Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. S. de Serbie
Vol. XV, 1—4 (1963), Beograd
Yougoslavie

SUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES TRANSFORMABLES EN ELLES-MÊMES PAR UN CHANGEMENT DE FONCTION

I. ŠAPKAREV, SKOPJE

Dans l'article [1] D. S. Mitrinović a démontré que l'équation différentielle de Riccati

$$\text{(a)} \qquad \frac{dy}{dx}+y^2=\frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'}+\alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2$$

vec $\theta=\theta(x)\neq\text{const}$ et $\alpha=\text{const}\neq 0$ se transforme en elle-mê me par l changement de fonction

$$y=-\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}+\alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2\frac{1}{y_1+\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}-\frac{\theta'}{\theta}},$$

où y_1 est une nouvelle fonction inconnue.

L'équation (a) a comme solutions particulières

$$y_k=-\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}+\omega_k\frac{\theta'}{\theta} \qquad (k=1,2),$$

ω_k etant les racines de l'équation en ω

$$\omega^2-\omega-\alpha=0,$$

et, sa solution générale, dans le cas où $\alpha\neq-1$, est

$$\frac{y+\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}-\omega_1\frac{\theta'}{\theta}}{y+\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}-\omega_2\frac{\theta'}{\theta}}=M\,\theta^{\omega_2-\omega_1},$$

avec M constante d'intégration.

Dans l'article [2] P. Appell a démontré que l'équation différentielle linéaire

$$\text{(b)} \qquad \frac{d^2z}{dx^2}-f(x)\,z=0,$$

par le changement de fonction et de variable indépendante,

$$z = v\sqrt{\varphi'(t)},\quad x = \varphi(t),$$

devient

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - \left[\frac{3}{4}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\varphi'''}{\varphi'} + \varphi'^2 f(\varphi)\right] v = 0,$$

où $\varphi(t) \neq \text{const.}$

Si la condition

$$f[\varphi(t)] = \frac{1}{\varphi'^2} f(t) + \frac{2\varphi'\varphi''' - 3\varphi''^2}{4\varphi'^4}, \tag{c}$$

est remplie, l'équation (b) se transforme en elle-même.

La fonction $f(t)$ la plus générale vérifiant l'équation fonctionnelle (c) est

$$f(t) = \alpha\left(\frac{B'}{B}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{B''}{B'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'},$$

avec $\alpha = \text{const}$, $B = B(t) =$ fonction de Koenigs, $\varphi(t)$ fonction satisfaisant à diverses hypothèses que nous ne reproduisons pas ici.

Dans l'article [3] D. S. Mitrinović a démontré que l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \left[\alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'}\right] z = 0,$$

avec $\alpha = \text{const} \neq 0$, $\theta = \theta(x) \neq \text{const}$, se transforme aussi en elle-même par le changement de fonction

$$z = \frac{1}{\sqrt{\theta'}}\exp\left(\alpha \int \frac{\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 dx}{\frac{z_1'}{z_1} + \frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} - \frac{\theta'}{\theta}}\right),$$

en désignant par z_1 la nouvelle fonction inconue.

En comparant le coefficient d'Appell

$$f_A(x) = \alpha\left(\frac{B'}{B}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{B''}{B'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}$$

avec celui de Mitrinović

$$f_M(x) = \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'},$$

on voit que ces deux coefficients ont la même structure: dans le coefficient $f_M(x)$, au lieu de la fonction de Koenigs, il intervient une fonction $\theta(x)$ complètement arbitraire.

Dans cet article nous allons donner, en employant la méthode de Mitrinović [1], les conditions sous lesquelles l'équation différentielle de Riccati

(1) $$y' = f(x)\,y^2 + g(x)\,y + h(x)$$

par le changement de fonction

(2) $$y = \frac{Q(x)z + R(x)}{S(x)z + T(x)} \qquad [(RS - QT)\,S \neq 0],$$

se transforme en elle-même.

L'équation (1) par le changement (2) se transforme en elle-même, si l'on a

(3) $$g(x) = \frac{Q'S - QS'}{QT - RS}\,\frac{T}{S} - \frac{Q'T - QT' + R'S - RS'}{2(QT - RS)} - \frac{Q - T}{S} f(x)$$
$$h(x) = \frac{Q'T - QT' + R'S - RS'}{QT - RS}\,\frac{Q}{2S} - \frac{Q'S - QS'}{QT - RS}\cdot\frac{R}{S} - \frac{R}{S} f(x)$$

et

(4) $$R = \frac{(Q+T)^2}{S}\left[C + \int \frac{(Q'T - QT')(T - Q)}{(Q+T)^3}\,dx\right] \quad (Q + T \neq 0,\ C = \text{const}$$

d'intégration)

ou

(5) $$Q + T = 0.$$

L'équation (1), si (3) et (4) sont remplis a comme solutions particulières

$$y_1 = \frac{Q - T + \sqrt{(Q-T)^2 + 4RS}}{2S}, \qquad y_2 = \frac{Q - T - \sqrt{(Q-T)^2 + 4RS}}{2S},$$

et, sa solution générale pour $(Q-T)^2 + 4RS \neq 0$, est

$$\frac{2Sy - (Q-T) - \sqrt{(Q-T)^2 + 4RS}}{2Sy - (Q-T) + \sqrt{(Q-T)^2 + 4RS}} = M \exp \int \frac{f}{S} \sqrt{(Q-T)^2 + 4RS}\,dx,$$

et, si (3) et (5) sont remplis ses solutions particulières sont

$$y_1 = \frac{Q + \sqrt{Q^2 + RS}}{S}, \qquad y_2 = \frac{Q - \sqrt{Q^2 + RS}}{S},$$

et la solution générale est

$$\frac{Sy - Q - \sqrt{Q^2 + RS}}{Sy - Q + \sqrt{Q^2 + RS}} = M \exp\left(2 \int \frac{f}{S} \sqrt{Q^2 + RS}\,dx\right).$$

1. Pour démontrer ceci, partons de l'équation (1), qui par le changement (2), devient

$$z' = \frac{QS' - Q'S + Q^2 f + QSg + S^2 h}{QT - RS} z^2 + \frac{QT' - Q'T + RS' - R'S + 2QRf + QTg + RSg + 2STh}{QT - RS} z$$
$$+ \frac{RT' - R'T + R^2 f + RTg + T^2 h}{QT - RS}.$$

Pour que l'équation (1), par le changement (2), se transforme en elle-même, il faut que le système suivant

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} &(RS-QT+Q^2)f+QSg+S^2h=Q'S-QS',\\ &2\,QRf+2\,RSg+2\,STh=Q'T-QT'+R'S-RS',\\ &R^2f+RTg+(T^2-QT+RS)\,h=R'T-RT', \end{aligned}$$

soit satisfait.

Étant donné que

$$D=\begin{vmatrix} RS-QT+Q^2 & QS & S^2 \\ 2\,QR & 2\,RS & 2\,ST \\ R^2 & RT & T^2-QT+RS \end{vmatrix}=0$$

et

$$D_f=\begin{vmatrix} Q'S-QS' & QS & S^2 \\ Q'T-QT'+R'S-RS' & 2\,RS & 2\,ST \\ R'T-RT' & RT & T^2-QT+RS \end{vmatrix}$$

$$=S\,(RS-QT)\,[2\,R\,(Q'S-QS')-(Q-T)\,(Q'T-QT'+R'S-RS')-2\,S\,(R'T-RT')],$$

$$D_g=\begin{vmatrix} RS-QT+Q^2 & Q'S-QS' & S^2 \\ 2\,QR & Q'T-QT'+R'S-RS' & 2\,ST \\ R^2 & R'T-RT' & T^2-QT+RS \end{vmatrix}$$

$$=(RS-QT)\,(T-Q)\,[2\,R\,(Q'S-QS')-(Q-T)\,(Q'T-QT'+R'S-RS')-2\,S\,(R'T-RT')],$$

$$D_h=\begin{vmatrix} RS-QT+Q^2 & QS & Q'S-QS' \\ 2\,QR & 2\,RS & Q'T-QT'+R'S-RS' \\ R^2 & RT & R'T-RT' \end{vmatrix}$$

$$=R\,(QT-RS)\,[2\,R\,(Q'S-QS')-(Q-T)\,(Q'T-QT'+R'S-RS')-2\,S\,(R'T-RT')],$$

ledit système ne sera pas contradictoire si

$$(1.2)\qquad 2\,R\,(Q'S-QS')-(Q-T)\,(Q'T-QT'+R'S-RS')-2\,S\,(R'T-RT')=0.$$

Si la condition (1.2) est remplie pour la détermination des $g(x)$ et $h(x)$ nous avons le système suivant

$$\begin{aligned} &QSg+S^2h=Q'S-QS'-(RS-QT+Q^2)f,\\ &2\,RSg+2\,STh=Q'T-QT'+R'S-RS'-2\,QRf, \end{aligned}$$

d'où il vient (3).

De la relation (1.2) nous obtenons l'équation différentielle par rapport en R

$$S\,(Q+T)\,R'+[S'\,(Q+T)-2\,S\,(Q+T)']\,R+(QT'-Q'T)\,(T-Q)=0$$

d'où viennent (4) et (5).

Puisque l'équation (1), par le changement (2), sous les conditions indiguées plus haut, se transforme en elle-même, il suit que $y=z$, et par conséquent, nous obtenons de (2), que ses solutions particulières sont liées par la relation

$$Sy^2-(Q-T)\,y-R=0,$$

d'où

$$y_1=\frac{Q-T+\sqrt{(Q-T)^2+4\,RS}}{2\,S}, \qquad y_2=\frac{Q-T-\sqrt{(Q-T)^2+4\,RS}}{2\,S}.$$

2. Étant donné que l'équation différentielle de Riccati

$$u'=f\,(x)\,u^2+g\,(x)\,u+h\,(x)$$

par le changement $u=y'/y$ devient

$$yy''-(f+1)\,y'^2-gyy'-hy^2=0, \tag{2.1}$$

nous pouvons énoncer le résultat suivant:

1° L'équation différentielle

$$yy''-(f+1)\,y'^2-\left[\frac{QS'-Q'S}{RS-QT}\cdot\frac{T}{S}-\frac{QT'-Q'T+RS'-R'S}{2\,(RS-QT)}-\frac{Q-T}{S}f\right]yy'$$
$$-\left[\frac{QT'-Q'T+RS'-R'S}{RS-QT}\,\frac{Q}{2S}-\frac{QS'-Q'S}{RS-QT}\cdot\frac{R}{S}-\frac{R}{S}f\right]y^2=0$$

par le changement de fonction

$$y=exp\left(\int\frac{Qz'+Rz}{Sz'+Tz}\,dx\right),$$

$$R=\frac{(Q+T)^2}{S}\left[C+\int\frac{(Q'T-QT')\,(T-Q)}{(Q+T)^3}\,dx\right] \quad (Q+T\neq 0)$$

se transforme en elle-même.

Ses solutions particulières sont

$$y_{1,\,2}=exp\int\frac{(Q-T)\pm\sqrt{(Q-T)^2+4RS}}{2S}\,dx.$$

2° L'équation différentielle

$$yy''-(f+1)\,y'^2+\left[\frac{QS'-Q'S}{RS+Q^2}\cdot\frac{Q}{S}+\frac{RS'-R'S}{2\,(RS+Q^2)}-2\frac{Q}{S}f\right]yy'$$
$$-\left[\frac{RS'-R'S}{RS+Q^2}\cdot\frac{Q}{2S}-\frac{QS'-Q'S}{RS+Q^2}\cdot\frac{R}{S}-\frac{R}{S}f\right]y^2=0$$

par le changement de fonction

$$y=exp\int\frac{Qz'+Rz}{Sz'-Qz}\,dx$$

se transforme en elle-même.

Ses solutions particulières sont

$$y_{1,2}=exp\int\frac{Q\pm\sqrt{Q^2+RS}}{S}dx.$$

Si dans l'équation (2.1) nous mettons $f=-1$, elle devient

$$y''-gy'-hy=0$$

et on a l'énoncé suivant.

3° L'équation différentielle linéaire

$$y''+\left[\frac{QT'-Q'T+RS'-R'S}{2(RS-QT)}-\frac{QS'-Q'S}{RS-QT}\cdot\frac{T}{S}-\frac{Q-T}{S}\right]y'+\left[\frac{QS'-Q'S}{RS-QT}\cdot\frac{R}{S}\right.$$
$$\left.-\frac{RS'-R'S+QT'-Q'T}{RS-QT}\cdot\frac{Q}{2S}-\frac{R}{S}\right]y=0$$

par le changement de fonction

$$y=exp\int\frac{Qz'+Rz}{Sz'+Tz}dx,\quad R=\frac{(Q+T)^2}{S}\left[C+\int\frac{(Q-T)(QT'-Q'T)}{(Q+T)^3}dx\right],$$
$$(Q+T\neq 0)$$

se transforme en elle-même.

Ses solutions particulières sont

$$y_{1,2}=exp\int\frac{Q-T\pm\sqrt{(Q-T)^2+4RS}}{2S}dx.$$

4° L'équation différentielle linéaire

$$y''+\left[\frac{RS'-R'S}{2(RS+Q^2)}+\frac{QS'-Q'S}{RS+Q^2}\cdot\frac{Q}{S}-2\frac{Q}{S}\right]y'+\left[\frac{QS'-Q'S}{RS+Q^2}\cdot\frac{Q}{S}\right.$$
$$\left.-\frac{RS'-R'S}{RS+Q^2}\cdot\frac{Q}{2S}-\frac{R}{S}\right]y=0$$

par le changement de fonction

$$y=exp\int\frac{Qz'+Rz}{Sz'+Tz}dx$$

se transforme en elle-même.

Ses solutions particulières sont

$$y_{1,2}=exp\int\frac{Q\pm\sqrt{Q^2+RS}}{S}dx.$$

Exemples. 1° L'équation de Riccati

$$y'=\frac{2-xg(x)}{x^3}y^2+g(x)y+6g(x)x^2-12x$$

par le changement de fonction $y=(2x^2z+6x^4)/(z+x^2)$ se transforme en elle-même.

Ses solutions particulières sont $y_1 = 3x^2$, $y_2 = -2x^2$, et la solution générale est

$$y = x^2 \cdot \frac{3\, exp\,(5 \int g(x)\, dx) + 2\,Cx^{10}}{exp\,(5 \int g(x)\, dx) - Cx^{10}}\,.$$

2° L'équation de Riccati

$$y' = \frac{3 - xg(x)}{2x^4}\, y^2 + g(x)\, y + \frac{3}{2}\, x^3\, g(x) - \frac{9}{2}\, x^2$$

par le changement de fonction $y = (x^3 z + 3x^6)/(z - x^3)$ se transforme en elle-même.

Ses solutions particulières sont $y_1 = 3x^3$, $y_2 = -x^3$, et sa solution générale est

$$y = x^3 \cdot \frac{3\, exp\,(2 \int g(x)\, dx) + Cx^6}{exp\,(2 \int g(x)\, dx) - Cx^6}\,.$$

3° L'équation de Riccati

$$y' = y^2 + \frac{1}{x}\, y - x^2$$

par le changement de fonction $y = -x^2/z$ se transforme en elle-même.

Ses solutions particulières sont $y_1 = x$. $y_2 = -x$, et sa solution générale est

$$y = x\, \frac{1 - C \exp(x^2)}{1 - C \exp(x^2)}\,.$$

4° L'équation de Riccati

$$y' = f(x)\, y^2 + \frac{1}{x}\, y - \frac{x^2}{4}\, f(x)$$

par le changement de fonction $y = (xz + x^2)/(4z + x)$ se transforme en elle-même.

Ses solutions particulières sont $y_1 = x/2$, $y_2 = -x/2$, et sa solution générale est

$$y = \frac{x}{2}\, \frac{1 + C\exp \int xf(x)\, dx}{1 - C\exp \int xf(x)\, dx}\,.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. Mitrinović, *Sur une classe d'equations de Riccati invarientes relativement à un changement de fonction,* Annuaire de faculté de Philosophie de l'Université de Skopje (section des sciences naturelles), 2 (1949), 168—186.

[2] P. Appell, *Sur des équations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes par un changement de fonction et de variable,* Acta mathematica, 15 (1891), 281—315.

[3] D. S. Mitrinović, *Sur une équation différentielle linéaire du second ordre transformable en elle-même,* Comptes rendus de l'Academie des sciences de Paris, 228 (1949)' 1188—1190.