СВРЗЛИВОСТ НА ТОПКА ВО n—ДИМЕНЗИОНАЛЕН ЕВКЛИДОВ ПРОСТОР R^n

Никола С. Речковски

Постојат различни докази за тоа дека топката $S\{x \in R^n,\ d(x, x_0) \leqslant r$ е сврзливо множество. Тој факт, на пример, веднаш произлегува од следната теорема:

Теорема Секоја отворена n-димензионална топка во R^n е хомеоморфна со R^n [на пр 1, стр. 281, стр. 2].

Овде во извесна смисла ќе дадеме еден директен доказ на таа особина.

Нека (X_i, ρ_i) $(i=1, \ldots, n)$ се метрички простори. Ставајќи $\rho(x, y) = \rho[(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)] = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \rho i(x_i, yi)$,

каде што $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$, се добива метрика на Картезиевиеот производ

$$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n.$$

Лесно е да се покаже дека оваа метрика ја генерира топологијата производ во X.

Во метричниот простор (X, ρ), затворена топка $B(x^0, r)$ каде што $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^o)$ е еднаква на $B_1\ (x_1^0, r) \times B_2\ (x_2^0, r) \times, \ldots \times B\ (x_o^n, r)$, каде што $B_i\ (x_i^o, r)$ се затворени топки соодветно во (X_i, ρ_i) $1 \leqslant i \leqslant n$.

Нека сега земеме $(X_i, \rho_i)=(R^1, \rho_i)$ каде што $\rho i\ (x, y)=|x-y|$, $x,y \in R^1$. И нека $R^n = R_1 \times \ldots \times R^1$, го снабдивме со Евклидовата метрика

$$d\ (x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_j)^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Топката $S(x_0, r) = \{x \in R^n, d(x, x_0)\ r \leqslant r\}$ ќе биде еднаква со

$$\bigcup_{\substack{r_1, \ldots, r_n \geq 0}} B_1(x_1^0, r_1) \times \ldots \times B_n(x_n^o, r_n)$$

при што $\sum_1^n r_i^2 \leqslant r^2$.

Доказот е очигледен. Јасно е дека точката $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^o)$ му припаѓа на секој елемент $B_1(x_1^0, r_1) \times \ldots \times B_n(x_o^n, r_n)$ од горната унија. И како понатаму секое множество од таа унија е сврзно во Евклидовиот простор по следната теорема од општа топологија:

Теорема. Унија на сврзливи множества е сврзливо множество, ако пресекот не е празен.

Следува в сушност доказот на следната теорема.

Теорема. Секоја топка во n-димензионален Евклидов простор е сврзливо множество.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Бурбаки, общая топология топологические групи числа и связанные с ними групы и пространства. Издательство „Наука", Москва, 1969 г.

Nikola Rečkovski

CONNEXION DE LA BOULE DANS L'ESPACE EUCLIDIENNE R^n

Résumé

Dans cet article on donne une démonstration de la conexion de la boule dans l'espace euclidienne R^n.