МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
1 (16), 1964, стр. 49—50.

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE D'ORDRE n DONT LA SOLUTION GÉNÉRALE EST UN POLYNÔME DE n-ÈME DEGRÉ

Ilija A. Šapkarev

(Présenté le 19 septembre 1963)

1. Dans l'article [1] M. Angelesco a demontré que l'équation différentielle

$$(1.1)\quad \sum_{i=1}^{q}(-1)^i\binom{p-i}{q-i}\frac{d^{q-i}Q}{dx^{q-i}}\,\frac{d^i y}{dx^i}=0\quad \left(Q=\prod_{\nu=1}^{q}(x-x_\nu),\ \text{tous les } x_\nu \text{ sont différents}\right)$$

a comme solution générale

$$(1.2)\qquad y=\sum_{\nu=1}^{q} a_\nu\,(x-x_\nu)^p \qquad (a_\nu=\text{const}).$$

Dans cette Note, nous allons montrer que l'équatlon différentielle

$$(1.3)\qquad P_n\,y^{(n)}+P_{n-1}\,y^{(n-1)}+\cdots+P_0\,y=0,$$

où $P_0=\text{const}\ (\neq 0)$, aura comme solution générale un polynôme du degré n si, et seulement si,

$$(1.4)\qquad P_i'+P_{i-1}=0 \qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n).$$

Dans ce cas, la solution générale de (1.3) est donnée par

$$(1.5)\qquad y=\sum_{k=1}^{n} A_k\left[x^k+\frac{(-1)^{k+1}a_{n-k}}{\binom{n}{k}a_n}\right],$$

avec A_k $(k=1,\,2,\,\ldots,\,n)$ constantes d'intégration, et $P_n=\sum_{i=0}^{n} a_i\,x^i$.

Si la condition (1.4) est remplie, l'équation (1.3) rentre dans la classe des équations (1.1).

2. Par différentiation de l'équation (1.3) on obtient

$$(2.1)\qquad P_n\,y^{(n+1)}+(P_n'+P_{n-1})\,y^{(n)}+\cdots+(P_1'+P_0)\,y'=0.$$

Il est évident que l'équation (2.1) a comme solution particulière une constante. Par suite, sous la condition que la solution générale de l'équation (1.3) soit un polynôme du degré n, la solution générale de (2.1) sera aussi un polynôme du degré n. Dans ce cas, on a $y^{(n+1)}=0$ et l'équation (2.1) devient

$$(2.2)\qquad (P_n'+P_{n-1})\,y^{(n)}+(P'_{n-1}+P_{n-2})\,y^{(n-1)}+\cdots+(P_1'+P_0)\,y'=0.$$

Étant donné que l'équation (2.2), dont l'ordre est n, a $n+1$ solutions particulières linéairement indépendantes, elle sera satisfaite seulement si (1.4) est rempli. Donc, la condition (1.4) est nécessaire pour que l'équation (1.3) ait comme solution générale un polynôme du degré n.

Soit la condition (1.4) satisfaite. Par différentiation de l'équation (1.3), il vient

$$y^{(n+1)}=0. \tag{2.3}$$

De (2.3) on voit que la condition (1.4) est suffisante pour que l'équation (1.3) ait comme solution générale un polynôme du degré n.

3. Il est facile de montrer que le polynôme

$$y=A_n\, x^n+A_{n-1}\, x^{n-1}+\cdots+A_0 \qquad (A_i\neq 0,\ i=1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

sera la solution générale de l'équation (1.3), si l'on admet

$$A_0=\alpha_n\, A_n+\alpha_{n-1}\, A_{n-1}+\cdots+\alpha_1\, A_1,$$

où

$$\alpha_k=\frac{(-1)^{k+1}\, a_{n-k}}{\binom{n}{k} a_n}.$$

Par suite, la solution générale de (1.3) est (1.5).

Pour $p=q$, l'équation (1.1) devient (1.3) si la condition (1.4) est remplie.

RÉFÉRENCES

[1] M. Angelesco: *Sur certaines équations différentielles complètement intégrables*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 1921, t. 172, pp. 40—41.

[2] D. S. Mitrinović et D. Ž. Djoković: *Dopune Kamkeovom delu VII*, Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique, № 82, 1962, p. 16—18.

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
1 (16), 1964, стр. 50—51.

SUR UN CRITÈRE POUR DÉTERMINER LE RANG D'UNE MATRICE

D. S. Mitrinović

(Présenté le 19. septembre 1963)

L. Brand [1] a démontré le théorème suivant:

La matrice $\begin{Vmatrix} P & Q \\ R & S \end{Vmatrix}$, où les matrices P, Q, R, S sont des types respectifs suivants $r\times r$, $r\times i$, $k\times r$, $k\times i$ et dét $P\neq 0$, a le rang r si $RP^{-1}Q=S$ et dans ce cas seulement.

Le même auteur ne citant pas son article antérieur [1] a de nouveau [2] démontré le même théorème, en donnant en outre son application à la solution d'un ensemble quelconque d'équations algébriques linéaires.

Cependant le théorème énoncé plus haut n'est nullement nouveau. A ce propos *voir* les livres [3] et [4].

RÉFÉRENCES

[1] L. Brand: *Test for the rank of a matrix*, Mathematics Magazine, vol 33, № 5, 1960, p. 277—278.

[2] L. Brand: *The solution of linear algebraic equations*, The Mathematical Gazette, vol. 46, № 357, 1962, p. 203—207.

[3] Ф. Р. Гантмахер: *Теория матриц* Moskva 1954, p. 46.

[4] P. I. Richards: *Manual of Mathematical physics*, London — New York — Paris — Los Angeles 1959, p. 305.