ИЛИЈА А. ШАПКАРЕВ

ЗА ЕДНА ХОМОГЕНА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ВТОР РЕД

Во оваа работа даваме одговор на прашањето*:

Дали диференцијалната равенка

$$(a)\quad (Ax^2+Bx+C)\frac{d^2y}{dx^2}+(Dx+E)\frac{dy}{dx}+y=o$$

има партикуларни решенија дефинирани со

$$(b)\quad \begin{aligned} x &= a_0+a_1 t+a_2 t^2+a_3 t^3,\\ y &= b_0+b_1 t+b_2 t^2+b_3 t^5, \end{aligned}$$

кога константите

$$(c)\quad \begin{matrix} A, B, C, D, E,\\ a_0, a_1, a_2, a_3\\ b_0, b_1, b_2, b_3, \end{matrix}$$

погодно се изберат?

Бидејќи

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b_1+2b_2 t+3b^3 t^2}{a_1+2a_2 t+3a_3 t^2},$$

$$\frac{d^2y}{d^2x}=\frac{2\alpha_{12}+6\alpha_{13} t+6\alpha_{23} t^2}{(a_1+2a_2+3a_3t^2)^2},$$

$$\left(\alpha_{ik}=\begin{vmatrix} a_i\, a_k\\ b_i\, b_k\end{vmatrix},\ k=0,1,2,3\right),$$

равенката (a) станува

$$(d)\quad \begin{aligned}&(Ax^2+Bx+C)(2\alpha_{12}+6\alpha_{13} t+6\alpha_{23} t^2)\\ &+(Dx+E)(b_1+2b_2 t+3b_3 t^2)(a_1+2a_2 t\\ &+3a_3 t^2)^2+(a_1+2a_2 t+3a_3 t^2)^3(b_0+b_1 t\\ &+b_2 t^2+b_3 t^3)=0.\end{aligned}$$

Ако x и y од (b) ги замениме во (d) добиваме една алгебарска равенка, чија лева страна претставува полином од деветта степен во однос на t. Со оглед на тоа дека таа равенка треба да биде задоволена за секое t, за определувањето на врските меѓу константите (c), го добиваме системот равенки:

$$(1)\quad 27\, a_3^3 b_3 D+27\, a_3^3 b_3=0,$$

$$(2)\quad \begin{aligned}&6\alpha_{23}\, a_3^2 A+63\, a_2 a_3^2 b_3 D+18\, a_3^3 b_2 D\\ &+27\, a_3^3 b_2+54\, a_2 a_3^2 b_3=0,\end{aligned}$$

$$(3)\quad \begin{aligned}&6\,\alpha_{13}\, a_3^2 A+12\,\alpha_{23}\, a_2 a_3 A+45\, a_1 a_3^2 b_3 D\\ &+42\, a_2 a_3^2 b_2 D+48\, a_2^2 a_3 b_3 D+9\, a_3^3 b_1 D\\ &+27\, a_3^3 b_1+54\, a_2 a_3^2 b_2+36\, a_2^2 a_3 b_3\\ &+27\, a_1 a_3^2 b_3=0,\end{aligned}$$

$$(4)\quad \begin{aligned}&2\,\alpha_{12}\, a_3^2 A+12\,\alpha_{13}\, a_2 a_3 A+6\,\alpha_{23}(2\, a_1 a_3 A\\ &+a_2^2 A)+27\, a_3^2 b_3(a_0 D+E)\\ &+30\, a_1 a_3^2 b_2 D+66\, a_1 a_2 a_3 b_3 D\\ &+21\, a_2 a_3^2 b_1 D+32\, a_2^2 a_3 b_2 D+12\, a_2^3 b_3 D\\ &+27\, a_3^3 b_0+54\, a_2 a_3^2 b_1+36\, a_2^2 a_3 b_2\\ &+27\, a_1 a_3^2 b_2+8\, a_2^3 b_3+36\, a_1 a_2 a_3 b_3=0,\end{aligned}$$

$$(5)\quad \begin{aligned}&4\,\alpha_{12}\, a_2 a_3 A+6\,\alpha_{13}(a_2^2 A+2\, a_1 a_3 A)\\ &+6\,\alpha_{23}(2\, a_0 a_3 A+2\, a_1 a_2 A+a_3 B)\\ &+(18\, a_3^2 b_2+36\, a_2 a_3 b_3)(a_0 D+E)\\ &+16\, a_2^2 a_3 b_1 D+8\, a_2^3 b_2 D+44\, a_1 a_2 a_3 b_2 D\\ &+24\, a_1 a_2^2 b_3 D+15\, a_1 a_3^2 b_1 D+21\, a_1^2 a_3 b_3 D\\ &+36\, a_2^2 a_3 b_1+27\, a_1 a_3^2 b_1+8\, a_2^3 b_2\\ &+36\, a_1 a_2 a_3 b_2+54\, a_2 a_3^2 b_0+12\, a_1 a_2^2 b_3\\ &+9\, a_1^2 a_3 b_3=0,\end{aligned}$$

* Ова прашање ни беше предложено од страна на проф. Д. С. Митриновиќ

$$
\begin{aligned}
(6)\quad & 2\alpha_{12}(2a_1a_3A + a_2^2A) + 6\alpha_{13}(a_0a_3A \\
& +2a_1a_2A + a_3B) + 6\alpha_{23}(a_1^2A + 2a_0a_2A \\
& + a_2B) + (9a_3^2b_1 + 24a_2a_3b_2 + 12a_2^2b_3 \\
& + 18a_1a_3b_3)(a_0D + E) + 22a_1a_2a_3b_1D \\
& + 16a_1a_2^2b_2D + 14a_1^2a_3b_2D + 15a_1^2a_2b_3D \\
& + 4a_2^3b_1D + 36a_2^2a_3b_0 + 27a_1a_3^2b_0 + 8a_2^3b_1 \\
& + 36a_1a_2a_3b_1 + 12a_1a_2^2b_2 + 9a_1^2a_3b_2 \\
& 6a_1^2a_2b_3 = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(7)\quad & 2\alpha_{12}(2a_0a_3A + 2a_1a_2A + a_3B) \\
& + 6\alpha_{13}(a_1^2A + 2a_0a_2A + a_2B) \\
& + 6\alpha_{23}(2a_0a_1A + a_1B) + (8a_2^2b_2 \\
& + 12a_2a_3b_1 + 12a_1a_3b_2 + 12a_1a_2b_3)(a_0D \\
& + E) + 8a_1a_2^2b_1D + 7a_1^2a_3b_1D \\
& + 10a_1^2a_2b_2D + 3a_1^3b_3D + 8a_2^3b_0 \\
& + 36a_1a_2a_3b_0 + 12a_1a_2^2b_1 + 9a_1^2a_3b_1 \\
& 6a_1^2a_2b_2 + a_1^3b_3 = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(8)\quad & 2\alpha_{12}(a_1^2A + 2a_0a_2A + a_2B) \\
& + 6\alpha_{13}(2a_0a_1A + a_1B) + 6a_{23}(a_0^2A + a_0B \\
& + C) + (4a_2^2b_1 + 6a_1a_3b_1 + 8a_1a_2b_2 \\
& + 3a_1^2b_3)(a_0D + E) + 5a_1^2a_2b_1D \\
& + 2a_1^3b_2D + 12a_1a_2^2b_0 + 9a_1^2a_3b_0 \\
& + 6a_1^2a_2b_1 + a_1^3b_2 = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(9)\quad & 2\alpha_{12}(2a_0a_1A + a_1B) + 6\alpha_{13}(a_0^2A + a_0B \\
& + C) + (4a_1a_2b_1 + 2a_1^2b_2)(a_0D + E) \\
& + a_1^3b_1D + 6a_1^2a_2b_0 + a_1^3b_1 = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(10)\quad & 2\alpha_{12}(a_0^2A + a_0B + C) + a_1^2b_1(a_0D + E) \\
& + a_1^3b_0 = 0.
\end{aligned}
$$

Ќе претпоставиме дека се познати константите a_k, b_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ и во функција од нив да ги определиме A, B, C, D, E, бидејќи претпоставката дека се познати A, B, C, D, E, за определувањето на a_k, b_k $(k = 0, 1, 2, 3)$, нè доведува до равенки од повисоки степени, чие решавање, во општ случај, е неизводливо.

Во зависност од коефициентите a_k, b_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ при понатамошната работа ќе ги разгледаме четирите случаи:

1. $a_3 b_3 \neq 0$; **2.** $a_3 = 0, b_3 \neq 0$;

3. $a_3 \neq 0, b_3 = 0$; **4.** $a_3 = b_3 = 0$.

Напоменуваме дека при трансформирањето на равенките во натамошната работа се користени некои врски меѓу детерминантите α_{ik} $(i, k = 0, 1, 2, 3)$, како на пр.

$$1^0\ a_1\alpha_{23} - a_2\alpha_{13} + a_3\alpha_{12} = 0,$$

$$2^0\ a_0\alpha_{23} - a_2\alpha_{03} + a_3\alpha_{02} = 0.$$

1. 1. $a_3 b_3 \neq 0,\ \alpha_{23} \neq 0.$

Од равенката (1) добиваме

$$D = -1, \tag{1.1.1}$$

а од (2) според (1. 1. 1)

$$A = 3/2. \tag{1.1.2}$$

Ако во равенката (3) ги замениме D од (1. 1. 1) и A од (1. 1. 2) го добиваме условот

$$2a_2\alpha_{23} - 3a_3\alpha_{13} = 0. \tag{1.1.3}$$

Од (4) имајќи ги предвид (1. 1. 1), (1. 1. 2), (1. 1. 3) и 1^0 следува

$$E = (6a_3\alpha_{03} - 3a_2\alpha_{13} + 4a_3\alpha_{12})/6a_3b_3. \tag{1.1.4}$$

Во врска со (1. 1. 1), (1. 1. 2), (1. 1. 3) и (1. 1. 4) од равенката (5) имаме

$$
\begin{aligned}
B = [&(5a_2a_3b_2 + 3a_2^2b_3 - 6a_1a_3b_3)\alpha_{13} \\
&+ (4a_2a_3b_1 - 18a_0a_3b_3 - 18a_3^2b_0)\alpha_{23} \\
&- 12a_3^2b_2\alpha_{12}]/6a_3b_3\alpha_{23}.
\end{aligned} \tag{1.1.5}
$$

Равенката (6) врз основа од (1. 1. 1), (1. 1. 2), (1. 1. 3), (1. 1. 4) и (1. 1. 5) станува

$$
\begin{aligned}
&57a_1a_3^2\alpha_{12} + 27a_1^2a_3\alpha_{23} - 5a_2^3\alpha_{13} \\
&- 18a_1a_2^2\alpha_{23} = 0.
\end{aligned} \tag{1.1.6}
$$

Ако равенката (1. 1. 6) ја напишеме во развиен вид, имаме

$$
\begin{aligned}
&(5a_2^3a_3 - 57a_1a_2a_3^2)b_1 + (18a_1a_2^2a_3 \\
&+ 30a_1^2a_3^2)b_2 = 23a_1a_2^3b_3 - 27a_1^2a_2a_3b_3.
\end{aligned}
$$

На истиот начин од (1. 1. 3) добиваме

$$3a_3^2b_1 - 2a_2a_3b_2 = 3a_1a_3b_3 - 2a\ b_3.$$

Со решавањето на последните две равенки во однос b_1 и b_2 добиваме

$$b_1 = a_1 b_3 (a_2^4 - 6 a_1 a_2^2 a_3 + 9 a_1^2 a_3^2)/a_3 (a_2^4 - 6 a_1 a_2^2 a_3 + 9 a_1^2 a_3^2),$$

$$b_2 = a_2 b_3 (a_2^4 - 6 a_1 a_2^2 a_3 + 9 a_1^2 a_3^2)/a_3 (a_2^4 - 6 a_1 a_2^2 a_3 + 9 a_1^2 a_3^2).$$

Под претпоставка дека

$$a_2^4 - 6 a_1 a_2^2 a_3 + 9 a_1^2 a_3^2 \neq 0$$

имаме

$$b_1 = a_1 b_3/a_3,$$

$$b_2 = a_2 b_3/a_3,$$

односно

$$\alpha_{13} = 0, \qquad \alpha_{23} = 0,$$

што и́ противречи на направената претпоставка.

Значи, за да има равенката (a) партикуларен интеграл дефиниран со (b), во овој случај треба да биде

$$(1.1.7) \qquad a_2^2 = 3 a_1 a_3.$$

Од (1. 1. 6) според (1. 1. 7) и (1. 1. 3) добиваме

$$(1.1.8) \qquad a_3 \alpha_{12} = a_1 \alpha_{23},$$

а врз основа од 1° следува

$$(1.1.9) \qquad a_2 \alpha_{13} = 2 a_1 \alpha_{23}.$$

Исто така (1. 1. 3) станува

$$(1.1.10) \qquad 2 a_2 b_2 = 3 (a_1 b_3 + a_3 b_1).$$

Равенката (7) според (1. 1. 1), (1. 1. 2), (1. 1. 4), (1. 1. 5), (1. 1. 7), (1. 1. 8), (1. 1. 9) и (1. 1. 10) се трансформира во

$$(1.1.11) \qquad a_2^2 = 3 a_1 a_3,$$

од каде што се гледа дека е задоволена.

Од равенката (8), заменувајќи ги во неа A, B, D, E и применувајќи ги добиените услови, добиваме

$$(1.1.12) \quad C = [45 a_1^2 \alpha_{03} - \alpha_{12} (2 a_1^2 + 6 a_0 a_2) - 48 a_0 a_1 \alpha_{13} - 9 a_0^2 \alpha_{23} - (2 a_2 \alpha_{12} + 6 a_1 \alpha_{13} + 6 a_0 \alpha_{23}) B - (30 a_1 a_3 b_1 + 15 a_1^2 b_3) E]/6 \alpha_{23}.$$

Равенките (9) и (10) врз основа од (1. 1. 1), (1. 1. 2), (1. 1. 4), (1. 1. 5), (1. 1. 7), (1. 1. 8), (1. 1. 9), (1. 1. 10) и (1. 1. 12) се задоволени.

1. 2. $a_3 b_3 \neq 0, \quad \alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{13} \neq 0.$

Од (1) во овој случај добиваме

$$(1.2.1) \qquad D = -1,$$

а равенката (2) според (1. 2. 1) е задоволена.

Од равенката (3) врз основа од (1. 2. 1) следува

$$(1.2.2) \qquad A = 3,$$

а од (4) според (1. 2. 1) и (1. 2. 2) имаме

$$(1.2.3) \qquad E = (3 \alpha_{03} - \alpha_{12})/3 b_3.$$

Од равенката (5) имајќи ги предвид (1. 2. 1), (1. 2. 2) и (1. 2. 3) го добиваме условот

$$a_2 \alpha_{12} = 3 a_1 \alpha_{13},$$

кој според 1° станува

$$(1.2.4) \qquad a_2^2 = 3 a_1 a_3.$$

Од равенката (6) во врска со (1. 2. 1), (1. 2. 2), (1. 2. 3) и (1. 2. 4) следува

$$(1.2.5) \quad B = [9 a_3^2 \alpha_{01} + 126 a_1 a_3 \alpha_{03} - 40 a_1 a_3 \alpha_{12} - 36 a_0 a_3 \alpha_{13} - (9 a_3^2 b_1 + 126 a_1 a_3 b_3) E]/6 a_3 \alpha_{13}.$$

Равенките (7) и (8) според (1. 2. 1) (1. 2. 2), (1. 2. 3), (1. 2. 4) и (1. 2. 5) се задоволени.

Од равенката (9) имајќи ги предвид (1. 2. 1), (1. 2. 2), (1. 2. 3), (1. 2. 4) и (1. 2. 5) добиваме

$$(1.2.6) \quad C = [4 a_1 a_2 \alpha_{01} + 2 a_1^2 \alpha_{02} - 12 a_0 a_1 \alpha_{12} - 18 a_0^2 \alpha_{13} - (2 a_1 \alpha_{12} + 6 a_0 \alpha_{13}) B - (4 a_1 a_2 b_1 + 2 a_1^2 b_2) E]/6 \alpha_{13}.$$

Равенката (10) во врска со (1. 2. 1), (1. 2. 2), (1. 2. 3), (1. 2. 4), (1. 2. 5) и (1. 2. 6) е задоволена.

1. 3. $a_3 b_3 \neq 0, \quad \alpha_{23} = \alpha_{13} = 0 \Rightarrow \alpha_{12} = 0$

Од равенката (1) во овој случај имаме

$$(1.3.1) \qquad D = -1,$$

а равенката (2) според (1. 3. 1) е задоволена. Исто така и равенката (3) во врска со (1. 3. 1) е задоволена.

Од равенката (4) според (1. 3. 1) добиваме

(1. 3. 2) $$E = \alpha_{03}/b_3.$$

Равенките (5), (6), (7), (8), (9) и (10) имајќи ги предвид (1, 3, 1) и (1. 3. 2) се задоволени.
Константите A, B, C се произволни.

2. 1. $a_3 = 0,\ b_3 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ 2a_2b_2 - 3a_1b_3 \neq 0$

Равенките (1),, (2) и (3) се задоволени.
Равенките (4) и (5) стануваат соодветно

(2. 1. 1) $$3A + 6D + 4 = 0,$$

(2. 1. 2) $$9a_1b_3A + 12a_1b_3\,D + 4a_2b_2\,D + 6a_1b_3 = 0.$$

Од (2. 1. 1) и (2. 1. 2) следува

(2. 1. 3) $$D = -1,$$

(2. 1. 4) $$A = 2/3.$$

Равенката (6) според (2. 1. 3) и (2. 1, 4) станува

(2. 1. 5) $$36a_2b_3E + 18a_2b_3B - 8a_1a_2b_2 + 8a_2^2b_1 + 9a_1^2b_3 - 12a_0a_2b_3 = 0.$$

Равенката (7) имајќи ги предвид (2. 1. 3) и (2. 1. 4) се трансформира во

(2. 1. 6) $$(12a_2^2b_2 + 18a_1a_2b_3)E + 18a_1a_3b_3B - 2a_1^2a_2b_2 + 2a_1a_2^2b_1 + 3a_1^3b_3 + 6a_0a_1a_2b_3 + 12a_2^3b_0 - 12a_0a_2^2b_2 = 0.$$

Од (2. 1. 5) и (2. 1. 6) добиваме

(2. 1. 7) $$E = (a_1a_2\alpha_{12} - 2a_2^2\alpha_{02} + 3a_0a_1u_2b_3 - a_1^3b_3)/a_2(3a_1b_3 - 2a_2b_2),$$

(2. 1, 8) $$B = (8a_1a_2b_2 + 12a_0a_2b_3 - 8a_2^2b_1 - 9a_1^2b_3 - 36a_2b_3E)/18a_2b_3.$$

Од равенката (8) според (2. 1. 3) и (2.1.4) следува

(2. 1. 9) $$C = [16a_0a_1a_2b_2 + 20a_0a_2^2b_1 - 12a_0^2a_2b_3 - 15a_0a_1^2b_3 - 36a_1a_2^2b_0 - a_1^2\alpha_{12} - (18a_1^2b_3 + 18a_0a_2b_3 + 6a_2\alpha_{12})B - (12a_2^2b_1 + 24a_1a_2b_2 + 9a_1^2b_3)E]/18a_2b_3.$$

Равенката (9) имајќи ги предвид (2. 1. 3), (2. 1. 4), (2. 1. 7), (2. 1. 8) и (2. 1. 9) е задоволена.

Од равенката (10) во врска со (2. 1. 3), (2. 1. 4), (2. 1. 7), (2. 1. 8) и (2. 1. 9) добиваме

$$(4a_2\alpha_{12} - 3a_1^2b_3)^2(9a_2b_0b_3 + b_2\alpha_{12} + 3a_1b_1b_3) = 0,$$

од каде што следува условот

$$4a_2\alpha_{12} - a_1^2b_3 = 0$$

или

$$9a_2b_0b_3 + b_2\alpha_{12} - 3a_1b_1b_3 = 0.$$

2. 2. $a_3 = 0,\ b_3 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ 2a_2b_2 - 3a_1b_3 = 9.$

Равенките (1), (2) и (3) се задоволени.
Равенката (4) станува

(2. 2. 1) $$3A + 6D + 4 = 0,$$

а равенката (5) имајќи ја во предвид (2.2,1) е задоволена.

Равенките (6) и (7) според (2. 2. 1) се трансформираат соодветно во

(2. 2. 2) $$18a_2b_3B + 36a_2b_3E - 36a_0a_2b_3D - 9a_1^2b_3D + 24a_2^2b_1D - 48a_0a_2b_3 - 12a_1^2b_3 + 32a_2^2b_1 = 0,$$

(2. 2, 3. $$36a_1a_2b_3B + 72a_1a_2b_3E - 72a_0a_1a_2b_3D - 12a_1^2a_2b_2D + 48a_1a_2^2b_1D - 96a_0a_1a_2b_3 + 24a_3^2b_0 - 18a_1^3b_3 + 52a_1a_2^2b_1 = 0.$$

Равенките (2. 2. 3) и (2. 2. 3) не ќе бидат противречни ако е исполнет условот

(2. 2. 4) $$a_1^2b_2 - 3a_1a_2b_1 + a_2^2b_0 = 0.$$

Равенките (8) и (9) врз основа од (2. 2. 1) стануваат соодветно

(2. 2. 5) $$18a_1a_2b_2B - 6a_2^2b_1B + 18a_0a_2b_3B + 18a_2b_3C + 12a_2^2b_1E + 45a_1^2b_3E - 36a_0^2a_2b_3D - 42a_0a_1a_2b_2D + 36a_0a_2^2b_1D + 27a_1^2a_2b_1D - 6a_1^3b_2D - 24a_0^2a_2b + 16a_0a_2^2b_1 + 36a_1a_2^2b_0 - 48a_0a_1a_2 - 5a_1^3b_2 + 26a_1^2a_2b_1 = 0,$$

(2.2.6) $$6a_1^2 b_2 B - 6a_1 a_2 b_1 B + 18 a_0 a_1 b_3 B + 18 a_1 b_3 C + 12 a_1 a_2 b_1 E + 6 a_1^2 b_2 E - 36 a_0^2 a_1 b_3 D - 24 a_0 a_1^2 b_2 + + 24 a_0 a_1 a_2 b_1 D + 12 a_0 a_1 a_2 b_1 D + 6 a_0 a_1^2 b_2 D + 3 a_1^3 b_1 D + 18 a_1^2 a_2 b_0 + 3 a_1^3 b_1 - 16 a_0 a_1^2 b_2 + 16 a_0 a_1 a_2 b_1 - 24 a_0^2 a_1 b_3 = 0.$$

Елиминирајќи го C од (2.2.5) и (2.2.6) ја добиваме равенката

(2.2.7) $$12 a_1^2 a_2 b_2 B + 45 a_1^3 b_3 E - 6 a_1^2 a_2 b_2 E - 24 a_0 a_1^2 a_2 b_2 D + 24 a_1^3 a_2 b_1 D - - 6 a_1^4 b_2 D - 32 a_0 a_1^2 a_2 b_2 + 18 a_1^2 a_2^2 b_0 + 23 a_1^3 a_2 b_1 - 5 a_1^4 b_2 = 0.$$

Ако ја помножиме (2.2.7) со $3b_3$, а (2.2.2) со $-2a_1^2 b_2$ и ги собереме, ја добиваме равенката

$$9 a_1^4 b_2 b_3 - 64 a_1^2 a_2^2 b_1 b_2 + 54 a_1^2 a_2^2 b_0 b_3 + + 69 a_1^3 a_2 b_1 b_3 = 0,$$

која според (2.2.4) претставува идентитет.

Равенката (10) имајќи ја предвид (2.2.1) постанува

(2.2.8) $$6 a_0 \alpha_{12} B + 6 \alpha_{12} C + 3 a_0 a_1^2 b_1 D - 12 a_0^2 \alpha_{12} D + 3 a_1^2 b_1 E - 8 a_0^2 \alpha_{12} + 3 a_1^3 b_0 = 0.$$

Со елиминација на C од (2.2.5) и (2.2.8) добиваме

(2.2.9) $$6 a_2^2 b_1 \alpha_{12} B - 18 a_1 a_2 b_2 \alpha_{12} B - 12 a_2^2 b_1 \alpha_{12} E - 45 a_1^2 b_3 \alpha_{12} E + 9 a_1^2 a_2 b_1 b_3 E + 9 a_0 a_1^2 a_2 b_1 b_3 D + 42 a_0 a_1 a_2 b_2 \alpha_{12} D - 36 a_0 a_2^2 b_1 \alpha_{12} D - 27 a_1^2 a_2 b_1 \alpha_{12} D + 6 a_1^3 b_2 \alpha_{12} D - 16 a_0 a_2^2 b_1 \alpha_{12} + 48 a_0 a_1 a_2 b_2 \alpha_{12} + 11 a_1^3 b_2 \alpha_{12} - 44 a_1^2 a_2 b_1 \alpha_{12} + 3 a_1^3 a_2 b_1 b_2 - a_1^4 b_2^2 = 0.$$

Од (2.2.2) и (2.2.9) под претпоставка дека

$$\alpha_{12} \neq a_2 b_1$$

добиваме

(2.2.10) $$E = [(72 a_0 a_2^2 b_1 b_3 \alpha_{12} - 36 a_1^2 a_2 b_1 b_3 \alpha_{12} + 24 a_2^3 b_1^2 \alpha_{12} + 9 a_1^3 b_2 b_3 \alpha_{12} - 18 a_0 a_1^2 a_2 b_2^2 b_3) D + (32 a_2^3 b_1^2 \alpha_{12} - 24 a_1^2 a_2 b_1 b_3 \alpha_{12} + 6 a_1^3 b_2 b_3 \alpha_{12} - 6 a_1^3 a_2 b_1 b_2 b_3)]/18 a_2 b_3 (a_1 b_2 - 2 a_2 b_1)^2,$$

(2.2.11) $$B = [(36 a_0 a_2 b_3 + 9 a_1^2 b_3 - 24 a_2^2 b_1) D + (48 a_0 a_2 b_3 + 12 a_1^2 b_3 - 32 a_2^2 b_1) - 36 a_2 b_3 E]/18 a_2 b_3,$$

а од (2.2.5)

(2.2.12) $$C = [(6 a_2^2 b_1 - 18 a_1 a_2 b_2 - 18 a_0 a_2 b_3) B - (12 a_2^2 b_1 + 45 a_1^2 b_3) E + (36 a_0^2 a_2 b_3 + 42 a_0 a_1 a_2 b_2 - 36 a_0 a_2^2 b_1 - 27 a_1^2 a_2 b_1 + 6 a_1^3 b_2) D + 24 a_0^2 a_2 b_3 - 16 a_0 a_2^2 b_1 - 36 a_1 a_2^2 b_0 + 48 a_0 a_1 a_2 b_2 + 5 a_1^3 b_2 - 26 a_1^2 a_2 b_1)]/18 a_2 b_3.$$

Константата D е произволна.

Ако пак

$$\alpha_{12} = a_2 b_1$$

тогаш броителот на дропката со која е определена константата E е нула, и според тоа, во тој случај може и E произволно да се избира, а B и C се дадени со (2.2.11) односно (2.2.12).

2.3. $a_3 = 0$, $b_3 \neq 0$, $a_2 = 0$, $b_2^2 - 3 b_1 b_3 \neq 0$.

Во овој случај равенките (1), (2), (3), (4), (5) и (6) се задоволени.

Равенките (7), (8), (9) и (10) стануваат соодветно

(2.3.1) $$6A + 3D + 1 = 0,$$

(2.3.2) $$2 a_1 b_2 A + 12 a_0 b_3 A + 6 b_3 B + 3 a_0 b_3 D + 2 a_1 b_2 D + 3 b_3 E + a_1 b_2 = 0,$$

$$(2.3.3)\quad a_0 a_1 b_2 A + 6a_0^2 b_3 A + 2a_1 b_2 B + 6a_0 b_3 B + 6b_3 C + 2a_1 b_2 E + 2a_0 a_1 b_2 D + a_1^2 b_1 D + a_1^2 b_1 = 0,$$

$$(2.3.4)\quad 2a_0^2 b_2 A + 2a_0 b_2 B + 2b_2 C + a_0 a_1 b_1 D + a_1 b_1 E + a_1^2 b_0 = 0.$$

Со елиминација на C од (2. 3. 3) и (2. 3. 4) ја добиваме равенката

$$(2.3.5)\quad 4a_0 b_2^2 A + 2b_2^2 B + 2a_0 b_2^2 D - 3a_0 b_1 b_3 D + a_1 b_1 b_2 D + 2b_2^2 E - 3b_1 b_3 E + a_1 b_1 b_2 - 3a_1 b_0 b_3 = 0.$$

Од (2. 3. 1) и (2. 3. 2) следува

$$(2.3.6)\quad 18b_3 B + 9b_3 E + 3a_1 b_2 D - 9a_0 b_3 D - 6a_0 b_3 + 2a_1 b_2 = 0.$$

Врз основа од (2. 3. 1) и (2. 3. 5) ја добиваме равенката

$$(2.3.7)\quad 6b_2^2 B + 6b_2^2 E - 9b_1 b_3 E + 3a_1 b_1 b_2 D - 9a_0 b_1 b_3 D + 3a_1 b_1 b_2 - 9a_1 b_0 b_3 - 2a_0 b_2^2 = 0.$$

Решавајќи ги (2. 3. 6) и (2. 3. 7) во однос на B и E добиваме

$$E = [3(a_1 b_2 - 3a_0 b_3)(b_2^2 - 3b_1 b_3) D + 27a_1 b_0 b_3^2 - 9a_1 b_1 b_2 b_3 - 2a_1 b_2^3]/9b_3(b_2^2 - 3b_1 b_3),$$

$$B = [(9a_0 b_3 - 3a_1 b_2) D + (6a_0 b_3 - 2a_1 b_2) - 9b_3 E]/18b_3.$$

Од (2. 3. 3) следува

$$C = [4a_0 a_1 b_2 + 6a_0^2 b_3 - 6a_1^2 b_1 + (18a_0^2 b_3 - 6a_1^2 b_1) D - (12a_1 b_2 + 36a_0 b_3) B - 12a_1 b_2 E]/36b_3.$$

Константата D е произволна.

2. 4. $a_3 = 0,\ b_3 \neq 0,\ a_2 = 0,\ b_2^2 - 3b_1 b_3 = 0.$

Равенките (1), (2), (3), (4), (5) и (6) се задоволени.

Равенките (7), (8), (9) и (10) стануваат соодветно

$$(2.4.1)\quad 6A + 3D + 1 = 0,$$

$$(2.4.2)\quad 2a_1 b_2 A + 12a_0 b_3 A + 6b_3 B + 3a_0 b_3 D + 2a_1 b_2 D + 3b_3 E + a_1 b_2 = 0,$$

$$(2.4.3)\quad 4a_0 a_1 b_2 A + 6a_0^2 b_3 A + 2a_1 b_2 B + 6a_0 b_3 B + 6b_3 C + 2a_0 a_1 b_2 D + a_1^2 b_1 D + 2a_1 b_2 E + a_1^2 b_1 = 0,$$

$$(2.4.4)\quad 2a_0^2 b_2 A + 2a_0 b_2 B + 2b_2 C + a_0 a_1 b_1 D + a_1 b_1 E + a_1^2 b_0 = 0.$$

Со елиминирањето на C од (2. 4. 3) и (2. 4. 4) ја добиваме равенката

$$(2.4.5)\quad 12a_0 b_1 b_3 A + 6b_1 b_3 B + 3a_0 b_1 b_3 D + a_1 b_1 b_2 D + 3b_1 b_3 E + a_1 b_1 b_2 - 3a_1 b_0 b_3 = 0.$$

Од (2. 4. 1) и (2. 4. 5) следува

$$(2.4.6)\quad 6b_1 b_3 B + 3b_1 b_3 E = (3a_0 b_1 b_3 - a_1 b_1 b_2) D + 2a_0 b_1 b_3 + 3a_1 b_0 b_3 - a_1 b_1 b_2.$$

Од (2. 4. 1) и (2. 4. 2) добиваме

$$(2.4.7)\quad 18b_3 B + 9b_3 E = (9a_0 b_3 - 3a_1 b_2) D + (6a_0 b_3 - 2a_1 b_2).$$

Равенките (2. 4. 6) и (2. 4. 7) не ќе бидат противречни, ако е исполнет условот

$$(2.4.8)\qquad 9b_0 b_3 - b_1 b_2 = 0.$$

Од (2. 4. 7) добиваме

$$B = [(3a_0 b_3 - a_1 b_2)(3D + 2) - 9b_3 E]/18b_3,$$

а од (2. 4. 1) и (2. 4. 3) следува

$$C = [4a_0 a_1 b_2 + 6a_0^2 b_3 - 6a_1^2 b_1 + (18a_0^2 b_3 - 6a_1^2 b_1) D - (12a_1 b_2 + 36a_0 b_3) B - 12a_1 b_2 E]/36b_3.$$

Константите D и E се произволни.

3. 1. $a_3 \neq 0,\ b_3 = 0,\ b_2 \neq 0,\ 3a_3 b_1 - 2a_2 b_2 \neq 0.$

Равенката (1) е задоволена.
Равенката (2) станува

$$(3.1.1)\qquad 2A - 6D - 9 = 0.$$

Од (3) според (3. 1. 1) добиваме

$$(3.1.2)\qquad D = 0,$$

а од (3. 1. 1) во врска со (3. 1. 2) следува

$$(3.1.3)\qquad A = 9/2.$$

Од равенката (4) имајќи ги предвид (3. 1. 2) и (3. 1. 3) го добиваме условот

(3. 1. 4) $3 a_3^2 b_0 - a_2 a_3 b_1 - (2 a_1 a_3 - a_2^2) b_2 = 0.$

Од равенката (5) врз основа на (3. 1. 2) и (3. 1. 3) добиваме

(3. 1. 5) $B = (18_3^2 b_2 E - 9 a_2^2 a_3 b_1 - 27 a_1 a_3^2 b_1 - 54 a_0 a_3^2 b_2 + 8 a_2^3 b_2 + 54 a_2 a_3^2 b_0)/6 a_3^2 b_2,$

а равенката (6) според (3. 1. 2) и (3. 1. 3) станува

(3. 1. 6) $(9 a_3^2 b_1 + 24 a_2 a_3 b_2) E - (6 a_2 a_3 b_2 + 6 a_3^2 b_1) B - 36 a_1 a_2 a_3 b_1 + 21 a_1 a_2^2 b_2 - a_2^3 b_1 - 54 a_0 a_3^2 b_1 - 54 a_0 a_2 a_3 b_2 + 36 a_2^2 a_3 b_0 + 27 a_1 a_3^2 b_0 = 0.$

Елиминирајќи го B од (3. 1. 5) и (3. 1. 6) добиваме

(3. 1. 7) $E = (9 a_1 a_2 a_3^2 b_1 b_2 - 21 a_1 a_2^2 a_3 b_2^2 + 18 a_2^2 a_3^2 b_0 b_2 - 27 a_1 a_3^3 b_0 b_2 + 8 a_2^4 b_2^2 - 9 a_2^2 a_3^2 b_1^2 - 27 a_1 a_3^3 b_1^2 + 54 a_2 a_3^3 b_0 b_1)/3 a_3^2 b_2 (2 a_2 b_2 - 3 a_3 b_1).$

Равенката (7) имајќи ги предвид (3. 1. 2), (3. 1. 3), (3. 1. 4), (3. 1. 6) и (3. 1. 7) е задоволена.

Од равенката (8) според (3. 1. 2) и (3. 1. 3) добиваме

(3. 1. 8) $C = [10 a_1^3 b_2 - 3 a_1^2 a_2 b_1 + 18 a_0 a_1 a_2 b_2 - 18 a_0 a_2^2 b_1 - 54 a_0 a_1 a_3 b_1 - 27 a_0^2 a_3 b_2 + 12 a_1 a_2^2 b_0 + 9 a_1^2 a_3 b_0 + (4 a_2^2 b_1 + 6 a_1 a_3 b_1 + 8 a_1 a_2 b_2) E + (2 a_1 a_2 b_2 - 2 a_2^2 b_1 - 6 a_1 a_3 b_1 - 6 a_0 a_3 b_2) B]/6 a_3 b_2.$

Равенките (9) и (10) врз основа од (3. 1. 2), (3. 1. 3), (3. 1. 4), (3. 1. 6) и (3. 1. 8) се трансформираат во равенката

(3. 1. 9) $96 a_1^3 a_2^2 a_3 b_2^4 - 192 a_1^2 a_2^3 a_3 b_1 b_2^3 - 16 a_1^2 a_2^4 b_2^4 + 288 a_1^3 a_2 a_3^2 b_1 b_2^3 - 216 a_1^3 a_3^3 b_1^2 b_2^2 + 216 a_1^2 a_2 a_3^3 b_1^3 b_2 + 72 a_1 a_2^4 a_3 b_1^2 b_2^2 + 32 a_1 a_2^5 b_1 b_2^3$
$144 a_1 a_2^3 a_3^2 b_1^3 b_2 + 24 a_2^5 a_3 b_1^3 b_2 - 9 a_2^4 a_3^2 b_1^4 - 81 a_1^2 a_3^4 b_1^4 - 16 a_2^6 b_1^2 b_2^2 + 54 a_1 a_2^2 a_3^3 b_1^4 - 144 a_1^4 a_3^2 b_2^4 = 0,$

и според тоа во овој случај (9) и (10) се еквивалентни.

Ако равенката (3. 1. 9) ја поделиме со b_2 и ставиме $b_1/b_2 = m$ добиваме

$$9 a_3^2 (a_2^2 - 3 a_1 a_3)^2 m^4 - 24 a_2 a_3 (a_2^2 - 3 a_1 a_3)^2 m^3 + 8 (2 a_2^6 - 9 a_1 a_2^4 a_3 + 27 a_1^3 a_3^3) m^2 - 32 a_1 a_2 (a_2^2 - 3 a_1 a_3)^2 m + 16 a_1^2 (a_2^2 - 3 a_1 a_3)^2 = 0.$$

Со оглед на тоа дека

$$2 a_2^6 - 9 a_1 a_2^4 a_3 + 27 a_1^3 a_3^3 = (a_2^2 - 3 a_1 a_3)^2 (2 a_2^2 + 3 a_1 a_3),$$

имаме

$$9 a_3^2 (a_2^2 - 3 a_1 a_3)^2 m^4 - 24 a_2 a_3 (a_2^2 - 3 a_1 a_3)^2 m^3 + 8 (a_2^2 - 3 a_1 a_3)^2 (2 a_2^2 + 3 a_1 a_3) m^2 - 32 a_1 a_2 (a_2^2 - 3 a_1 a_3)^2 m + 16 a_1^2 (a_2^2 - 3 a_1 a_3)^2 = 0,$$

односно

$$(a_2^2 - 3 a_1 a_3)^2 [4 a_1 + m (3 a_3 m - 4 a_2)]^2 = 0,$$

од каде што го добиваме условот

$$a_2^2 - 3 a_1 a_3 = 0$$

или

$$4 a_1 + m (3 a_3 m - 4 a_2) = 0.$$

3. 2. $a_3 \neq 0, \ b_3 = 0, \ b_2 \neq 0, \ 2 a_2 b_2 - 3 a_3 b_1 = 0.$

Равенката (1) е задоволена.

Равенката (2) станува

(3. 2. 1) $2 A - 6 D - 9 = 0,$

а равенката (3) според (3. 2. 1) е задоволена.

Од (4) имајќи ја предвид (3. 2. 1) го добиваме условот

(3. 2. 2) $4 a_1 b_2 - a_2 b_1 - 6 a_3 b_0 = 0.$

Равенките (5) и (6) врз основа од (3. 2. 1) и (3. 2. 2) се трансформираат соодветно во

(3. 2. 3) $9 a_3 b_2 E - 3 a_3 b_2 B + 3 a_1 a_2 b_2 D - a_2^2 b_1 D - 9 a_0 a_3 b_2 D + 9 a_1 a_2 b_2 - 3 a_2^2 b_1 - 27 a_0 a_3 b_2 = 0,$

(3. 2. 4) $30 a_2 a_3 b_2 E - 10 a_2 a_3 b_2 B$

$$+ 8a_1^2 a_3 b_2 D + 7 a_1 a_2 a_3 b_1 D - 2 a_2^3 b_1 D$$

$$- 30 a_0 a_2 a_3 b_2 D + 18 a_1^2 a_3 b_2$$

$$+ 27 a_1 a_2 a_3 b_1 - 7 a_2^3 b_1 - 90 a_0 a_2 a_3 b_2 = 0$$

Ако равенката (3. 2. 3) ја помножиме со $10 a_2$, а (3. 2. 4) со -3 и ги собереме, добиваме

$$(24 a_1 a_2 a_3 b_1 - 4 a_2^3 b_1 - 24 a_1^2 a_3 b_2) D = 9 a_2^3 b_1$$

$$- 54 a_1 a_2 a_3 b_1 + 54 a_1^2 a_3 b_2.$$

Под претпоставка дека

$$a_2^3 b_1 - 6 a_1 a_2 a_3 b_1 + 6 a_1^2 a_3 b_2 \neq 0$$

следува

(3. 2. 5) $D = -9/4.$

Од (3. 2. 1) според (3. 2. 5) имаме

(3. 2. 6) $A = -9/4.$

Равенката (7) во врска со (3. 2. 1) и (3. 2. 2) се трансформира во

(3. 2. 7) $18 a_1 a_3^2 b_2 E + 24 a_2^2 a_3 b_2 E$

$$- 6 a_1 a_3^2 b_2 B - 8 a_2^2 a_3 b_2 B$$

$$- 18 a_0 a_1 a_3^2 b_2 D - 36 a_0 a_2 a_3^2 b_1 D$$

$$- 6 a_1 a_2^2 a_3 b_1 D + 33 a_1^2 a_3^2 b_1 D - 54 a_0 a_1 a_3^2 b_2$$

$$- 108 a_0 a_2 a_3^2 b_1 - 6 a_1 a_2^2 a_3 b_1$$

$$+ 54 a_1^2 a_2 a_3 b_2 - 2 a_2^4 b_1 = 0.$$

Со елиминација на B од (3. 2. 3) и (3. 2. 7) ја добиваме равенката

(3. 2. 8) $(4 a_2^4 b_1 - 24 a_1 a_2^2 a_3 b_1$

$$+ 24 a_1^2 a_2 a_3 b_2) D = 54 a_1 a_2^2 a_3 b_1$$

$$- 54 a_1^2 a_3 b_2 - 9 a_2^4 b_1,$$

која е еквивалентна со (3. 2. 5).

Равенките (8) и (9) имајќи ја предвид (3. 2. 1) стануваат соодветно

(3. 2. 9) $2 a_2 \alpha_{12} B - 6 a_0 a_3 b_2 B - 6 a_1 a_3 b_1 B$

$$- 6 a_3 b_2 C + 4 a_2^2 b_1 E + 18 a_1 a_3 b_1 E$$

$$+ 6 a_1^2 \alpha_{12} D + 12 a_0 a_2 \alpha_{12} D - 18 a_0^2 a_3 b_2 D$$

$$- 36 a_0 a_1 a_3 b_1 D + 4 a_0 a_2^2 b_1 D$$

$$+ 18 a_0 a_1 a_3 b_1 D + 5 a_1^2 a_2 b_1 D + 2 a_1^3 b_2 D$$

$$+ 9 a_1^2 \alpha_{12} + 18 a_0 a_2 \alpha_{12} - 27 a_0^2 a_3 b_2$$

$$- 54 a_0 a_1 a_3 b_1 + 12 a_1 a_2^2 b_0 + 9 a_1^2 a_3 b_0$$

$$+ 6 a_1^2 a_2 b_1 + a_1^3 b_2 = 0,$$

(3. 2. 10) $2 a_1 \alpha_{12} B - 6 a_0 a_3 b_1 B - 6 a_3 b_1 C$

$$+ 4 a_1 a_2 b_1 E + 2 a_1^2 b_2 E + 12 a_0 a_1 \alpha_{12} D$$

$$- 18 a_0^2 a_3 b_1 D + 4 a_0 a_1 a_2 b_1 D + 2 a_0 a_1^2 b_2 D$$

$$+ a_1^3 b_1 D + 18 a_0 a_1 \alpha_{12} - 27 a_0^2 a_3 b_1$$

$$+ 6 a_1^2 a_2 b_0 + a_1^3 b_1 = 0.$$

Со елиминација на C од (3. 2. 9) и (3. 2. 10) добиваме

$$2 a_1^2 b_2^2 B + 2 a_2^2 b_1^2 B - 12 a_1 a_3 b_1^2 E + 2 a_1^2 b_2^2 E$$

$$- 4 a_2^2 b_1^2 E + 14 a_0 a_1^2 b_2^2 D - 20 a_0 a_1 a_2 b_1 b_2 D$$

$$+ 8 a_0 a_2^2 b_1^2 D - 7 a_1^3 b_1 b_2 D + a_1^2 a_2 b_1^2 D$$

$$+ 18 a_0 a_1 a_3 b_1^2 D + 18 a_0 a_1^2 b_2^2 + 18 a_0 a_2^2 b_1^2$$

$$- 9 a_1^3 b_1 b_2 + 3 a_1^2 a_2 b_1^2 - 12 a_1 a_2^2 b_0 b_1 = 0.$$

Од последната равенка врз основа од (3. 2. 2) и (3. 2. 3) добиваме

$$6 a_3 b_2 (a_2^2 b_1^2 - 4 a_1 a_3 b_1^2 + 4 a_1^2 b_2^2) E$$

$$- 12 a_1^3 a_3 b_1 b_2^2 D + 6 a_1 a_2^3 b_1^2 b_2 D - 2 a_2^4 b_1^3 D$$

$$+ 24 a_0 a_1^2 a_3 b_2^3 D + 6 a_0 a_2^2 a_3 b_1^2 b_2 D$$

$$- 36 a_0 a_1 a_3^2 b_1^2 b_2 D + 24 a_1 a_2^3 b_1^2 b_2 - 6 a_2^4 b_1^3$$

$$- 24 a_1^2 a_2^2 b_1 b_2^2 = 0.$$

Под претпоставка дека

$$a_2 b_1 - 2 a_1 b_2 \neq 0$$

следува

(3. 2. 11) $E = [(12 a_1^3 a_3 b_1 b_2^2 - 6 a_1 a_2^3 b_1^2 b_2$

$$+ 2 a_2^4 b_1^3 - 24 a_0 a_1^2 a_3 b_2^3 - 6 a_0 a_2^2 a_3 b_1^2 b_2$$

$$+ 36 a_0 a_1 a_3^2 b_1^2 b_2) D + 24 a_1^2 a_2^2 b_1 b_2^2$$

$$- 24 a_1 a_2^3 b_1^2 b_2 + 6 a_2^4 b_1^3]/6 a_3 b_2 (a_2 b_1$$

$$- 2 a_1 b_2)^2.$$

Од (3. 2. 3) имаме

(3. 2. 12) $B = [9 a_3 b_2 E + (3 a_1 a_2 b_2 - a_2^2 b_1$

$$- 9 a_0 a_3 b_2) D + 9 a_1 a_2 b_2 - 3 a_2^2 b_1$$

$$- 27 a_0 a_3 b_2]/9 a_3 b_2,$$

а од (3.2.9)

(3.2.13) $C = [(4a_2^2 b_1 + 18a_1 a_3 b_1) E$

$- (6a_0 a_3 b_2 - 2a_2^2 b_1 - 2a_1 a_2 b_2) B$

$+ (8a_1^3 b_2 - a_1^2 a_2 b_1 - 8a_0 a_2^2 b_1$

$+ 18a_0^2 a_3 b_2) D + 10a_1^3 b_2 - 3a_1^2 a_2 b_1$

$- 18a_0 a_1 a_2 b_2 - 18a_0 a_2^2 b_1 - 27a_0^2 a_3 b_2$

$+ 12a_1 a_2^2 b_0 + 9a_1^2 a_3 b_0]/6a_3 b_2.$

Ако пак

$$a_2^3 b_1 - 6a_1 a_2 a_3 b_1 + 6a_1^2 a_3 b_2 = 0$$

лесно се покажува дека и

$$a_2 b_1 - 2a_1 b_2 = 0$$

и обратно, претпоставката дека

$$a_2 b_1 - 2a_1 b_2 = 0$$

доведува до

$$a_2^3 b_1 - 6a_1 a_2 a_3 b_1 + 6a_1^2 a_3 b_2 = 0.$$

Бидејќи пак броителот на дропката од (3.2.11) кога

$$a_2 b_1 - 2a_1 b_2 = 0$$

станува нула, можеме D и E да ги избираме произволно.

Во случај кога

$$a_2^3 b_1 - 6a_1 a_2 a_3 b_1 + 6a_1^2 a_3 b_2 \neq 0,$$

следува

$$D = -9/4,$$

а

$E = (96a_1^2 a_2^2 b_1 b_2^2 - 108a_1^3 a_3 b_1 b_2^2$

$- 42a_1 a_2^3 b_1^2 b_2 + 6a_2^4 b_1^3 + 216a_0 a_1^2 a_3 b_2^3$

$+ 54a_0 a_2^2 a_3 b_1^2 b_2$

$- 324a_0 a_1 a_3^2 b_1^2 b_2)/24a_3 b_2 (a_2 b_1 - 2a_1 b_2).$

Ако во равенката (10) ги замениме A, B, C, D, E и ги примениме добиените услови, по извршените трансформации, се покажува дека истата претставува идентитет.

3.3. $a_3 \neq 0,\ b_3 = 0,\ b_2 = 0,\ a_2^2 - 3a_1 a_3 \neq 0.$

Равенките (1) и (2) се задоволени.

Равенките (3) и (4) стануваат соодветно

(3.3.1) $2A - 3D - 9 = 0,$

(3.3.2) $14a_2 b_1 A - 21a_2 b_1 D - 27a_3 b_0$

$- 54a_2 b_1 = 0.$

Равенките (3.3.1) и (3.3.2) не ќе бидат противречни ако биде исполнет условот

(3.3.3) $3a_3 b_0 - a_2 b_1 = 0.$

Равенката (5) се трансформира во

(3.3.4) $(10a_2^2 b_1 + 12a_1 a_3 b_1) A - (16a_2^2 b_1$

$+ 15a_1 a_3 b_1) D = 36a_2^2 b_1 + 27a_1 a_3 b_1$

$+ 54a_2 a_3 b_0.$

Од (3.3.1) и (3.3.4) добиваме

$D = (54a_2 a_3 b_0 - 9a_2^2 b_1$

$- 27a_1 a_3 b_1)/b_1 (3a_1 a_3 - a_2^2),$

од каде што врз основа од (3.3.3) следува

(3.3.5) $D = -9,$

а од (3.3.1) според (3.3.5)

(3.3.6) $A = -9.$

Равенките (6), (7) и (8) во врска со (3.3.5) и (3.3.6) се трансформираат соодветно во

(3.3.7) $9a_3^2 E - 6a_3^2 B = 9a_1 a_2 a_3 - 2a_2^3$

$- 27a_0 a_3^2,$

(3.3.8) $9a_3^2 E - 6a_3^2 B + 27a_0 a_3^2 - 9a_1 a_2 a_3$

$2a_2^3 = 0.$

(3.3.9) $(2a_2^2 a_3 + 3a_1 a_3^2) E - (a_2^2 a_3 + 3a_1 a_3^2) B$

$+ 27a_0 a_1 a_3^2 - 9a_1^2 a_2 a_3 + 2a_1 a_2^2 = 0.$

Јасно е дека (6) и (7) се еквивалентни. Од (3.3.8) и (3.3.9) добиваме

(3.3.10) $E = (27a_1^2 a_2 a_3^2 - 15a_1 a_2^3 a_3 + 2a_2^5$

$- 81a_0 a_1 a_3^3 + 27a_0 a_2^2 a_3^2)/3a_3^2 (a_2^2 - 3a_1 a_3),$

(3.3.11) $B = (54a_1^2 a_2 a_3^2 - 30a_1 a_2^3 a_3 + 4a_2^5$

$- 162a_0 a_1 a_3^3 + 54a_0 a_2^2 a_3^2)/3a_3^2 (a_2^2 - 3a_1 a_3).$

Од равенката (9) имајќи ги предвид (3.3.3), (3.3.5) и (3.3.6) добиваме

(3.3.12) $C = (81a_0^2 a_1 a_3^3 - 27a_0^2 a_2^2 a_3^2 + a_1^2 a_2^4$

$$-7a_1^3a_2^2a_3+12a_1^4a_3^2-54a_0a_1^2a_3^2$$

$$+30a_0a_1a_2^3-4a_0a_2^5)/3a_3^2(a_2^2-3a_1a_3).$$

Равенката (10) според (3. 3. 3), (3. 3. 5), (3. 3. 6), (3. 3. 10), (3. 3. 11) и (3. 3. 12) е задоволена.

3. 4. $a_3 \neq 0,\ b_3 = 0,\ b_2 = 0,\ a_2^2 - 3a_1a_3 = 0.$

Равенките (1) и (2) се задоволени.

Равенките (3) и (4) стануваат соодветно

(3. 4. 1) $\quad 2A - 3D - 9 = 0,$

(3. 4. 2) $\quad 14a_2b_1A - 21a_2b_1D - 27a_3b_0$

$\qquad -54a_2b_1 = 0.$

Равенките (3. 4. 1) и (3. 4. 2) не ќе противречат само ако

(3. 4. 3) $\quad 3a_3b_0 - a_2b_1 = 0.$

Равенката (5) во врска со (3. 4. 3) е еквивалентна со (3. 4. 1).

Равенките (6), (7), (8), (9) и (10) имајќи ги предвид (3. 4. 1) и (3. 4. 3) се трансформираат соодветно во

(3. 4. 5) $\quad 6a_3B - a_1a_2D + 9a_0a_3D - 9a_3E$

$\qquad -6a_1a_2 + 54a_0a_3 = 0,$

(3. 4. 6) $\quad 2a_2B + 3a_0a_2D - a_1^2D - 3a_2E$

$\qquad +18a_0a_2 - 6a_1^2 = 0,$

(3. 4. 7) $\quad 6a_3B - 9a_3E - a_1a_2D + 9a_0a_3D$

$\qquad -6a_1a_2 + 54a_0a_3 = 0,$

(3. 4. 8) $\quad 2a_1a_2B + 6a_0a_3B + 6a_3C$

$\qquad +2a_0a_1a_2D + 9a_0^2a_3D - a_1^3D - 4a_1a_2E$

$\qquad +27a_0^2a_3 + 18a_0a_1a_2 - 7a_1^3 = 0,$

(3. 4. 9) $\quad 6a_0a_2a_3B + 6a_2a_3C + 9a_0^2a_2a_3D$

$\qquad -3a_0a_1^2a_3D - 3a_1^2a_3E + 27a_0^2a_2a_3$

$\qquad -a_1^3a_2 = 0.$

Со елиминирањето на C од (3. 4. 8) и (3. 4. 9) ја добиваме равенката

(3. 4. 10) $\quad 2a_2B + 3a_0a_2D - a_1^2D - 3a_2E$

$\qquad +18a_0a_2 - 6a_1^2 = 0.$

Јасно е дека (3. 4. 10) и (3. 4. 6) како (3. 4. 5) и (3. 4. 7) се еквивалентни.

Од равенката (3. 4. 5) добиваме

$$B = [(6a_1a_2 - 54a_0a_3) + (a_1a_2 - 9a_0a_3)D$$
$$+ 9a_3E]/6a_3,$$

а од (3. 4. 9)

$$C = [(a_1^3 - 27a_0^2a_3) + (3a_0a_1a_2 - 9a_0^2a_3)D$$
$$+ 3a_1a_2E - 6a_0a_3B]/6a_3.$$

Константите D и E се произволни.

4. 1. $a_3 = b_3 = 0,\ a_2 \neq 0,\ b_2 \neq 0,\ \alpha_{12} \neq 0.$

Равенките (1), (2), (3) и (4) се задоволени.

Од (5) добиваме

(4. 1. 1) $\quad D = -1,$

а од (6) според (4. 1. 1)

(4. 1. 2) $\quad A = 2.$

Од (7) имајќи ги во предвид (4. 1. 1) и (4. 1. 2) добиваме

(4. 1. 3) $\quad E = (2a_2\gamma_{02} - a_1\alpha_{12})/2a_2b_2.$

Од равенката (8) во врска со (4. 1. 1), (4. 1. 2) и (4. 1. 3) следува

(4. 1. 4) $\quad B = (a_1b_2 - 8a_0a_2b_2 + 2a_1a_2b_1$

$\qquad -4a_2^2b_0)/2a_2b_2.$

Равенката (9) според (4. 1. 1), (4. 1. 2), (4. 1. 3) и (4. 1. 4) постанува идентитет.

Од (10) имајќи ги во предвид (4. 1. 1), (4. 1. 2), (4. 1. 3) и (4. 1. 4) добиваме

$$C = (2a_0b_2 - a_1b_1 + 2a_2b_0)(4a_0a_2 - a_1^2)/4a_2b_2.$$

4. 2. $a_3 = b_3 = 0,\ a_2 \neq 0,\ b_2 \neq 0,\ \alpha_{12} = 0.$

Од (5) добиваме

(4. 2. 1) $\quad D = -1,$

а равенката (6) според (4. 2. 1) е задоволена.

Од (7) во врска со (4. 2. 1) следува

(4. 2. 2) $\quad E = \gamma_{02}/b_2.$

Равенките (8), (9) и (10) имајќи ги во предвид (4. 2. 1) и (4. 2. 2) се задоволени.

Константите A, B, C се произволни.

4. 3. $a_2 = a_3 = b_3 = 0,\ b_2 \neq 0.$

Равенките (1), (2), (3), (4), (6) и (7) се задоволени.

Равенката (8) постанува

(4. 3. 1) $\quad 2A+2D+1=0.$

Равенките (9) и (10) според (4. 3. 1.) се трансформираат во

(4. 3. 2) $\quad 2b_2B+2b_2E-2a_0b_2D+a_1b_1D$

$-2a_0b_2+a_1b_1=0,$

(4. 3. 3) $\quad 2a_0b_2B+2b_2C+a_1b_1E-2a_0^2b_2D$

$+a_0a_1b_1D+a_1^2b_0-a_0^2b_2=0.$

Од (4. 3. 2) добиваме

$$B=[(2a_0b_2-a_1b_1)(1+D)-2b_2E]/2b_2,$$

а од (4. 3. 3)

$$C=[a_0^2b_2-a_1^2b_0)+(2a_0^2b_2-a_0a_1b_1)D$$
$$-a_1b_1E-2a_0b_2B]/2b_2.$$

Константите D и E се произволни

4. 4. $\quad a_3=b_2=b_3=0,\ a_2\neq 0.$

Равенките (1), (2), (3), (4) и (5) се задоволени.

Равенката (6) станува

(4. 4. 1) $\quad A-2D-4=0,$

а од (7) според (4. 4. 1) следува условот

(4. 4. 2) $\quad a_1b_1-2a_2b_0=0.$

Равенките (8), (9) и (10) во врска со (4. 4. 1) и (4. 4. 2) се трансформираат соодветно во

(4. 4. 3) $\quad 2a_2B-4a_2E+4a_0a_2D-a_1^2D$

$-4a_1^2+16a_0a_2=0,$

(4. 4. 4) $\quad 2a_2B-4a_2E+4a_0a_2D-a_1^2D$

$-4a_1^2+16a_0a_2=0,$

(4. 4. 5) $\quad 4a_0a_2^2B+4a_2^2C-2a_1^2a_2E$

$+8a_0^2a_2^2D-2a_0a_1^2a_2D+16a_0^2a_2^2$

$-a_1^4=0.$

Од (4. 4. 3) добиваме

$$B=[(a_1^2-4a_0a_2)(D+4)+4a_2E]/2a_2,$$

а од (4. 4. 5)

$$C=[(a_1^2-4a_0a_2)(a_1^2+4a_0a_2+2a_0a_2D)$$
$$+2a_1^2a_2E-4a_0a_2^2B]/4a^2.$$

Константите D и E се произволни.

4. 5. $\quad a_3=a_2=b_3=b_2=0.$

Равенките (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) и (8) се задоволени.

Од (9) добиваме

(4. 5. 1) $\quad D=-1,$

а од (10)

$$E=\alpha_{01}/b_1.$$

Константите A, B, C се произволни.

На напред изнесените случаи им одговараат соодветно примерите:

1. 1. $\quad 1^\circ\ (9x^2-62x+48)y''-2(3x+5)y'+6y=0,$

$x=1+t+3t^2+3t^3,$

$y=1+t+2t^2+t^3;$

$2^\circ\ (3x^2-6x+3)y''-(x-1)y'+y=0,$

$x=2+3t+3t^2+3t^3,$

$y=1-t-t^2-t^3;$

1. 2. $\quad 1^\circ\ (3x^2-6x+5)y''-(3x-2)y'+3y=0,$

$x=2+3t+3t^2+t^3,$

$y=1-t-3t^2-t^3;$

$2^\circ\ (18x^2-97x+72)y''-(6x+38)y'+6y=0,$

$$x = 1 + t + 3t^2 + 3t^3,$$
$$y = 3 + 2t + t^2 + t^3;$$

2. 1. 1° $(16x^2 - 6x - 45)y'' - 6(4x - 3)y' + 24y = 0,$
$$x = 2 - t + 2t^2,$$
$$y = 3 - t - t^2 + 8t^3;$$

2° $(12x^2 - 25x + 12)y'' - 2(9x - 5)y' + 18y = 0,$
$$x = 1 + t + t^2,$$
$$y = \frac{11}{9} + 3t + 2t^2 + t^3;$$

2. 2. 1° $(12x^2 - 13x + 3)y'' - 2(x - 2)y' - 6y = 0,$
$$x = 1 + t + t^2,$$
$$y = 1 + 3t + 3t^2 + 2t^3;$$

2° $(48x^2 - 80x + 25)y'' + 20y' - 36y = 0,$
$$x = 1 + t - t^2,$$
$$y = -1 + t + 3t^2 - 2t^3;$$

2. 3. $(3x^2 - 16x + 10)y'' + 28y' - 18y = 0,$
$$x = 1 + t,$$
$$y = 4 + 3t + 2t^2 + t^3;$$

2. 4. $(7x^2 - 4x - 11)y'' - 12(x - 2)y' - 6y = 0,$
$$x = 1 + 2t,$$
$$y = 1 + 3t + 3t^2 + t^3;$$

3. 1. 1° $(27x^2 - 76x + 44)y'' + 16y' + 6y = 0,$
$$x = 1 + t + t^2 - t^3,$$
$$y = -11 + 6t + 9t^2;$$

2° $(729x^2 - 1404x + 676)y'' + 162y = 0,$
$$x = 1 + \frac{1}{3}t + t^2 + t^3,$$
$$y = -1 + 9t^2;$$

3. 2. 1° $(27x^2 - 140x + 200)y'' + (27x - 70)y' - 12y = 0,$
$$x = 4 + 3t + 2t^2 + t^3,$$
$$y = 14 + 12t + 9t^2;$$

2° $(54x^2 - 120x + 64)y'' - 9xy' + 18y = 0,$
$$x = 1 + t + 3t^2 + 3t^3,$$
$$y = 1 + 6t + 9t^2;$$

3. 3. $(27x^2 - 40x + 16)y'' + (27x - 20)y' - 3y = 0,$
$$x = 1 + t + t^2 + t^3,$$

$$y = 1 + 3t;$$

3\. 4. 1° $(81x^2 - 64)y'' + 108xy' - 18y = 0,$

$$x = 1 + t + 3t^2 + 3t^3,$$

$$y = 1 + 3t;$$

2^0 $(729x^2 - 1404x + 676)y'' + 162y = 0,$

$$x = 1 + \frac{1}{3}t + t^2 + t^3,$$

$$y = 1 + 3t;$$

4\. 1. 1° $[8\alpha x^2 + (2 - 16\alpha - 4\alpha^2)x + 4\alpha^2 + 7\alpha - 2]y'' - (4\alpha x + 2\alpha^2 - 4\alpha + 2)y' + 4\alpha y = 0,$

$$\begin{aligned} x &= 1 + t + \alpha t^2, \\ y &= 1 + \alpha t + t^2; \end{aligned}$$ (α, произволна константа)

2° $(8x^2 - 26x + 15)y'' - 4(x + 1)y' + 4y = 0,$

$$x = 1 + t + t^2,$$

$$y = 1 - t + t^2;$$

4\. 3. $(3x^2 + 2x + 4)y'' - 2(x + 2)y' - 2y = 0,$

$$x = 1 + 2t,$$

$$y = 3 + t + 2t^2;$$

4\. 4. $3(16x^2 - 81)y'' + 8(2x + 9)y' + 4y = 0,$

$$x = 2 + t - t^2,$$

$$y = 1 - 2t.$$

Résumé

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE*

ILIJA A. ŠAPKAREV

Dans cette Note est donnée la réponse au problème de Mitrinović:

Examiner si l' éguation différentielle

(a) $(Ax^2 + Bx + C)y'' + (Dx + E)y' + y = O$

admet des solution particulières de la forme suivante

(b) $$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \\ y &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3, \end{aligned}$$

où

(c) $A, B, C, D, E, a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3,$

sont des constantes convenablement choisies.

Remplaçons x et y donnés par (b), et les dérivées

$$y'_x = \frac{b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2}{a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2},$$

$$y''_x = \frac{2\alpha_{12} + 6\alpha_{13} t + 6\alpha_{23} t^2}{(a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2)^3}$$

$$\left(\alpha_{ik} = \begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix}, \quad i, k = 0, 1, 2, 3\right)$$

dans l' équation (a). Nous obtenons ainsi une équation algébrique du neuvième degré en t, laquelle sera nommée: équation (E).

---

*) Un résumé de cet article a paru dans les **Publications de la Faculté d' Électrotechnique de l' Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique, № 74, 1962.**

Pour que (b) soit une solution de l' équation (a), il faut et il suffit que le polynôme de l' équation (E) s' annulle identiquement. On obtient de cette manière les dix équations entre les coefficients (α).

On peut déterminer A, B, C, D, E en fonction des $a_k, b_k\ (k=0, 1, 2, 3)$ et alors parmi les a_k, b_k subsistent certaines conditions.

L' équation (a) a des solutions particulières de la forme (b) dans les cas suivants:

1.1. $a_3 b_3 \neq 0,\ \alpha_{23} \neq 0,\ 2a_2 \alpha_{23} - 3a_3 \alpha_{13} = 0,$

$a_2^2 - 3a_1a_3 = 0,$

$D = -1,\ A = 3/2,\ E = (6a_3 \alpha_{03} - 3a_2 \alpha_{13} + 4a_3 \alpha_{12}) / 6a_3 b_3,$

$B = [(5a_2a_3b_2 + 3a_2^2b_3 - 6a_1a_3b_3)\alpha_{13} + (4a_2a_3b_1 - 18a_0a_3b_3 - 18a_3^2b_0)\alpha_{23} - 12a_3^2b_2\alpha_{12}] / 6a_3b_3\alpha_{23},$

$C = [45a_1^2\alpha_{03} - (2a_1^2 + 6a_0a_2)\alpha_{12} - 48a_0a_1\alpha_{13} - 9a_0^2\alpha_{23} - (2a_2\alpha_{12} + 6a_1\alpha_{13} + 6a_0\alpha_{23})B - (30a_1a_3b_1 + 15a_1^2b_3)E] / 6\alpha_{23};$

1.2. $a_3b_3 \neq 0,\ \alpha_{23} = 0,\ \alpha_{13} \neq 0,\ a_2^2 - 3a_1a_3 = 0,$

$D = -1,\ A = 3,\ E = (3\alpha_{03} - \alpha_{12}) / 3b_3,$

$B = [9a_3^2\alpha_{01} + 126a_1a_3\alpha_{03} - 40a_1a_3\alpha_{12} - 36a_0a_3\alpha_{13} - (9a_3^2b_1 + 126a_1a_3b_3)E] / 6a_3\alpha_{13},$

$C = [4a_1a_2\alpha_{01} + 2a_1^2\alpha_{02} - 12a_0a_1\alpha_{12} - 18a_0^2\alpha_{13} - (2a_1\alpha_{12} + 6a_0\alpha_{13})B - (4a_1a_2b_1 + 2a_1^2b_2)E] / 6\alpha_{13};$

1.3. $a_3b_3 \neq 0,\ \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0 \Rightarrow \alpha_{12} = 0,$

$D = -1,\ E = \alpha_{03}/b_3,$

A, B, C sont des constantes arbitraires;

2.1. $a_3 = 0,\ b_3 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ 2a_2b_2 - 3a_1b_3 \neq 0$ suivi de $4a_2\alpha_{12} - 3a_1^2b_3 = 0$ ou $9a_2b_0b_3 + b_2\alpha_{12} - 3a_1b_1b_3 = 0,$

$D = -1,\ A = 2/3,\ E = (a_1a_2\alpha_{12} - 2a_2^2\alpha_{02} + 3a_0a_1a_2b_3 - a_1^3b_3) / a_2(3a_1b_3 - 2a_2b_2),$

$B = (8a_1a_2b_2 + 12a_0a_2b_3 - 8a_2^2b_1 - 9a_1^2b_3 - 36a_2b_3E) / 18a_2b_3,$

$C = [16a_0a_1a_2b_2 + 20a_0a_2^2b_1 - 12a_0^2a_2b_3 - 15a_0a_1^2b_3 - 36a_1a_2^2b_0 - a_1^2\alpha_{12} - (18a_1^2b_3 + 18a_0a_2b_3 + 6a_2\alpha_{12})B - (12a_2^2b_1 + 24a_1a_2b_2 + 9a_1^2b_3)E] / 18a_2b_3;$

2.2. $a_3 = 0,\ b_3 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ 2a_2b_2 - 3a_1b_3 = 0,$

$a_1^2b_2 - 3a_1a_2b_1 + 6a_2^2b_0 = 0,$

$A = -(6D + 4)/3,$

$E = [(72a_0a_2^2b_1b_3\alpha_{12} - 36a_1^2a_2b_1b_3\alpha_{12} + 24a_2^3b_1^2\alpha_{12} + 9a_1^3b_2b_3\alpha_{12} - 18a_0a_1^2a_2b_2^2b_3)D + 32a_2^3b_1^2\alpha_{12} - 24a_1^2a_2b_1b_3\alpha_{12} + 6a_1^3b_2b_3\alpha_{12} - 6a_1^3a_2b_1b_2b_3)] / 18a_2b_3(a_1b_2 - 2a_2b_1)^2,$

$B = [(36a_0a_2b_3 + 9a_1^2b_3 - 24a_2^2b_1)D + 48a_0a_2b_3 + 12a_1^2b_3 - 32a_2^2b_1 - 36a_2b_3E] / 18a_2b_3,$

$C = [(6a_2^2b_1 - 18a_1a_2b_2 - 18a_0a_2b_3)B - (12a_2^2b_1 + 45a_1^2b_3)E + (36a_0^2a_2b_3 + 42a_0a_1a_2b_2 - 36a_0a_2^2b_1 - 27a_1^2a_2b_1 + 6a_1^3b_2)D + (24a_0^2a_2b_3 - 16a_0a_2^2b_1 - 36a_1a_2^2b_0 + 48a_0a_1a_2b_2 + 5a_1^3b_2 - 26a_1^2a_2b_1)] / 18a_2b_3,$

D est une constante arbitraire;

2.3. $a_3 = 0,\ b_3 \neq 0,\ a_2 = 0,\ b_2^2 - 3b_1b_3 \neq 0,$

$A = -(3D + 1)/6,$

$E = [3(a_1b_2 - 3a_0b_3)(b_2^2 - 3b_1b_3)D + 27a_1b_0b_3^2 - 9a_1b_1b_2b_3 - 2a_1b_2^3] / 9b_3(b_2^2 - 3b_1b_3),$

$B = [(9a_0b_3 - 3a_1b_2)D + (6a_0b_3 - 2a_1b_2) - 9b_3E] / 18b_3,$

$C = [4a_0a_1b_2 + 6a_0^2b_3 - 6a_1^2b_1 + (18a_0^2b_3 - 6a_1^2b_1)D - (12a_1b_2 + 36a_0b_3)B - 12a_1b_2E] / 36b_3,$

D est une constante arbitraire;

2.4. $a_3 = 0,\ b_3 \neq 0,\ a_2 = 0,\ b_2^2 - 3b_1b_3 = 0,$

$9b_0b_3 - b_1b_2 = 0,$

$A = -(3D + 1)/6,\quad B = [(3a_0b_3 - a_1b_2)$

$X(3D+2)-9b_3E]/18b_3$,

$C=[4a_0a_1b_2+6a_0^2b_3-6a_1^2b_1+(18a_0^2b_3-6a_1^2b_1)D-(12a_1b_2+36a_0b_3)B-12a_1b_2E]/36b_3$,

D et E sont des constantes arbitraires;

3.1. $a_3 \neq 0,\ b_3=0,\ b_2 \neq 0,\ 2a_2b_2-3a_3b_1 \neq 0$, $3a_3^2b_0-a_2a_3b_1-(2a_1a_3-a_2^2)b_2=0$ suivi de $a_2^2-3a_1a_3=0$ ou $4b_2\alpha_{12}-3a_3b_1^2=0$,

$D=0,\ A=9/2$,

$E=(9a_1a_2a_3^2b_1b_2-21a_1a_2^2a_3b_2^2+18a_2^2a_3^2b_0b_2-27a_1a_3^3b_0b_2+8a_2^4b_2^2-9a_2^2a_3^2b_1^2-27a_1a_3^3b_1^2+54a_2a_3^3b_0b_1)/3a_3^2b_2(2a_2b_2-3a_3b_1)$,

$B=(18a_3^2b_2E-9a_2^2a_3b_1-27a_1a_3^2b_1-54a_0a_3^2b_2+8a_2^3b_2+54a_2a_3^2b_0)/6a_3^2b_2$,

$C=[10a_1^3b_2-3a_1^2a_2b_1+18a_0a_1a_2b_2-18a_0a_2^2b_1-54a_0a_3b_1-27a_0^2a_3b_2+12a_1a_2^2b_0+9a_1^2a_3b_0+(4a_2^2b_1+6a_1a_3b_1+8a_1a_2b_2)E+(2a_1a_2b_2-2a_2^2b_1-6a_1a_3b_1-6a_0a_3b_2)B]/6a_3b_2$;

3.2. $a_3 \neq 0,\ b_3=0,\ b_2 \neq 0,\ 2a_2b_2-3a_3b_1=0$, $4a_1b_2-a_2b_1-6a_3b_0=0$,

$D=-9/4,\quad A=-9/4$,

$E=[(12a_1^3a_3b_1b_2^2-6a_1a_2^3b_1^2b_2+2a_2^4b_1^3-24a_0a_1^2a_3b_2^3-6a_0a_2^2a_3b_1^2b_2+36a_0a_1a_3^2b_1^2b_2)D+24a_1^2a_2^2b_1b_2^2-24a_1a_2^3b_1^2b_2+6a_2^4b_1^3]/6a_3b_2(a_2b_1-2a_1b_2)^2$

$B=[9a_3b_2E+(3a_1a_2b_2-a_2^2b_1-9a_0a_3b_2)D+9a_1a_2b_2-3a_2^2b_1-27a_0a_3b_2]/9a_3b_2$,

$C=[(4a_2^2b_1+18a_1a_3b_1)E-(6a_0a_3b_2-2a_2^2b_1-2a_1a_2b_2)B+(8a_1^3b_2-a_1^2a_2b_1-8a_0a_2^2b_1+18a_0^2a_3b_2)D+10a_1^3b_2-3a_1^2a_2b_1-18a_0a_1a_2b_2-27a_0^2a_3b_2-18a_0a_2^2b_1+12a_1a_2^2b_0+9a_1^2a_3b_0]/6a_3b_2$;

3.3. $a_3 \neq 0,\ b_3=0,\ b_2=0,\ a_2^2-3a_1a_3 \neq 0$, $3a_3b_0-a_2b_1=0$,

$D=-9,\ A=-9$,

$E=(27a_1^2a_2a_3^2-15a_1a_2^3a_3+2a_2^5-81a_0a_1a_3^3+27a_0a_2^2a_3^2)/3a_3^2(a_2^2-3a_1a_3)$,

$B=2E$,

$C=(81a_0^2a_1a_3^3-27a_0^2a_2^2a_3^2+a_1^2a_2^4-7a_1^3a_2^2a_3+12a_1^4a_3^2-54a_0a_1^2a_3^2+30a_0a_1a_2^4-4a_0a_2^5)/3a_3^2(a_2^2-3a_1a_3)$;

3.4. $a_3 \neq 0,\ b_3=0,\ b_2=0,\ a_2^2-3a_1a_3=0$, $3a_3b_0-a_2b_1=0$,

$A=(3D+9)/2$,

$B=[(6a_1a_2-54a_0a_3)+(a_1a_2-9a_0a_3)D+9a_3E]/6a_3$,

$C=[(a_1^3-27a_0^2a_3)+(3a_0a_1a_2-9a_0^2a_3)D+3a_1a_2E-6a_0a_3B]/6a_3$,

D et E sont des constantes arbitraires;

4.1. $a_3=b_3=0,\ a_2b_2 \neq 0,\ \alpha_{12} \neq 0$,

$D=-1,\ A=2,\ E=(2a_2\alpha_{01}-a_1\alpha_{12})/2a_2b_2$,

$B=(a_1^2b_2-8a_0a_2b_2+2a_1a_2b_1-4a_2^2b_0)/2a_2b_2$,

$C=2a_0b_2-a_1b_1+2a_2b_0)(4a_0a_2-a_1^2)/4a_2b_2$;

4.2. $a_3=b_3=0,\ a_2b_2 \neq 0,\ \alpha_{12}=0$,

$D=-1,\ E=\alpha_{02}/b_2$

A, B, C sont des constantes arbitraires;

4.3. $a_3=b_3=0,\ a_2=0,\ b_2 \neq 0$,

$A=-(2D+1)/2$,

$B=[(2a_0b_2-a_1b_1)(D+1)-2b_2E]/2b_2$,

$C=[(a_0^2b_2-a_1^2b_0)+(2a_0^2b_2-a_0a_1b_1)D-a_1b_1E-2a_0b_2B]/2b_2$,

D et E sont des constantes arbitraires;

4.4. $a_3=b_3=0,\ a_2 \neq 0,\ b_2=0,\ a_1b_1-2a_2b_0=0$,

$A=2D+4$,

$B = [(a_1^2 - 4a_0a_2)(D+4) + 4a_2E]/2a_2$,

$C = [(a_1^2 - 4a_0a_2)(a_1^2 + 4a_0a_2 + 2a_0a_2D)$
$+ 2a_1^2a_2E - 4a_0a_2^2B]/4a_2^2$,

D et E sont des constantes arbitraires;

4.5. $a_3 = b_3 = a_2 = b_2 = 0$,
$D = -1, \quad E = \alpha_{01}/b_1$,

A, B, C sont des constantes arbitraires.

Les exemples pour chaque de ces cas se trouvent dans le texte en macédonien.

Nous n' avons pas rencontré des équations intégrables du type considéré chez:

E. Kamke; Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. I, 1942, Leipzig.