

## МОДИФИКАЦИЈА MITSCHERLICH-ОВЕ ФУНКЦИЈЕ РАСТЕЊА

Милорад Радоњић

### А) УВОД

Mitscherlich [1, 2, 3] је 1919 године извео функцију

$$y = y_{max} (1 - e^{-ex})^n \quad (1)$$

која је у земљоделству позната под именом „Закон о приносу од Mitscherlich-а”, а у шумарству као „Mitscherlich-ов закон растења”. О овој функцији је много писано. Првобитна намена јој је била за одређивање жетвеног приноса а затим за одређивање тока прираста. Позната је као функција која добро одговара захтевима који се постављају за једну функцију растења, мада не сасвим без приговора. Осетљива је и добро се прилагођава тренду растења. За примену може да се напише у облику

$$y = a (1 - e^{-bx})^c \quad (2)$$

Циљ овога рада је да покаже како се извесном модификацијом функције (2) може знатно да повиси њена способност прилагођавања тренду растења.

Модификација би се практички састојала у томе што се у функцији (2) смени  $x$  са  $\sqrt{x}$ , тако да функција добија облик

$$y = a (1 - e^{-b\sqrt{x}})^c \quad (3)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  означавају параметре,  $x$  време а  $y$  износ посматраног елемента растења.

Јасно је да услед ове замене новодобијена функција (3) није престала да задовољава све оне услове растења које је задовољавала функција (2). Отуд и функција (3) долази у обзир као функција растења. Остаје само да се на конкретним примерима покаже да новодобијена функција (3) при примени на емпиричке низове података растења даје боље резултате него функција (2).

### В) ИЗРАЧУНАВАЊЕ ПАРАМЕТАРА ФУНКЦИЈЕ (3)

Да би се функција (3) применила на неке податке растења потребно је претходно одредити одговарајуће вредности њених параметара, тако да се функција што је више могуће прилагоди тренду растења. Вредности, пак,

параметара једне функције, при којима се она најбоље прилагођава тренду растења, одређују се, према нивоу наших садашњих знања, најсавршеније помоћу методе најмањих квадрата.

Пошто функција (3) није линеарна у односу на своје параметре, то да би се применила метода најмањих квадрата за одређивање највероватнијих вредности тих параметара, мора се приступити познатом начину развијања функције у Таулог-ов ред за функције више независно променљивих. За ово је, пак, потребно претходно одредити приближне вредности параметара  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$ , да би се затим помоћу њих израчунале њихове највероватније вредности  $a$ ,  $b$ , и  $c$ .

### 1) Израчунавање приближних вредности параметара функције (3)

Пошто функција (3) има три параметра  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , то је за одређивање њихових приближних вредности потребно изабрати три координатна пара  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ , карактеристична за ток растења, па вредности тих координатних парова редом уврстити на место текућих координата  $(x, y)$  у функцији (3). Тако ће се добити следећи систем једначина

$$\begin{aligned} y_3 &= a(1 - e^{-b\sqrt{x_3}})c \\ y_2 &= a(1 - e^{-b\sqrt{x_2}})c \\ y_1 &= a(1 - e^{-b\sqrt{x_1}})c \end{aligned} \quad (4)$$

Из система (4) елиминацијом параметра  $a$ , добија се нижи систем

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 - e^{-b\sqrt{x_3}}}{1 - e^{-b\sqrt{x_1}}} \right)^c &= \frac{y_3}{y_1} \\ \left( \frac{1 - e^{-b\sqrt{x_2}}}{1 - e^{-b\sqrt{x_1}}} \right)^c &= \frac{y_2}{y_1} \end{aligned} \quad (5)$$

одакле логаритмовањем

$$\begin{aligned} c[\log(1 - e^{-b\sqrt{x_3}}) - \log(1 - e^{-b\sqrt{x_1}})] &= \log y_3 - \log y_1, \\ c[\log(1 - e^{-b\sqrt{x_2}}) - \log(1 - e^{-b\sqrt{x_1}})] &= \log y_2 - \log y_1 \end{aligned} \quad (6)$$

Кад се из система (6) елиминише параметар  $c$  и изврши потребно свођење, добиће се једначина

$$\log(1 - e^{-b\sqrt{x_3}}) + (k - 1) \log(1 - e^{-b\sqrt{x_1}}) - k \log(1 - e^{-b\sqrt{x_2}}) = 0 \quad (7)$$

где је  $K$  константна вредност за један дати низ података растења и има вредност

$$K = \frac{\log y_3 - \log y_1}{\log y_2 - \log y_1} \quad (8)$$

Једначина (7) може да се напише у облику

$$\log(1 - \sqrt{-b\sqrt{x_1} \log e}) + (K-1) \log(1 - \sqrt{-b\sqrt{x_1} \log e}) - K \log(1 - \sqrt{-b\sqrt{x_2} \log e}) = 0 \quad (9)$$

и у њој се налази још само један параметар  $b$ .

Из једначине (9) се одређује приближна вредност параметра  $b$  по методи постепеног приближавања, са тачношћу која се жели. Кад је тај посао завршен, из система једначина (6) се израчунава параметар  $c$ , и најзад параметар  $a$  из система (4). Тако би биле израчунате приближне вредности параметара функције (3).

### II) Израчунавање највероватнијих вредности параметара функције (3)

Кад су већ одређене приближне вредности параметара  $a_0, b_0, c_0$ , онда се највероватније вредности тих параметара  $a, b, c$ , добијају по познатом поступку из једначина

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \alpha \\ b &= b_0 + \beta \\ c &= c_0 + \gamma \end{aligned} \quad (10)$$

Приближне вредности величина  $\alpha, \beta, \gamma$ , тзв. поправки, налазе се решењем система нормалних једначина:

$$\begin{aligned} [AA] \alpha + [AB] \beta + [AC] \gamma &= [AH], \\ [AB] \alpha + [BB] \beta + [BC] \gamma &= [BH], \\ [AC] \alpha + [BC] \beta + [CC] \gamma &= [CH], \end{aligned} \quad (11)$$

које се добијају из линеарних једначина отступања уз услов да је збир квадрата отступања минимум.

Коефицијенти нормалних једначина (11) рачунају се по обрасцима

$$\begin{aligned} [AA] &= A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_t^2 \\ [AB] &= A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_t B_t \\ [AC] &= A_1 C_1 + A_2 C_2 + \dots + A_t C_t \\ [AH] &= A_1 H_1 + A_2 H_2 + \dots + A_t H_t \\ [BB] &= B_1^2 + B_2^2 + \dots + B_t^2 \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned} \quad (12)$$

Коефицијенти линеарних једначина отступања  $A_i, B_i, C_i$  налазе се као вредности делимичних извода функције (3) узетих по појединим од њених па-

раметара  $a$ ,  $b$ , и  $c$  с тим да се у њима параметри замене са својим приближним вредностима. Ако се послужимо уобичајеним начином обележавања имаћемо за те коефицијенте изразе:

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\partial f}{\partial a_0} = \left(1 - e^{-b_0 \sqrt{x_i}}\right)^{c_0} \\ B_i &= \frac{\partial f}{\partial b_0} = a_0 c_0 A_i \sqrt{x_i} \cdot \frac{1}{e^{b_0 \sqrt{x_i}} - 1} \\ C_i &= \frac{\partial f}{\partial c_0} = a_0 \cdot \frac{1}{M} \cdot A_i \log \left(1 - e^{-b_0 \sqrt{x_i}}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

док коефицијент  $H_i$  има вредност

$$H_i = h_i - y_i, \quad (14)$$

где су:

$x_i$  - апсцисе

$h_i$  - ординате тачака емпиричке криве

$y_i$  - ординате тачака теориске криве

$$\frac{1}{M} = 2,302 \ 5851 \dots$$

### С) РЕЗУЛТАТИ ПРИМЕНЕ НА НЕКЕ КОНКРЕТНЕ ПОДАТКЕ РАСТЕЊА

Сада ћемо изнети резултате које смо добили када смо функцију (3) применили за претставу везе између старости и средње састојинске висине. Да би се лакше уочио степен ваљаности функције (3) за претставу везе између елемената растења и ради боље прегледности једновремено смо на исте податке применили још и неке друге познате функције растења са три параметра. Тако смо истовремено применили следеће функције:

$$y = a(1 - e^{-b\sqrt{x}})^c \quad (3)$$

$$y = a(1 - e^{-bx})^c \quad (15)$$

$$y = a e^{-\frac{b}{x^d}} \quad (16)$$

$$y = a \left(\frac{x}{x+b}\right)^c \quad (17)$$

$$y = a \frac{x^d}{x^d + b} \quad (18)$$

$$y = \frac{x^2}{ax^2 + bx + c} \quad (19)$$

Функцију (15) предложио је Mitscherlich [1, 2, 3], функцију (16) Михајлов [4], функцију (17) Levaković [5], а функције (18) и (19) предложио је Hossfeld [7].



Податке смо узели из Guttenberg-ових таблица прихода [8] који се односе на ток растења средње састојинске висине Тиролске смрче свих пет бонитета. Ти су подаци овде приказани у табели 1. У првом ступцу те табеле дате су старости састојина и то од деценија до деценија, од 10 до 150 година, а у осталим ступцима одговарајуће средње састојинске висине према бонитетима. Износи ових висина изравнати су графички и окуларно од стране аутора таблица. У последњем ступцу табеле 1 налазе се износи аритметичких средина података свих пет напред наведених бонитета.

Табела 1 — Tabelle 1

СТАРОСТИ И СРЕДЊЕ ВИСИНЕ САСТОЈИНА  
(Ексерпт из Guttenberg-ових таблица прихода за смрчу)

Alter und mittlere Bestandeshöhen  
(Excerpt aus Guttenbergs Ertragstafeln für Fichte)

Старост Alter	Висине у dm за бонитете Höhen in dm für die Bonitäten					Аритметичка сред. Aritmetisches Mittel
	I	II	III	IV	V	
10	14	11	9	7	3	8,8
20	53	41	32	24	13	32,6
30	100	78	61	45	28	62,4
40	147	116	92	68	44	93,4
50	190	153	123	91	61	123,6
60	228	186	150	112	77	150,6
70	260	215	174	132	92	174,6
80	287	240	195	149	106	195,4
90	310	261	213	165	119	213,6
100	329	279	229	180	131	229,6
110	345	294	243	194	142	243,6
120	358	307	256	207	152	256,0
130	370	319	268	219	161	267,4
140	381	330	279	230	169	277,8
150	391	340	289	240	177	287,4

Као први пример узели смо податке из другог ступца табеле 1, који се односе на ток растења средње састојинске висине Тиролске смрче I бонитета. При израчунавању приближних вредности параметара пошли смо код свих напред поменутих функција од координатних парова апсциса

$$x_1 = 20, x_2 = 80, x_3 = 140$$

и одговарајућих ордината из табеле 1. Уношењем појединих вредности ових координатних парова на место текућих координата  $x$  и  $y$  у сваку од горњих функција и решавањем добијених једначина израчунате су приближне вредности параметара које су сложене у табели 2.

Табела 2 — Tabelle 2

ПРИБЛИЖНЕ ВРЕДНОСТИ ПАРАМЕТАРА  
 Беза старости и средњих висина састојина  
 (Подаци из Guttenberg-ових таблица прихода I бонитета за Тиролску смрчу)

Annähernde Parameter  
 Verbundenheit von Alter und Mittelhöhen des Bestandes  
 ((Angaben aus Guttenbergs Ertragstafeln für Fichte in Tirol I Bonität)

Функције Funktionen	Приближне вредности параметара — Annähernde Parameter			
	a	b	c	d
(3)	456,7612	0,319602	7,868094	—
(15)	418,4937	0,0220253	2,002274	—
(16)	624,7800	29,287482	—	0,825883
(17)	567,7457	9,209545	6,260855	—
(18)	467,7995	1812,136	—	1,817505
(19)				

Помоћу ових приближних вредности параметара израчунали смо највероватније вредности и сложили их у табели 3.

Табела 3 — Tabelle 3

НАЈВЕРОВАТНИЈЕ ВРЕДНОСТИ ПАРАМЕТАРА

Беза старости и средњих висина састојина

(Подаци из Guttenberg-ових таблица прихода I бонитета за Тиролску смрчу)

Wahrscheinlichste Werte der Parameter  
 Verbundenheit von Alter und Mittelhöhen des Bestandes  
 (Angaben aus Guttenbergs Ertragstafeln für Fichte in Tirol I Bonität)

Функције Funktionen	Највероватније вредности параметара Wahrscheinlichste Werte der Parameter			
	a	b	c	d
(3)	458,3149	0,318861	7,915274	—
(15)	417,0088	0,0219071	1,954830	—
(16)	628,8154	31,906314	—	0,842982
(17)	585,4220	11,4092	5,411736	—
(18)	463,3424	1914,147	—	1,837191
(19)*	0,002036844	0,038092269	6,19148565	—

Највероватније вредности параметара из табеле 3 увели смо у одговарајуће им функције и срачунали теориске износе висина за старости 10, 20, ..... 150 год. (табела 4).

\*) Износе ових параметара узели смо из рада М. Радоњића (10).

Табела 4 — Tabelle 4  
**СТАРОСТ И СРАЧУНАТЕ СРЕДЊЕ ВИСИНЕ САСТОЈИНА**  
 (Подаци из Guttenberg-ових таблица прихода I бонитета за Тиролску смрчу)

Alter und errechnete mittlere Bestandeshöhen  
 (Angaben aus Guttenbergs Ertragstafeln für Fichte in Tirol I Bonität)

Старост Alter	Срачунате висине у dm — Errechnete Höhen in dm					
	(3)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)
10	12,63	17,37	6,45	9,50	16,06	14,76
20	52,11	55,00	48,93	50,90	52,69	51,49
30	100,64	100,00	102,48	102,30	98,58	98,17
40	148,06	145,56	151,46	150,60	145,65	145,80
50	190,73	188,16	193,33	192,50	189,31	189,56
60	227,79	226,23	228,70	228,20	227,62	227,71
70	259,46	259,29	258,70	258,60	260,28	260,11
80	286,36	287,44	284,36	284,50	287,71	287,32
90	309,16	311,07	306,51	306,90	310,62	310,13
100	328,51	330,72	325,80	326,20	329,75	329,28
110	344,97	346,92	342,76	343,20	345,76	345,44
120	359,00	360,21	357,80	358,10	359,23	359,16
130	371,01	371,07	371,21	371,30	370,62	370,89
140	381,33	379,90	383,25	383,10	380,31	380,98
150	390,22	387,06	394,13	393,70	388,57	389,72

Из мерених и срачунатих висина образовали смо разлике (отступања) и сложили их у табели 5.

Табела 5 — Tabelle 5

**ОТСТУПАЊА ПОЈЕДИНИХ ОПАЖАЊА**  
 Веза старости и средњих висина састојина

(Подаци из Guttenberg-ових таблица прихода I бонитета за Тиролску смрчу)

Abweichungen der einzelnen Beobachtungen  
 Verbundenheit von Alter und Mittelhöhen des Bestandes  
 (Angaben aus Guttenbergs Ertragstafeln für Fichte in Tirol I Bonität)

Старост Alter	Отступања резултата функција Abweichungen der Resultate der Funktionen					
	(3)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)
10	+1,37	-3,37	+7,55	-4,50	-2,06	-0,78
20	+0,89	-2,00	+4,07	-2,10	+0,31	+1,51
30	-0,64	-0,01	-2,48	+2,30	+1,42	+1,83
40	-1,06	+1,44	-4,46	+3,60	+1,35	+1,20
50	-0,73	+1,84	-3,33	+2,50	+0,69	+0,44
60	+0,21	+1,77	-0,70	+0,20	+0,38	+0,29
70	+0,54	+0,71	+1,30	-1,40	-0,28	-0,11
80	+0,64	-0,44	+2,64	-2,50	-0,71	-0,32
90	+0,84	-1,07	+3,49	-3,10	-0,62	-0,13
100	+0,49	-1,72	+3,20	-2,80	-0,75	-0,28
110	+0,03	-1,92	+2,22	-1,80	-0,76	-0,44
120	-1,00	-2,21	+0,20	+0,10	-1,23	-1,16
130	-1,01	-1,07	-1,21	+1,30	-0,62	-0,89
140	-0,33	+1,10	-2,25	+2,10	+0,69	+0,02
150	+0,78	+3,94	-3,13	+2,70	+2,43	+1,28
[56]	9,16	55,18	163,61	91,50	19,21	12,10
$\sigma$	$\pm 0,87$	$\pm 2,14$	$\pm 3,69$	$\pm 2,76$	$\pm 1,27$	$\pm 1,00$



Најзад смо срачунали збир квадрата одступања  $[\delta\delta]$  и средња (квaдратна) одступања  $\sigma$ , по обрасцу:

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-u}} \quad (20)$$

где је  $[\delta\delta]$  сума квадрата одступања,  $n$  број једначина одступања,  $u$  број параметара и  $\sigma$  средње (квaдратно) одступање.

Резултати из табеле 5 јасно показују да се функција (3) боље прилагодила употребљеним подацима растења од свих других горе употребљених функција растења.

Да би смо проверили добијене резултате, узели смо затим као други пример из исте табеле 1 податке за Тиролску смрчу V бонитета. Радећи на исти начин као у претходном примеру и полазећи од координатних парова апсциса

$$x_1 = 20, x_2 = 80, x_3 = 140$$

и одговарајућих ордината према табели 1, нашли смо приближне вредности параметара и сложили их у табели 6.

Табела 6 — Tabelle 6

## ПРИБЛИЖНЕ ВРЕДНОСТИ ПАРАМЕТАРА

Веза старости и средњих висина састојина

(Подаци из Guttenberg-ових таблица прихода V бонитета за Тиролску смрчу)

Annähernde Parameter

Verbundenheit von Alter und Mittelhöhen des Bestandes

(Angaben aus Guttenbergs Ertragstafeln für Fichte in Tirol V Bonität)

Функције Funktionen	Приближне вредности параметара — Annähernde Parameter			
	a	b	c	d
(3)	265,9154	0,233605	6,961746	—
(15)	217,2671	0,0157564	2,152703	—
(16)	581,3767	21,433818	—	0,5774384
(17)	362,6853	39,793070	3,043048	—
(18)	248,5306	4999,388	—	1,876062
(19)				

Помоћу ових приближних вредности из табеле 6 израчунали смо највероватније вредности параметара и сложили их у табели 7.

Табела 7 — Tabelle 7

## НАЈВЕРОВАТНИЈЕ ВРЕДНОСТИ ПАРАМЕТАРА

Веза старости и средњих висина састојина

(Подаци из Guttenberg-ових таблица прихода V бонитета за Тиролску смрчу)

Wahrscheinlichste Werte der Parameter

Verbundenheit von Alter und Mittelhöhen des Bestandes

(Angaben aus Guttenbergs Ertragstafeln für Fichte in Tirol V Bonität)

Функције Funktionen	Највероватније вредности параметара Wahrscheinlichste Werte der Parameter			
	a	b	c	d
(3)	268,8001	0,229830	6,784280	—
(15)	222,8222	0,0146138	1,995881	—



(16)	519,9043	24,63327	—	0,6253455
(17)	362,6853	39,79307	3,043048	—
(18)	259,1736	3432,458	—	1,774787
(19)	0,003475580	0,164675772	24,7483851	—

Највероватније вредности параметара из табеле 7 увели смо у одговарајуће им функције и срачунали теориске износе висина за старости 10, 20, 30, . . . . , 150 година и сложили их у табели 8.

Табела 8 — Tabelle 8

СТАРОСТ И СРАЧУНАТЕ СРЕДЊЕ ВИСИНЕ САСТОЈИНА

(Подаци из Guttenberg-ових таблица прихода V бонитета за Тиролску смрчу)

Alter und errechnete mittlere Bestandeshöhen  
(Angaben aus Guttenbergs Ertragstafeln für Fichte in Tirol V Bonität)

Старост Alter	Срачунате висине у dm — Errechnete Höhen in dm					
	(3)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)
10	3,04	4,15	—	2,74	4,42	3,74
20	13,32	14,39	11,82	12,94	14,52	13,59
30	27,87	28,19	27,59	27,75	28,16	27,43
40	44,15	43,81	44,73	44,32	43,75	43,36
50	60,73	60,05	61,57	61,03	60,08	59,99
60	76,80	76,14	77,49	77,08	76,28	76,37
70	91,99	91,57	92,30	92,15	91,79	91,92
80	106,12	106,05	106,01	106,12	106,27	106,37
90	119,15	119,41	118,68	118,99	119,57	119,61
100	131,09	131,60	130,40	130,82	131,67	131,63
110	141,99	142,60	141,27	141,69	142,59	142,49
120	151,93	152,46	151,36	151,68	152,40	152,29
130	160,99	161,25	160,76	160,88	161,19	161,12
140	169,24	169,04	169,53	169,36	169,07	169,08
150	176,75	175,92	177,75	177,20	176,13	176,26

Из мерених и срачунатих висина образовали смо разлике (отступања) и сложили их у табели 9.

Најзад смо срачунали збир квадрата отступања  $[\delta\delta]$  и средње отступање  $\sigma$  по обрасцу (20).

Резултати из табеле 9 потврђују ранији налаз да се функција (3) боље прилагођује подацима растења него функције (15), (16), (17), (18), и (19).

Ради даљег проверавања добијених резултата узели смо да испитамо погодност свих напред наведених функција за претставу везе старости и висина користећи се подацима из последњег ступца табеле 1. Ти су подаци добијени као аритметичка средина података свих пет претходних бонитета.

Поступајући у свему на исти начин као у претходним примерима, пошли смо од координатних парова апсциса

$$x_1 = 20, x_2 = 80, x_3 = 140$$

и њима одговарајућих ордината према табели 1, израчунали смо приближне вредности параметара и сложили их у табели 10.

Табела 9 — Tabelle 9

ОТСТУПАЊА ПОЈЕДИНИХ ОПАЖАЊА  
Веза старости и средњих висина састојина

(Подаци из Guttenberg-ових таблица прихода V бонитета за Тиролску смрчу)

Abweichungen der einzelnen Beobachtungen  
Verbundenheit von Alter und Mittelhöhen des Bestandes  
(Angaben aus Guttenbergs Ertragstafeln für Fichte in Tirol V Bonität)

Старост Alter	Отступања резултата функција — Abweichungen der Resultate der Funktionen					
	(3)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)
10	-0,04	-1,15	—	-0,26	-1,42	-0,74
20	-0,32	-1,39	+1,18	-0,06	-1,52	-0,59
30	+0,13	-0,19	+0,41	-0,25	-0,16	+0,57
40	-0,15	+0,19	-0,73	+0,32	+0,25	+0,64
50	+0,27	+0,95	-0,57	+0,03	+0,92	+1,01
60	+0,20	+0,86	-0,49	+0,08	+0,72	+0,63
70	+0,01	+0,43	-0,30	+0,15	+0,21	+0,08
80	-0,12	-0,05	-0,01	+0,12	-0,27	-0,37
90	-0,15	-0,41	+0,32	-0,01	-0,57	-0,61
100	-0,09	-0,60	+0,60	-0,18	-0,67	-0,63
110	+0,01	-0,60	+0,73	-0,31	-0,59	-0,49
120	+0,07	-0,46	+0,64	-0,32	-0,40	-0,29
130	+0,01	-0,25	+0,24	-0,12	-0,19	-0,12
140	-0,24	-0,04	-0,53	+0,36	-0,07	-0,08
150	+0,25	+1,08	-0,75	+0,20	+0,87	+0,74
[ $\delta\delta$ ]	0,43	7,57	5,07	0,70	7,97	4,84
$\sigma$	$\pm 0,19$	$\pm 0,79$	$\pm 0,70$	$\pm 0,24$	$\pm 0,82$	$\pm 0,64$

Табела 10 — Tabelle 10

ПРИБЛИЖНЕ ВРЕДНОСТИ ПАРАМЕТАРА

Веза старости и средњих висина састојина  
(Аритметичка средина података свих пет бонитета из Guttenberg-ових таблица прихода за Тиролску смрчу)

Annähernde Parameter  
Verbundenheit von Alter und Mittelhöhen des Bestandes  
(Arithmetisches Mittel der Angaben aller fünf Bonitäten aus Guttenbergs Ertragstafeln für Fichte in Tirol)

Функције Funktionen	Приближне вредности параметара — Annähernde Parameter			
	a	b	c	d
(3)	367,9983	0,272293	6,908546	—
(16)	323,2287	0,0185601	1,959259	—
(16)	574,2860	23,780750	—	0,705997
(17)	473,1307	23,17092	3,476655	—
(18)	370,3958	2057,134	—	1,766159
(19)				

Помоћу ових приближних вредности из табеле 10 израчунали смо највероватније вредности параметара и сложили их у табели 11.

Табела 11— Tabelle 11

НАЈВЕРОВАТНИЈЕ ВРЕДНОСТИ ПАРАМЕТАРА  
 Беза старости и средњих висина састојина  
 (Аритметичка средина података свих пет бонитета из Guttenberg-ових таблица  
 прихода за Тиролску смрчу)

Wahrscheinlichste Werte der Parameter  
 Verbundenheit von Alter und Mittelhöhen des Bestandes  
 (Arithmetisches Mittel der Angaben aller fünf Bonitäten aus Guttenbergs  
 Ertragstafeln für Fichte in Tirol)

Функције Funktionen	Највероватније вредности параметара Wahrscheinlichste Werte der Parameter			
	a	b	c	d
(3)	368,9520	0,271279	6,891401	—
(15)	324,2478	0,0179885	1,871571	—
(16)	586,3893	24,768790	—	0,7095265
(17)	479,3610	23,61321	3,488125	—
(18)	372,1056	1780,388	—	1,733485
(19)	0,002445342	0,093044396	9,6467064	—

Највероватније вредности параметара из табеле 11 увели смо у одговарајуће им функције и срачунали теориске износе висина за старости 10, 20, . . . . ., 150 година и сложили их у табели 12.

Табела 12 — Tabelle 12

СТАРОСТ И СРАЧУНАТЕ СРЕДЊЕ ВИСИНЕ САСТОЈИНА  
 (Аритметичка средина података свих пет бонитета из Guttenberg-ових  
 таблица прихода за Тиролску смрчу)

Alter und errechnete mittlere Bestandeshöhen  
 (Arithmetisches Mittel der Angaben aller fünf Bonitäten aus Guttenbergs  
 Ertragstafeln für Fichte in Tirol)

Старост Alter	Срачунате висине у dm — Errechnete Höhen in dm					
	(3)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)
10	8,23	11,08	4,66	6,98	10,98	9,24
20	32,44	34,52	30,49	31,60	34,17	32,04
30	62,93	63,10	63,85	63,26	63,10	61,48
40	94,07	92,98	96,16	95,03	93,63	92,59
50	123,44	122,01	125,30	124,37	123,21	122,48
60	150,12	149,06	151,11	150,64	150,49	149,80
70	173,93	173,57	173,90	173,91	174,91	174,12
80	194,99	195,37	194,09	194,47	196,42	195,48
90	213,53	214,50	212,09	212,67	215,19	214,13
100	229,71	231,12	228,21	228,84	231,48	230,39
110	244,16	245,44	242,73	243,26	245,62	244,59
120	256,78	257,71	255,89	256,18	257,89	257,03
130	267,90	268,18	267,88	267,81	268,57	267,96
140	277,72	277,07	278,85	278,32	277,89	277,61
150	286,41	284,60	288,93	287,87	286,06	286,17

Из мерених и срачунатих висина образовали смо разлике (отступања) и сложили их у табели 13.



Табела 13— Tabelle 13

ОТСТУПАЊА ПОЈЕДИНИХ ОПАЖАЊА  
 Веза старости и средњих висина састојина  
 (Аритметичка средина података свих пет бонитета из Guttenberg-ових таблица  
 прихода за Тиролску смрчу)  
 Abweichungen der einzelnen Beobachtungen  
 Verbundenheit von Alter und Mittelhöhen des Bestandes  
 (Arithmetisches Mittel der Angaben aller fünf Bonitäten aus Guttenbergs  
 Ertragsstafeln für Fichte in Tirol)

Старост Alter	Отступања резултата функција Abweichungen der Resultate der Funktionen					
	(3)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)
10	+0,57	-2,28	+4,14	+1,82	-2,18	-0,44
20	+0,16	-1,92	+2,11	+1,00	-1,57	+0,56
30	-0,53	-0,70	-1,45	-0,086	-0,70	+0,92
40	-0,67	+0,42	-2,76	-1,63	-0,23	+0,81
50	+0,16	+1,59	-1,70	-0,77	+0,39	+1,12
60	+0,48	+1,54	-0,51	-0,04	+0,11	+0,80
70	+0,67	+1,03	+0,70	+0,69	-0,31	+0,48
80	+0,41	+0,03	+1,31	+0,93	-1,02	-0,08
90	+0,07	-0,90	+1,51	+0,93	-1,59	-0,53
100	-0,11	-1,52	+1,39	+0,76	-1,88	-0,79
110	-0,56	-1,84	+0,87	+0,34	-2,02	-0,99
120	-0,78	-1,71	+0,11	-0,18	-1,89	-1,03
130	-0,50	-0,78	-0,48	-0,41	-1,17	-0,56
140	+0,08	+0,73	-1,05	-0,52	-0,09	+0,19
150	+0,99	+2,80	-1,53	-0,47	+1,34	+1,23
[88]	4,13	33,97	45,31	11,87	25,95	8,97
$\sigma$	$\pm 0,59$	$\pm 1,68$	$\pm 1,94$	$\pm 0,99$	$\pm 1,47$	$\pm 0,86$

Резултати табеле 13 опет показују да функција (3) даје мање средње отступање од свих осталих функција које су заједно са њом примењене на исте податке растења.

При рачунању највероватнијих вредности параметара функција (15), (16), (17), и (18) користили смо се приближним вредностима тих параметара које је нашао Тодоровић [9].

#### ЗАКЉУЧАК

На основу предњих излагања и резултата добијених по употреби највероватнијих вредности параметара функција израчунатих по методи најмањих квадрата, могу се извући следећи закључци:

1) Модификацијом Mitscherlich-ове функције (15) добија се функција (3), која од ње има већу способност прилагођавања тренду растења.

2) Резултати табела 5, 9 и 13 показују да функција (3) даје мање средње отступање од свих функција са три параметра, које су са њом једновремено примењене на исте податке растења, иако су неке од њих познате као добре функције растења.

3) Из резултата табела 4, 5, 8, 9, 12 и 13 види се да се новодобијена функција (3) изванредно добро прилагођава употребљеним подацима растења и да даје износе посматраних елемената растења који се у највише могућој мери приближавају конкретним емпиричким износима, што показује њену велику еластичност.



## ЛИТЕРАТУРА

- 1) Mitscherlich A., Das Gesetz des Pflanzenwachstums, Landwirtschaftliche, Jahrbücher Bd. 53, S. 167, 1919.
- 2) Mitscherlich A., Ein Beitrag zum Gesetze des Pflanzenwachstums, Fühlings Landwirtschaftliche Zeitung 1919, S. 130—133.
- 3) Mitscherlich A., Zum Gesetze des Pflanzenwachstums, Fühlings Landwirtschaftliche Zeitung 1919, S. 419.
- 4) Михајлов И., Математичко формулирање на законот за растењето на шумските дрва и насади. Годишен зборник на Земјоделско-шумарскиот факултет, књига I, стр. 3—70, Скопје 1949.
- 5) Levaković A.: Analitički oblik zakona rasteња. Glasnik za šumske pokuse, knjiga 4, str. 189—253, Zagreb 1935.
- 6) Levaković A.: O izgledima i mogućnostima numeričkog bonitiranja stojbina. Glasnik za šumske pokuse, knjiga 6, str. 319—361, Zagreb 1938.
- 7) Hossfeld J. W.: Mathematik für Forstmänner, Ökonomen und Cameralisten. Gotha 1822, 4 Bd., S. 310.
- 8) Guttenberg A.: Wachstum und Ertrag der Fichte im Hochgebirge. Wien und Leipzig 1915.
- 9) Тодоровић Д.: Аналитичка претстава растења. Годишен зборник на Земјоделско-шумарскиот факултет, књига VI—VII, Скопје 1955.
- 10) Радоњић М.: О једној Hossfeld-овој функцији растења. Годишен зборник на Земјоделско-шумарскиот факултет, књига XII, Скопје 1959.

## ZUSAMMENFASSUNG

## EINE MODIFIKATION VON MITSCHERLICH'S WACHSTUMSFUNKTION

Milorad Radonjić

Der Autor zeigt in vorliegender Arbeit, dass sich Mitscherlich's Funktion (15) durch Ersetzung der Veränderlichen  $x$  mit  $\sqrt{x}$ , also

$$y = a(1 - e^{-b\sqrt{x}})^c \quad (3)$$

besser dem Wachstumstrend anpasse.

Um dies zu beweisen, wendet der Autor gleichzeitig beide Funktionen auf dieselben Wachstumswerte an. Diese entnimmt er Guttenbergs Ertragstabellen (8), die den Verlauf des Wachstums der mittleren Bestandeshöhe von tiroler Fichte aller fünf Bonitäten enthalten. (Tabelle 1).

Zwecks leichteren Vergleichs und um eine klare Vorstellung von der Brauchbarkeit der neuerhaltenen Funktion (3) zu gewinnen, wendet der Autor zugleich noch die bekannten Wachstumsfunktionen (16), (17), (18) und (19) an. Für alle Berechnungen benutzt der Autor die wahrscheinlichsten Parameterwerte, die nach der Methode der kleinsten Quadrate erhalten wurden.

Aus den so erhaltenen Resultaten, die in den Tabellen 2 bis 13 entalten sind, ist folgendes zu ersehen:

1) Die neuerhaltene Funktion (3) passt sich besser als die Funktion (15) von Mitscherlich den verwendeten Wachstumsangaben an.

2) Von allen angewendeten Funktionen gibt die Funktion (3) die kleinsten mittleren Abweichungen.

3) Die neuerhaltene Funktion (3) passt sich ausserordentlich gut den verwendeten empirischen Angaben an und zwar bedeutend besser als alle anderen Funktionen, die gleichzeitig auf die selben Wachstumsdaten angewendet wurden.