза на рачунање помоћу методе најмањих квадрата, добили резултате (H'_i , шести стубац табеле 2) који су бољи од Levaković-евих резултата (H_i , четврти стубац табеле 2) које је он добио рачунањем по методи најмањих квадрата и то понављајући ово рачунање више пута. Из петог ступца табеле 2 (стубац y'_i) види се да се износи висина добијених помоћу функције (1) ванредно добро подударају са Guttenberg-овим емпиричким h_i -износима иако при рачунању нисмо употребили методу најмањих квадрата. На слици 4 је на очигледан начин приказан степен тога подударања. Крива на тој слици претставља графички саму функцију (1), док тачке покрај ње Guttenberg-ове висинске износе.



Сл. 4 — Abb. 4

И код овог другог примера смо извршили једно рачунање највероватнијих вредности параметара функције (1) помоћу методе најмањих квадрата. Користећи се већ нађеним приближним вредностима параметара

$$\begin{aligned} a_{01} &= 467,2428\dots \\ b_0 &= 1811765416667 \\ c_0 &= 0,419\ 9413\dots \\ d_0 &= 8,603\ 6698\dots \end{aligned}$$

склопили смо нормалне једначине (39) чијим решењем смо нашли приближне вредности поправки

$$\begin{aligned} \alpha &= -0,2659\dots \\ \beta &= -4368499\dots \\ \gamma &= \frac{1}{4} 0,0003676\dots \\ \delta &= 0,0015271\dots \end{aligned}$$

а затим, према једначинама (38), нашли смо највероватније вредности параметара

$$\begin{aligned}a_1 &= 466,9769\dots \\b &= 1811761048168 \\c &= 0,420\ 3089\dots \\d &= 8,605\ 1969\dots\end{aligned}$$

Ограничивши се само на једно рачунање по методи најмањих квадрата, са овим параметрима помоћу функције (1) израчунали смо теориске износе висина (y_i'' -седми стубац табеле 2). Из мерених и срачунатих висина образовали смо разлике (H_i'' -осми стубац табеле 2). Најзад смо срачунали збир квадрата отступања и средње отступање по обрасцу (43). Добијени резултати показују да се функција (1) још боље приљубила датим емпиричким подацима растења.

Затим смо прешли на примену функције (1) за претставу везе између елемената растења и времена (старости) код неких животиња.

Међутим, док растење код биљака траје до краја живота, код животиња се оно по правилу зауставља са појавом полне зрелости. Поред тога растење код животиња обухвата ембрионално и постембрионално растење. Сви подаци са којима смо располагали односили су се на постембрионално растење. Нисмо ни покушавали да на основу ових података из постембрионалних растења екстраполацијом добијемо податке растења из ембрионалног развоја, јер се ово растење врши под сасвим другим условима. Услед тога смо при примени функције (1) употребљавали само податке добијене мерењима у постембрионалном развоју, тј. на податке добијене мерењем од момента рођења па до времена за које су постојали подаци односно до времена до кога је било растења. Како у моменту рођења животињског организма испитивани елемент растења већ има извесну величину, то смо при примењивању функције (1), ту почетну величину при рођењу одузимали од одговарајућег износа тог истог елемента добијеног мерењем у постембрионалном развоју, па смо на тако смањене износе података растења примењивали функцију (1). На крају смо одузете почетне износе при рођењу додавали одговарајућим рачунским износима добијеним помоћу функције (1).

Отуда је јасно, да при графичкој претстави, крива функције (1), која одговара апсциси $x = 0$, мора да се налази на позитивном делу ординатне осовине и да од координатног почетка буде удаљена за почетни износ при рођењу.

ПРИМЕНА ФУНКЦИЈЕ (1) ЗА ПРЕТСТАВУ ВЕЗЕ ЕЛЕМЕНАТА РАСТЕЊА КОД ОВАЦА

При примени функције (1) за претставу везе елемената растења код животиња, прво смо почели са применом на податке растења код оваца. За ово смо се послужили подацима М. Ташковског (19), који се односе на пораст дужине трупа чистокрвних шарпланинских мушких

јагањаца. Ти су подаци приказани у табели 3. У првом ступцу те табеле дате су старости јагањаца у недељама, а у другом одговарајући просечни износи дужине трупа добијени мерењем. Укупно је било 23 јагњета.

Табела 3 — Tabelle 3

Старост у недељама Wochenalter	Просечан пораст дужине трупа у см Mittleres Wachstum der Rumpflänge in cm		
	мерен gemessen	теориски theoretisch	отступање Abweichung
0	30,59	30,59	
1	31,96	31,96	0,00
2	34,01	34,55	0,00
3	36,68	37,06	-0,54
4	39,65	39,65	-0,38
5	41,82	42,04	0,00
6	44,00	44,19	-0,22
7	45,84	46,08	-0,19
8	47,75	47,75	-0,24
9	49,29	49,21	0,00
10	50,39	50,48	+0,08
11	51,34	51,58	-0,09
12	52,56	52,56	-0,24
13	53,93	53,42	0,00
Средње отступање Mittlere Abweichung			+0,51
			±0,32

При примени функције (1) на ове податке пошли смо од координатних парова чије су апсцисе

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 8, \quad x_4 = 12,$$

док смо за ординате узимали одговарајуће износе из другог ступца табеле 3, смањујући их за почетни износ при рођењу (30, 59).

Служећи се истим обрасцима као и раније, добили смо за приближне вредности параметара следеће износе

$$\begin{aligned} a_1 &= 32,92562\dots \\ \log b &= -4,62574\dots \\ \log c &= 14,75388\dots \\ d &= 0,45366\dots \end{aligned}$$

Добијене вредности параметара унели смо у функцију (1) и срачунали одговарајуће теориске износе (трећи стубац табеле 3). Из мерених и теориских износа образовали смо разлике (четврти стубац табеле 3) и најзад смо срачунали средње отступање према обрасцу (43).

Затим смо узели податке М. Ташковског (19), који се односе на пораст тежине истих јагањаца. Ти су подаци приказани у табели 4. У првом стубцу те табеле дате су старости јагањаца у недељама, а у другом одговарајући просечни износи пораста тежине.

Табела 4 — Tabelle 4

Старост у недељама Wochenalter	Просечан пораст тежине у кг Mittleres Wachstum des Lebendgewichtes bei den Lämmern in kg		
	мерен gewogen	теориски theoretisch	отступање Abweichung
0	2,95	2,95	0,00
1	3,82	3,82	0,00
2	5,23	5,05	+0,18
3	6,73	6,64	+0,09
4	8,34	8,34	0,00
5	10,07	10,09	-0,02
6	11,64	11,86	-0,22
7	13,49	13,64	-0,15
8	15,41	15,41	0,00
9	17,26	17,18	+0,08
10	18,88	18,93	-0,05
11	20,81	20,67	+0,14
12	22,27	22,40	-0,13
13	24,11	24,11	0,00
Средње отступање Mittlere Abweichung			+0,13

При примени функције (1) на ове податке пошли смо од координатних парова чије су апсцисе

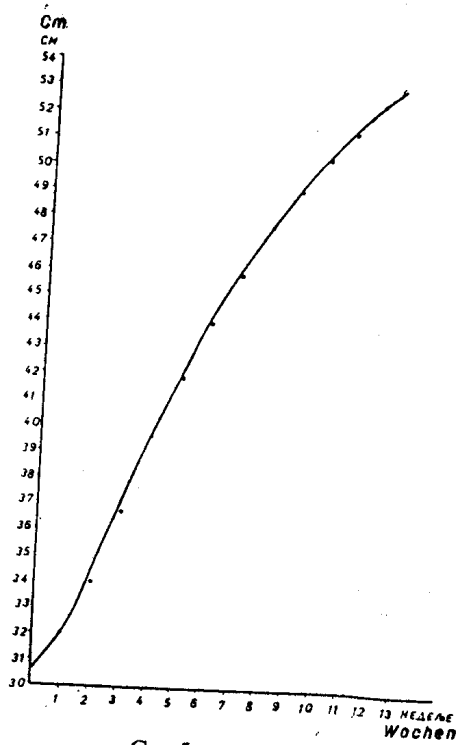
$$x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 8, \quad x_4 = 13,$$

док смо за ординате узимали одговарајуће износе тежина из другог ступца табеле 4, смањујући их за почетни износ (2,95) при рођењу. Служећи се истим обрасцима као у претходним примерима добили смо да је

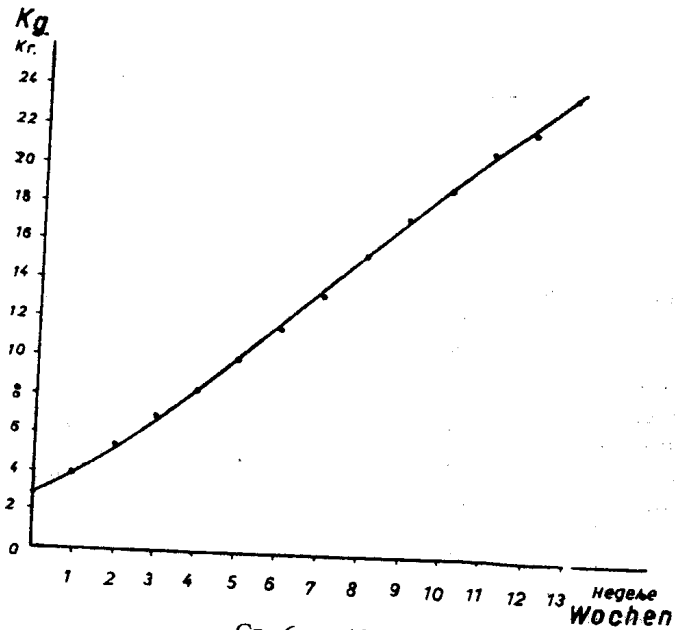
$$\begin{aligned} a_1 &= 3613,321\dots \\ \log b &= 0,08511\dots \\ \log c &= 6,3026\dots \\ d &= 0,86665\dots \end{aligned}$$

Помоћу ових вредности смо из функције (1) срачунали одговарајуће теориске износе тежина (трећи стубац табеле 4). Из мерених и теориских износа образовали смо разлике (четврти стубац табеле 4) и најзад смо срачунали средње отступање према обрасцу (43).

Из табела 3 и 4 види се да се резултати добијени помоћу функције (1) добро подударују са мереним подацима, иако при рачунању нисмо прешли на употребу методе најмањих квадрата сматрајући да се валаност функције (1) за претставу података растења види добро и без тога. Слике 5 и 6 показују то на очигледан начин. Слика 5 се односи на пораст дужиме трупа а слика 6 на пораст тежине. Крива линија, на свакој од тих слика, претставља графички функцију (1) прилагођену подацима, док црне тачке на њој и око ње претстављају податке добијене мерењем на шарпланинским мушким јагањцима.



Сл. 5 — Abb. 5



Сл. 6 — Abb. 6

Затим смо, ради потпуности испитивања, применили функцију (1) за претставу везе елемената растења код других неких пасмина оваца. Притом смо се послужили подацима професора Р. Pavlinićа (21, 20), који се односе на пораст тежине јагањаца матичног стада каракул оваца у Ћунскоме (острво Мали Лошињ) и Станчићу. Ти су подаци приказани у табелама 5 и 6.

У првом ступцу табеле 5, која се односи на јагањце у Ћунскоме, дате су старости у недељама, а у другом ступцу одговарајући просечни износи тежине. Укупно је било 14 јагањаца од којих 6 мушких и 8 женских. Полазећи од координатних парова чије су апсисе

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 11, \quad x_3 = 14, \quad x_4 = 15,$$

а ординате одговарајући износи из другог ступца табеле 5 (пошто су претходно смањени за почетни износ при рођењу), добили смо за приближне параметре следеће износе

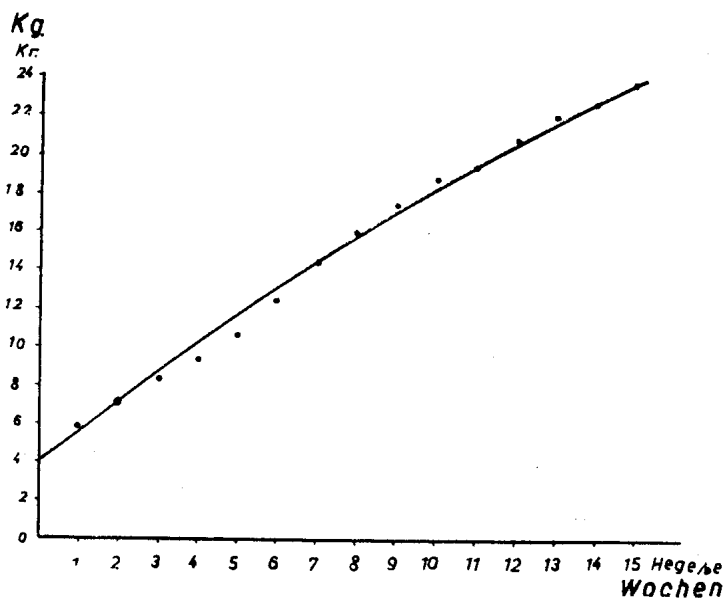
$$\begin{aligned} a_1 &= 279,5497\dots \\ \log b &= -0,809464\dots \\ \log c &= 6,9\dots \\ d &= 0,621132\dots \end{aligned}$$

Табела 5 — Tabelle 5

Старост у недељама Wochenalter	Просечан пораст тежине јагањаца у кг Mittleres Wachstum des Lebendgewichtes bei den Lämmern in kg		
	мерен gewogen	теориски theoretisch	отступање Abweichung
0	4,14	4,14	0,00
1	5,79	5,49	+0,30
2	7,16	7,16	0,00
3	8,43	8,79	-0,36
4	9,40	10,34	-0,94
5	10,62	11,81	-1,19
6	12,39	13,22	-0,83
7	14,43	14,57	-0,14
8	16,03	15,86	+0,17
9	17,55	17,10	+0,45
10	18,85	18,29	+0,56
11	19,44	19,44	0,00
12	20,79	20,55	+0,24
13	22,07	21,63	+0,44
14	22,68	22,68	0,00
15	23,69	23,69	0,00
Средње отступање Mittlere Abweichung			± 0,61

Помоћу ових приближних вредности параметара смо из функције (1) срачунали одговарајуће износе тежина (трећи стубац табеле 5). Из мерених и теориских износа образовали смо разлике (четврти стубац табеле 5) и на крају срачунали средње отступање према обрасцу (43).

Резултати табеле 5 су на слици 7 приказани на очигледан начин. Крива линија на тој слици претставља графички функцију (1) прилагођену просечном износу тежина јагањаца у Ћунскоме, док црне тачке на њој и око ње претстављају податке о просечном износу тежина добијених мерењем.



Сл. 7 — Abb. 7

При примени функције (1) на податке који се односе на тежине јагањаца каракул оваца у Станчићу, пошли смо од координатних парова апсциса

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 8, \quad x_4 = 12,$$

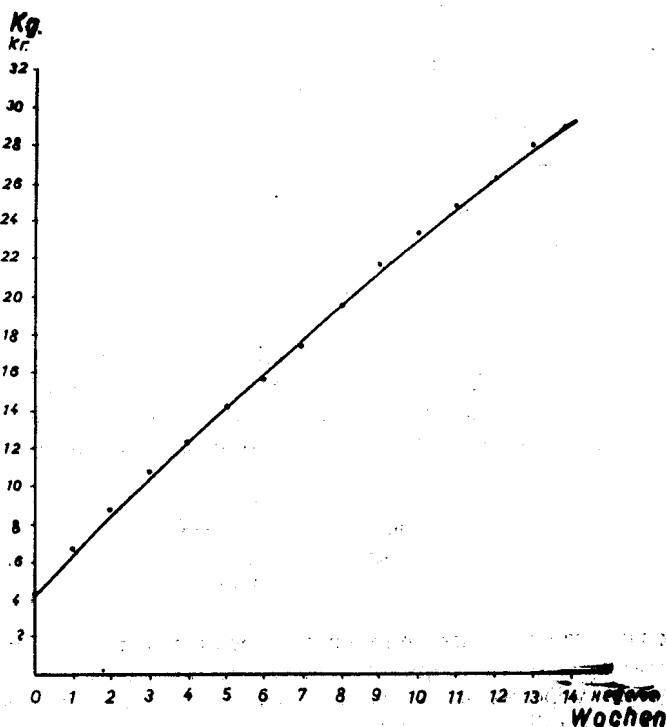
док смо за ординате узимали одговарајуће износе тежина из другог ступца табеле 6, смањивши их претходно за почетни износ тежине при рођењу. Поступајући на исти начин као и у претходним примерима, добили смо за приближне вредности параметара следеће износе

$$\begin{aligned} a_1 &= 323,1846 \\ \log b &= -2,6166 \\ \log c &= 73, \\ d &= 0,0828045 \end{aligned}$$

Помоћу ових приближних вредности параметара смо из функције (1) срачунали одговарајуће теориске износе тежина (трећи стубац табеле 6). Из мерених и теориских износа образовали смо разлике (четврти стубац табеле 6) и на крају смо срачунали средње отстапање према обрасцу (43). Исти резултати су графички приказани на слици 8.

Табела 6 — Tabelle 6

Старост у недељама Wochenalter	Просечан пораст тежине јагањаца у кг Mittleres Wachstum des Lebendgewichtes bei den Lämmern in kg		
	мерен gewogen	теориски theoretisch	отступање Abweichung
0	4,30	4,30	0,00
1	6,70	5,97	+0,73
2	8,40	8,04	+0,36
3	10,50	10,10	+0,40
4	12,10	12,10	0,00
5	14,00	14,00	0,00
6	15,70	15,91	-0,21
7	17,50	17,74	-0,24
8	19,50	19,50	0,00
9	21,70	21,22	+0,48
10	23,40	22,89	-0,49
11	24,70	24,52	+0,18
12	26,10	26,10	0,00
13	28,00	27,65	+0,35
14	30,20	29,17	+1,03
Средње отступање Mittlere Abweichung			± 0,51



Сл. 8 — Abb. 8

ПРИМЕНА ФУНКЦИЈЕ (1) ЗА ПРЕТСТАВУ ВЕЗЕ ЕЛЕМЕНАТА РАСТЕЊА КОД ТЕЛАДИ

Затим смо прешли на примену функције (1) за претставу везе елемената растења и старости код телади. Притом смо се послужили подацима Обрађевић-а (22), који се односе на пораст висине гребена женске телади мелеза насталих укрштањем говеда монтафонске и сименталске расе. Ти су подаци сложени у табели 7. У првом ступцу те табеле дате су старости телади у месецима, а у другом одговарајући просечни износи висине гребена.

Табела 7 — Tabelle 7

Старост у месецима Monatsalter	Просечан пораст висине гребена телади у см Mittleres Wachstum der Widerristhöhe bei den Kälbern in cm		
	мерен gemessen	теориски theoretisch	отступање Abweichung
0	73,00	73,00	0,00
0,5	76,60	75,81	+0,79
1	80,00	80,00	0,00
1,5	83,90	84,97	-0,17
2	87,70	87,70	0,00
2,50	91,10	90,83	+0,27
3	93,50	93,50	0,00
4	97,10	97,69	-0,59
5	100,40	100,73	-0,33
6	103,00	103,00	0,00
Средње отступање Mittlere Abweichung			± 0,49

При примени функције (1) на ове податке пошли смо од координатних парова чије су апсцисе

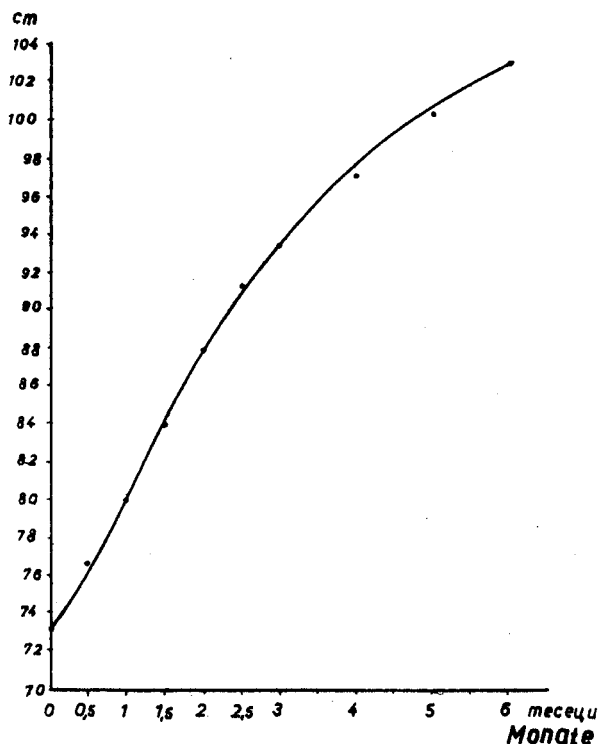
$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 6,$$

док смо за ординате узимали одговарајуће износе висине гребена из другог ступца табеле 7, пошто смо претходно те износе смањили за почетни оизнс (73,00) при рођењу. Поступајући на исти начин као и у претходним примерима, добили смо приближне вредности параметара

$$\begin{aligned} a_1 &= 42,56071\dots \\ \log b &= -3,515786\dots \\ \log c &= 7,8\dots \\ d &= 0,59765\dots \end{aligned}$$

Помоћу овако израчунатих приближних вредности параметара из функције (1) смо срачунали теориске износе висине гребена (трећи стубац табеле 7). Из мерених и срачунатих износа образовали смо разлике (четврти стубац табеле 7) и најзад срачунали средње отступање према обрасцу (43).

Резултати табеле 7 показују да се функција (1) опет добро прилагодила и овим подацима растења и то још пре употребе методе најмањих квадрата. Степен тога подударња се види на слици 9. Крива линија на тој слици претставља графички функцију (1) прилагођену просечном износу висине гребена женске телади мелеза, док црне тачке на њој и око ње претстављају просечне износе висине гребена добијене мерењем.



Сл. 9 — Abb 9

ПРИМЕНА ФУНКЦИЈЕ (1) ЗА ПРЕТСТАВУ ВЕЗЕ ТЕЖИНЕ И СТАРОСТИ КОД ФАЗАНА

Најзад смо прешли на примену функције (1) за претставу везе између тежине и старости код фазана. Притом смо се послужили подацима Јоветића (23), који се односе на просечан пораст тежине код фазана. Укупно је било 10 фазана, а мерења тежине су вршена после сваких 10 дана. Подаци добијени мерењем приказани су у табели 8. У првом ступцу те табеле дате су старости фазана у декадама (декада = 10 дана), а у другом одговарајући просечни износи тежина.

При примени функције (1) на ове податке пошли смо од координатних парова чије су апсцисе

Табела 8 — Tabelle 8

Старост у декадама Alter, Dekaden	Просечан пораст тежине фазана у гр Mittleres Wachstum des Lebendgewichtes bei den Fasanen in гр		
	мерен gewogen	теориски theoretisch	отступање Abweichung
0	18,89	18,89	0,00
1	55,80	55,80	0,00
2	137,70	154,47	-16,77
3	247,60	270,36	-22,76
4	385,20	385,20	0,00
5	497,80	492,43	+5,37
6	593,20	590,04	+3,16
7	667,30	677,95	-10,65
8	737,30	756,77	-19,47
9	827,40	827,40	0,00
10	887,90	890,77	-2,87
11	953,90	947,76	+6,14
12	1018,90	999,17	+19,73
13	1050,80	1045,69	+5,11
14	1087,90	1087,91	-0,01
15	1129,10	1126,35	+2,75
Средње отступање Mittlere Abweichung			± 12,79

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 9, \quad x_4 = 14,$$

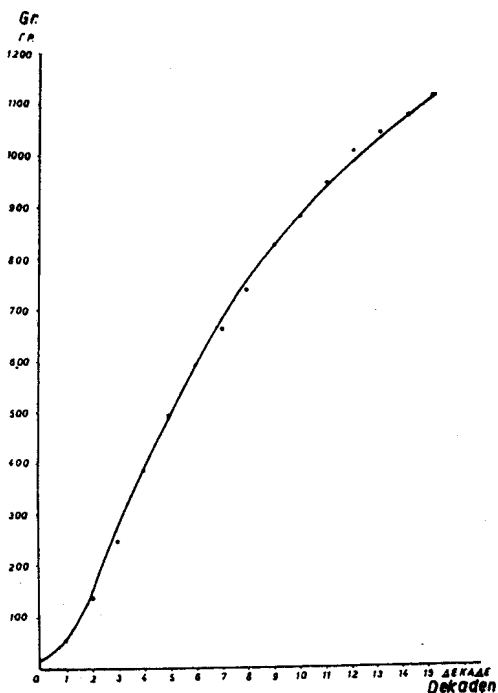
док смо за ординате узимали одговарајуће износе тежина из другог ступца табеле 8, пошто смо претходно те износе смањивали за почетни износ (18,89) при излегању.

Служећи се истим обрасцима као и у претходним примерима, добили смо следеће износе за приближне вредности параметара

$$\begin{aligned} a_1 &= 2531,30046\dots \\ \log b &= 9,157744\dots \\ \log c &= -1,27763\dots \\ d &= 5,01264\dots \end{aligned}$$

Овако добијене приближне вредности параметара унели смо у функцију (1) и израчунали одговарајуће теориске износе тежина (трећи стубац табеле 8). Из мерених и теориских износа образовали смо разлике (четврти стубац табеле) и најзад смо срачунали средње отступање према обрасцу (43).

Из табеле 8 види се да се резултати добијени помоћу функције (1) добро подудару са емпиричким подацима и то још пре употребе методе најмањих квадрата. Степен тога подударања је приказан на слици 10 на очигледан начин. Крива линија на тој слици претставља графички функцију (1) прилагођену просечним износима тежине фазана, док црне тачке на њој и око ње претстављају просечне износе тежина фазана добијених мерењем.



Сл. 10 — Abb. 10

Г) ЗАКЉУЧАК

На основу горе изложеног могу се извући следећи закључци:

1. Функција (1) задовољава формалне услове који се траже од једне функције да би могла доћи у обзир за карактерисање просечног тока растења.

2. Кад се функција (1) примени на податке растења, онда се при израчунавању приближних вредности њених параметара могу директно елиминисати три од тих параметара (b , c , d). Ова особина функције (1) повећава њен практични значај и даје јој предност над осталим функцијама са четири параметра које ту особину немају.

3. Резултати из табела 1—8 показују да се функција (1) добро прилагођава подацима растења и да се са успехом може употребити као функција органског растења уопште користећи је за разне везе елемената растења.

4. Функција (1) по потреби може лако прећи у функцију са пет или шест параметара стављањем да је $m = 1/8$ и $n_1 = 2/3$, где се даље m и n_1 имају третирати као променљиви параметри. У том случају се са повећавањем броја параметара повећава степен прилагодљивости функције датом низу емпиричких података.

ЛИТЕРАТУРА

1. Backman G., Wachstum und Organische Zeit, Bios, Band 15, Leipzig 1943.
2. Brody S. — Growth and Development III, University of Missouri. Agricultural Experiment Station, Research Bulletin 97 Columbia, Missouri 1927.
3. Guttenberg A. — Wachstum und Ertrag der Fichte im Hochgebirge. Wien und Leipzig 1915.
4. Jordan W. — Handbuch der Vermessungskunde erster Band, Stuttgart 1920.
5. Karapandžić Dj. — Viša matematika za studente šumarstva. Beograd 1949.
6. Levaković A. — Analitički oblik zakona rastenja. Glasnik za šumske pokuse, knjiga 4, str. 189—253, Zagreb 1935.
7. Levaković A. — Fiziološko-dinamički osnovi funkcija rastenja. Glasnik za šumske pokuse, knjiga 6, str. 374—385, Zagreb 1938.
8. Levaković A. — Metode ubrzanog izračunavanja parametara za neke novije funkcije rastenja. Šumarski list, str. 299—309, Zagreb 1939.
9. Mitscherlich A. — Das Gesetz des Pflanzenwachstums, Landwirtschaftliche Jahrbücher, Band 53, S. 167—1919.
10. Михајлов И. — Математичко формулирање на законот за растењето на шумските дрва и насади. Годишен зборник на Земјоделско-шумарскиот факултет на Универзитетот — Скопје, књига 1, стр. 3—70, Скопје 1949.
11. Duschek A. — Vorlesungen über höhere Mathematik, erster Band, Wien 1949.
12. Пејовић Т. — Математичка анализа. Београд 1957.
13. Peschel W. — Die mathematischen Methoden zur Herleitung der Wachstums-gesetze von Baum und Bestand und die Ergebnisse ihrer Anwendung. Tharandter Forstl. Jahrbuch 1938, Heft 3/4, S. 169—247.
14. Романовский В. И. — Применения математической статистики в опытном деле. Москва 1947 Ленинград.
15. Тодоровић Д. — Аналитичка претстава растења. Годишен зборник на Земјоделско-шумарскиот факултет на Универзитетот — Скопје, књига 6—7. Скопје 1955.
16. Schmidt J. — Patow C.—Kliesch J. — Züchtung, Ernährung und Haltung der landwirtschaftlichen Haustiere. Berlin 1950.
17. Emrović B. — Grafička primjena Levakovićevih formula. Šumarski list, broj 3—4, str. 148—156, Zagreb 1951.
18. Levaković A. — O izgledima i mogućnostima numeričkog bonitiranja stojbina Glasnik za šumske pokuse, knjiga 6, str. 319—361, Zagreb 1938.
19. Тапковски М. — Придонес кон познавањето порастот на јагнињата од шарпланинската овца во првите три месеци од животот. Годишен зборник на Земјоделско-шумарскиот факултет на Универзитетот — Скопје, књига IV. Скопје 1953.
20. Pavlinić P. — Porast težine jagnjadi. Veterinarski arhiv, knjiga XX, sveska 7, str. 237—250, Zagreb 1950.
21. Pavlinić P. — Karakul uzgoj u Čunskome (u rukopisu).
22. Обрачевић Џ. — Prilog poznavanju razvitka montafonske i simentalske teladi. Zavod za živinogojstvo Poljoprivredno-šumarskog fakulteta Univerziteta u Zagrebu, svezak I, br. 1, Zagreb 1939.
23. Јоветић Р. — Прилог проучавања оптималног омера полова при вештачком узгоју фазана. Годишњак Института за научна истраживања у ловству за 1956 годину, књига III, Београд 1957.

EINE FUNKTION DIE SICH AN WACHSTUMSDATEN GUT ANPASST

Doc. M. Radonjić

Nach kurzem Auseinanderlegen des Wachstumsbegriffes, führt der Autor eine neue Funktion (1) an, die sich gut an Wachstumsdaten anpassen lässt.

Im zweiten Abschnitt (B) wird gezeigt, wie die Funktion (1) erhalten wird.

Im dritten Abschnitt (C) wurde die analytische Verifikation von Funktion (1) sowie von Funktion (5) und (6), mit deren Hilfe man zu Funktion (1) gelangt, durchgeführt.

Im vierten Abschnitt (D) zeigt der Autor die Berechnung der Parameter von Funktion (1).

Im fünften Abschnitt (E) hebt der Autor jene wichtige Eigenschaft seiner Funktion (1) hervor, derzufolge bei Anwendung dieser Funktion auf Wachstumswerte drei Parameter (b, c, d) unmittelbar eliminiert werden können, wodurch die praktische Bedeutung der Funktion erhöht wird und ihr der Vorzug vor den übrigen Wachstumsfunktionen mit gleicher Parameteranzahl zukommt.

Im sechsten Abschnitt (F) gibt der Autor Resultate die er bei Anwendung der Funktion (1) zur Veranschaulichung der Abhängigkeit verschiedener Wachstumselemente u. des Alters erhielt. Zuerst wird die Abhängigkeit von mittlerer Bestandeshöhe und Bestandesalter vorgeführt, nach den Angaben aus Guttenbergs (3) Ertragstabellen für Tirolerfichte I. und V. Bonität (Tafel 1, 2 und Abb. 3, 4). Hernach geht der Autor über auf Anwendung seiner Funktion (1) zur Veranschaulichung der Abhängigkeit von Rumpflänge und Alter (Taf. 3 und Abb. 5), Gewicht und Alter (Taf. 4 u. Abb. 6) bei Lämmern der Šarplanina-Rasse nach Angaben von M. Taškovski (19). Desgleichen zur Veranschaulichung der Abhängigkeit von Gewicht und Alter von Karakullämmern des Zuchtstammes in Čunski (Insel Mali Lošinj, Taf. 5, Abb. 7) und in Stančić (Taf. 6, Abb. 8) nach Angaben von P. Pavlinić (20, 21). Hernach wird die genannte Funktion (1) angewandt um die Abhängigkeit zwischen Widerristhöhe und Alter bei Mischlingskalbinnen nach Angaben von Obračević (22) zu zeigen (Taf. 7, Abb. 9) und schliesslich zwischen Gewicht und Alter von Fasanenküken nach Angaben von R. Jovetić (23, Taf. 8, Abb. 10).

Auf Grund der erhaltenen Resultate kommt der Autor zum Schlusse, dass die Funktion (1) sich empirischen Daten gut anpasse, sogar schon vor Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate.