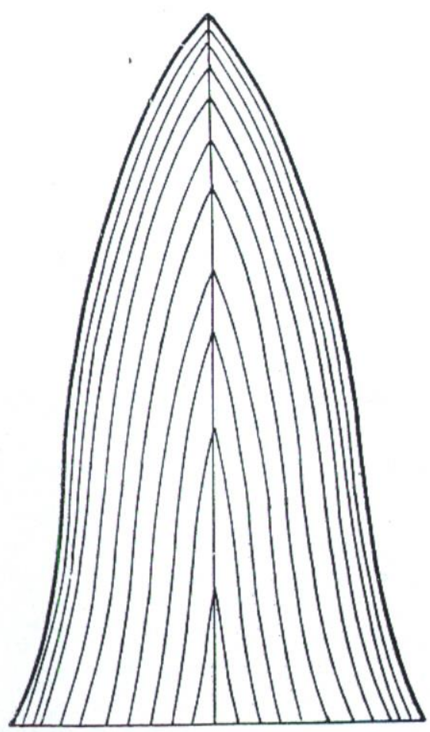
АНАЛИТИЧКИ ИЗРАЗ ДОЊЕГ ДЕЛА КРИВА СТАБЛА

Милорад Радоњић

1. УВОД

Стабло, израсло у нормално густим шумским састојинама, може се узети да има углавном мање више праву уздужну осовину, према којој је оно мање више симетрично саграђено. Уздужни пресек једног таквог стабла, који пролази кроз његову уздужну осовину, јесте симетрична слика према тој осовини.



Сл. 1

На слици 1 претстављен је уздужни пресек једног таквог стабла. Да би се јаче истакао облик стабла, на слици су његове дебљине нанесене у већој размери него одговарајуће висине. Овај пресек је симетрична слика према уздужној осовини стабла, ограничена са две криве линије. Ове криве линије, које су такође симетрично распоређене према уздужној осовини стабла, одређују облик стабла. Како су попречни пресеци оваквог једног стабла већином, мање више, округли, то се може сматрати да је стабло постало ротацијом уздужног пресека стабла око његове уздужне осовине, при чему истовремено криве стабла формирају облик стабла. Стога се стабло може сматрати углавном као ротационо тело, чије су изводнице горе поменуте криве линије стабла.

Отуда је, при изучавању облика стабла, важно изучавање облика и особина ових кривих линија стабла. Добра аналитичка дефиниција ових кривих помогла би решавању важних задатака, који су од великог интереса не само са теориске, него и са практичне тачке гледишта.

Да наведемо само један пример. Ако би крива стабла била претстављена функцијом:

$$y = f(x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

где је x висина попречног пресека стабла, а y одговарајући полупречник стабла, тада би се, применом познате формуле за израчунавање запремине ротационих тела

$$V = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 \, dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

могла лако да изведе и формула за израчунавање запремине стабла. Требало би само промењиву величину y, у формули (2), сменити њеном вредношћу из функције (1).

Приметимо, нажалост, да је поред свих напора, проблем изналажења функције која би аналитички претстављала криву линију стабла, још увек остао нерешен.

Циљ овога рада је да се допринесе решењу тога проблема.

2. ДОСАДАШЊИ ПОКУШАЈИ ДА СЕ АНАЛИТИЧКИ ПРЕТСТАВИ КРИВА СТАБЛА

Има више претпоставки које теже да објасне формирање облика стабла, па самим тим и формирање облика криве линије стабла.

Тако је Metzger претпоставио да се стабло, у процесу рашћења, изграђује по законима статике као обла греда једнаког отпора, тако, да са најмањим губитком у материјалу пружа највећи отпор дејству ветра, који тежи да га обори. По овој претпоставци Metzgera особине стабла, као обле греде, такве су да између њених пречника, узетих на разним отстојањима од нападне тачке силе ветра, постоји однос:

$$d_1^3 : d_2^3 : d_3^3 : \; . \; . \; . = l_1 : l_2 : l_3 : \; . \; . \; . \; . \; .$$

где су d_1, d_2, d_3, . . . пречници обле греде, а l_1, l_2, l_3, ... отстојања тих пречника од нападне тачке силе ветра.

У вези са горњом претпоставком Metzgera, Козицын је претпоставио да су по горњем закону изграђена само стабла без централног језгра. Стабла пак са централним језгром изграђена су по законима статике као косе греде једнаког отпора код којих између пречника, узетих на разним отстојањима од нападне тачке силе ветра, постоји однос

$$d_1^{4,5} : d_2^{4,5} : d_3^{4,5} : \; . \; . \; . = l_1 : l_2 : l_3 : \; . \; . \; .$$

Међутим, пречници, израчунати на основу горњих односа Metzgera и Козицына, у неким случајевима се поклапају са стварним пречницима стабла, али у многим случајевима се од њих знатно разликују.

По претпоставци Hohenadl-а, није притисак ветра главни фактор који утиче на формирање облика стабла, већ је то тежина стабла и круне. На основу те своје претпоставке, Hohenadl је закључио да крива стабла мора бити нека логаритамска (експоненцијална) крива, чије се опште особине могу претставити функцијом:

$$d = A\, e^{f(x)},$$

где су

A — неки сталан коефицијент, различит за разна стабла,
e — Неперов број и
$f(x)$ — нека функција од x, где је x отстојање пречника од врха стабла.

Слично је Hoer закључио, да се крива стабла може претставити функцијом

$$d : D = C \log\left[(c + l) : c\right]$$

где су

d — пречник стабла, на остојању l од врха,
D — пречник стабла у основи и
C и c неки стални коефицијенти.

Међутим, док у средњем делу стабла крива стабла личи на логаритамску криву, у најнижем и највишем делу стабла она знатно отступа од логаритамске криве*.)

Недостатак свих ових, досад наведених, претпоставки јесте њихова једностраност. У њима се није водило рачуна о свим

*) Тюрин: Таксация леса, Москва 1938

факторима који утичу на формирање облика стабла, јер се зна да поред ветра који својим рушилачком снагом тежи да обори стабло и поред тежине дрвета која тежи да згњечи стабло, на формирање облика стабла утичу и многи други спољашњи и унутрашњи фактори. Отуда и функције, изведене на основу горњих претпоставки, не претстављају у потпуности особине криве стабла онако како се те особине јављају у природи, где су оне под дејством многобројних фактора знатно сложеније.

Напомињемо да, нажалост, још нема такве претпоставке, која би обухватила све факторе који утичу на формирање облика стабла, из које би се извела функција, која би у довољној мери претстављала криву линију стабла.

Било је покушаја да се и другим путевима дође до функције криве стабла. Тако је покушавано да се полазећи од познатих функција чије криве личе на криве стабла, простим пробањем нађе она од њих, чија се крива у толикој мери приближава кривој стабла, да се са њом може идентификовати. Једна од ових је често употребљавана цела рационална функција

$$y = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + \ldots\ldots + l\,x^n + \ldots\ldots \quad (3)$$

где су:

y — полупречник стабла,

x — отстојање полупречника од основе стабла,

n — неки цео позитиван број и

$a, b, c, d, \ldots l, \ldots$ — неки стални коефицијенти.

Тако је, например, Белоновский употребио прва три члана функције (3):

$$y = a + b\,x + c\,x^2,$$

па кад није добио задовољавајуће резултате, узео је прва четири члана

$$y = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3$$

и добио нешто бољи резултат.

Слично томе, Vimmenauer је узео првих пет чланова функције (3)

$$y = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + e\,x^4.$$

Међутим, мада цела рационална функција даје приближне резултате и то у толико боље у колико се више њених почетних чланова узима, ипак она не може у довољној мери да претстави особине криве стабла, а нарочито не у њеним најнижим и највишим деловима. Слични покушаји са неким другим функцијама такође нису успели, те је тако овај проблем остао да и даље интересује шумарске стручњаке и напори за његово решење се продужују.

Било је покушаја делимичног решавања овог проблема на тај начин што се тражила функција која би претстављала само поједине делове криве стабла. Овај начин решавања јавио се нарочито у вези са израчунавањем запремине стабла, када се приметило да су поједини делови стабла обично врло слични неким ротационим телима, која постају ротацијом познатих кривих линија. При томе се узимало да је доњи део стабла сличан превршеном најлоиду, средњи део или ваљку или превршеном параболоиду или превршеној купи, а вршни део или потпуној купи или потпуном најлоиду.

На основу ове сличности сматрало се да формуле, које служе за израчунавање запремина горе наведених ротационих тела, могу да се употребе и за израчунавање запремина појединих, њима сличних, делова стабла. Као последица поменуте сличности излази да и поједини делови криве стабла морају такође бити слични одговарајућим изводницама поменутих ротационих тела. Тако би доњи део криве стабла био сличан Најловој параболи, средњи део или правој линији или кубној параболи или обичној параболи, а вршни део или правој линији или Најловој параболи.

Све ове набројане линије могу се претставити општом једначином:

$$y^2 = p\,x^r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

које све пролазе кроз координатни почетак. Константа r у овој општој једначини (т.зв. експонент облика) својом вредношћу одређује врсту и облик линије претстављене једначином (4). Тако за $r = o$, горња једначина претставља праву паралелну са апсцисном осовином; за $r = \frac{2}{3}$, кубну параболу; за $r = 1$, обичну параболу; за $r = 2$, праву која пролази кроз координатни почетак; за $r = 3$, Најлову параболу итд.

Међутим, испитујући доњи део криве стабла на буковим стаблима, постављањем кроз сваке две тачке стварне криве стабла, на отстојању 10*cm* од једне тачке до друге, криву једначине (4) и рачунајући одговарајуће вредности експонента r, дошао сам до закључка да је облик доњег дела криве стабла јако сложен и да функција која би претстављала тај део мора бити нека знатно сложенија функција, него што је то случај са функцијом (4*). То ме је побудило да сам ставио себи у задатак тражење функције која ће што боље прествављати доњи део криве стабла. Овај рад треба да покаже резултате који су постигнути у том правцу.

3. ОСНОВНИ МАТЕРИЈАЛ

Као основни материјал за овај рад послужили су подаци добијени мерењем букових стабала на огледном и школском добру Земљоделско-шумарског факултета Кара Орман, које се налази

*) Овај ранији рад отштампан је у Годишњем зборнику Земљоделско-шумарског факултета у Скопљу, књига III година 1949/50, под насловом: „Прилог изучавању облика букових стабала“.

око 25 километара северно од Охридског Језера у југо-западном делу Народне Републике Македоније.

Мерења су вршена на стаблима у дубећем, на сталној примерној површини бр. 2, а изведена су на следећи начин:

На 50 стабала у дубећем, почевши од 0,00 до 2,50 метара висине, мерени су пречници на сваких 10 cm висине. Мерења су вршена у правцу север-југ и исток-запад, са тачношћу до на милиметар. Мерена стабла су распоређена, према средњем прсном пречнику, у пет група, како то показује доле изложени табеларни преглед (табела 1) са по 10 стабала у свакој групи.

Таб бр. 1

Група	Пречници стабала на 1,30 метара
I	Од 19,0 см до 22,5 см
II	Од 24,5 см до 28,5 см
III	Од 29,5 см до 31,8 см
IV	Од 33,0 см до 35,5 см
V	Од 37,5 см до 43,0 см

Средњи пречници појединих група стабала су сређени у табели 2*).

При испитивању у овом раду употребљаване су искључиво вредности средњих пречника из табеле 2, односно узимани су одговарајући полупречници.

4. ИСПИТИВАЊЕ

Предмет овог рада јесте, као што је већ наглашено, истраживање функција које ће што тачније аналитички престављати доњи део криве стабла.

При истраживању је правоугли координатни систем постављан тако, да се апсцисна осовина система поклапала са уздужном осовином стабла и са његовом висином (слика 2), док се координатни почетак налазио у средишту основе стабла.

Да би се јаче истакао облик криве стабла, који је иначе у природи мање изразит, на слици су полупречници стабла (ординате y) нанесени у већој размери него одговарајуће висине (апсцисе x). При оваком постављању правоуглог координатног система, подаци табеле 2 садрже координате (x, y) за 26 тачака криве стабла од 0,00 до 2,50 метара висине и то засебно за сваку групу стабала.

*) Подаци о пречницима сваког појединог стабла, као и подаци о одређивању средњих пречника, налазе се у напред поменутом раду: „Прилог изучавању облика букових стабала", где су ти подаци изложени у табелама I, II, III, IV и V.

Таб. 2

Висина на којој је мерен пречник у метрима	Вредности средњих пречника појединих група стабала у см				
	Г Р У П А				
	I	II	III	IV	V
0,00	32,55	38,06	44,67	51,37	57,47
0,10	27,02	33,59	39,46	44,11	51,28
0,20	24,71	31,31	36,80	40,78	47,97
0,30	23,44	29,93	35,19	38,89	45,92
0,40	22,63	29,00	34,11	37,67	44,52
0,50	22,08	28,33	33,33	36,82	43,50
0,60	21,67	27,83	32,75	36,18	42,73
0,70	11,36	27,45	32,30	35,69	42,12
0,80	21,12	27,13	31,93	35,31	41,64
0,90	20,92	26,88	31,63	35,00	41,24
1,00	20,76	26,66	31,38	34,74	40,90
1,10	20,63	26,48	31,17	34,52	40,61
1,20	20,51	26,33	30,99	34,33	40,37
1,30	20,41	26,19	30,84	44,17	40,16
1,40	20,32	26,08	30,70	34,03	39,97
1,50	20,25	25,97	30,68	33,91	39,80
1,60	20,18	25,88	30,47	33,80	36,66
1,70	20,12	25,80	30,37	33,70	39,52
1,80	20,06	35,72	30,29	33,62	39,41
1,90	20,01	25,65	30,21	33,54	39,30
2,00	19,97	25,59	30,13	33,46	39,20
2,10	19,93	25,54	30,07	33,40	39,11
2,20	19,89	25,49	30,01	33,34	39,03
2,30	19,86	25,44	29,95	33,28	38,95
2,40	19,83	25,39	29'90	33,23	38,88
2,50	19,80	25,36	29,86	33,19	38,82

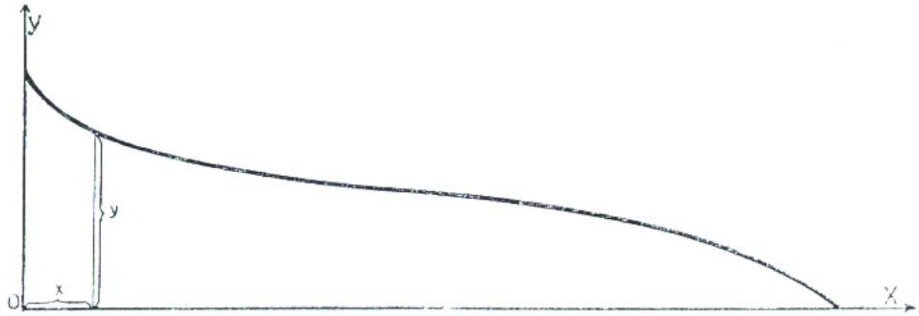
При истраживању полазило се од познатих функција, чије криве личе на криве стабла, па се затим простим пробањем тражила она од њих чија се крива што је могуће више приближава кривој стабла. Према величини отступања кривих појединих функција од криве стабла, оне су задржаване или одбациване. Тако су од великог броја испитаних функција, задржане следеће три.

$$y = \frac{a}{1 - be^{-cx}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$y = \frac{a}{3 - e^{-b\overline{x}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{1 - ae^{-b\overline{x}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

чије су се криве у највећем степену приближавале стварној кривој линији стабла. У следећем делу овога рада бавићемо се испитивањем горњих трију функција, држећи се при томе реда којим су оне горе написане.



сл. 2

А) ИСПИТИВАЊЕ ФУНКЦИЈЕ (5)

У функцији

$$y = \frac{a}{1 - be^{-cx}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

величине a, b и c су параметри, e је Неперов број, а x и y промењљиве величине.

Да би се ова функција применила на криву стабла, потребно је одредити конкретне вредности њених параметара a, b и c. Притом ћемо одређивати њихове:

а) Приближне вредности и

б) Највероватније вредности.

а) ОДРЕЂИВАЊЕ ПРИБЛИЖНИХ ВРЕДНОСТИ ПАРАМЕТАРА ФУНКЦИЈЕ (5)

С обзиром да поменута функција није линеарна у односу на параметре a, b и c, мора се применити приликом изравњавања по теорији најмањих квадрата, метода увођења приближних вредности. Да би се ове нашле треба изабрати три карактеристичне тачке са стварне криве стабла, па измерене координате тих тачака (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3) редом уврстити место текућих координата (x, y) у функцији (5). Тако ће се добити три једначине:

$$y_1 = \frac{a}{1 - be^{-cx_1}},$$

$$y_2 = \frac{a}{1 - be^{-cx_2}},$$

$$y_3 = \frac{a}{1 - b e^{-c x_3}},$$

из којих треба одредити непознате параметре a, b и c.
Кад се ове једначине напишу у облику

$$\begin{aligned} y_1 (1 - b e^{-c x_1}) &= a, \\ y_2 (1 - b e^{-c x_2}) &= a \\ y_3 (1 - b e^{-c x_3}) &= a, \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

па се изједначе по две и две од њихових левих страна, елиминисаће се параметар a и добиће се једначине

$$\begin{aligned} y_2 (1 - b e^{-c x_2}) &= y_1 (1 - b e^{-c x_1}) \\ y_3 (1 - b e^{-c x_3}) &= y_1 (1 - b e^{-c x_1}) \end{aligned}$$

у којима се налазе још само непознати параметри b и c.
Кад се последње једначине прво елементарним операцијама доведу на облик

$$\begin{aligned} b (y_1 e^{-c x_1} - y_2 e^{-c x_2}) &= y_1 - y_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9) \\ b (y_1 e^{-c x_1} - y_3 e^{-c x_3}) &= y_1 - y_3, \end{aligned}$$

па се подели прва са другом, елиминисаће се параметар b и добићемо једну једначину

$$\frac{y_1 e^{-c x_1} - y_2 e^{-c x_2}}{y_1 e^{-c x_1} - y_3 e^{-c x_3}} = \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3}$$

у којој се налази још само непознати параметар c.
Да бисмо нашли вредност параметра c, довешћемо последњу једначину на облик

$$e^{-c x_3} - \frac{(y_1 - y_3)\, y_2}{(y_1 - y_2)\, y_3} e^{-c x_2} + \frac{(y_2 - y_3)\, y_1}{(y_1 - y_2)\, y_3} e^{-c x_1} = 0$$

где кад ставимо

$$\frac{(y_1 - y_3)\, y_2}{(y_1 - y_2)\, y_3} = m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$\frac{(y_2 - y_3)\, y_1}{(y_1 - y_2)\, y_3} = n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

добићемо једначину

$$e^{-c x_3} - m e^{-c x_2} + n e^{-c x_1} = 0,$$

или

$$e^{-c x_1} \left[e^{-c (x_3 - x_1)} - m e^{-c (x_2 - x_1)} + n \right] = 0.$$

Пошто чиналац $e^{-c x_1}$ не може бити једнак нули за коначне вредности параметара c, то мора бити

$$e^{-c (x_3 - x_1)} - m e^{-c (x_2 - x_1)} + n = 0 \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Ако се сад уведе нова непозната t сменом

$$e^{-c(x_2-x_1)} = t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

услед чега ће се добити

$$e^{-c(x_3-x_1)} = t^{\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}}$$

једначина (12) добија облик

$$t^{\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}} - mt + n = 0 .$$

Ако ставимо

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

добиће се, коначно, једначина

$$t^k - mt + n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

У овој једначини су величине m, n и k познате и одређују се по обрасцима (10), (11) и (14), док је непозната само величина t, чија се вредност налази решењем једначине (15).

Једначина (15) може се решити директно или постепеним приближавањем корену једначине.

При директном решавању бирају се за x такве вредности да изложилац k постане цео број 2 или 3 или 4. Тада се једначина решава применом метода за решавање једначина односног степена. Овај начин решавања има тај недостатак што се мора водити рачуна о услову датим изразом (14). Тиме се ограничава слободан избор најкарактеристичнијих тачака, иако нам при томе остају још велике могућности за комбиновање при одабирању вредности x. Ове се могућности могу још знатно повећати с обзиром на особину једначине (15), да се њен степен може увек смањити за јединицу, кад год је изложилац k цео позитиван број.

Горње својство једначине (15) може се доказати на следећи начин: Из израза (10) и (11) јасно произилази идентитет

$$m = 1 + n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Ако коефицијент m, у једначини (15), сменимо са $1 + n$, према изразу (16), добиће се

$$t^k - (1 + n)\, t + n = 0$$

или

$$t^k - t - n(t - 1) = 0 .$$

Из ове последње једначине, која је идентична једначини (15), види се одмах да њу задовољава вредност $t = 1$, што значи да је то једно од решења једначине (15). Ово познавање једног корена