МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
1 (16), 1964 стр. 95—101.

Ilija A. Šapkarev

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DES ORDRES 5 ET 6 DONT L'INTÉGRATION SE RAMÈNE À CELLE D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE DU SECOND ORDRE

(Communiqué le 10 octobre 1963)

I

Dans [1] on trouve les équations différentielles

$$y''' + 3fy'' + (f' + 2f^2 + 4g)y' + (4fg + 2g')y = 0, \tag{1}$$

$$y^{\mathrm{IV}} + 6fy''' + (4f' + 11f^2 + 10g)y'' + (f'' + 7ff' + 6f^3 + 30fg + 10g')y' + 3(2f'g + 5fg' + 6f^2g + g'' + 3g^2)y = 0, \tag{2}$$

avec $f = f(x)$, $g = g(x)$. On y trouve aussi leurs solutions générales dans la forme

$$y = C_1 u^2 + C_2 uv + C_3 v^2, \tag{1'}$$

$$y = C_1 u^3 + C_2 u^2 v + C_3 uv^2 + C_4 v^3, \tag{2'}$$

où u et v représentent un système fondamental de solutions de l'équation différentielle

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0.$$

Dans [2] D. S. Mitrinović et D. Ž. Đoković ont démontré que l'équation différentielle

$$y^{\mathrm{V}} - 20fy''' - 30f'y'' + 2(32f^2 - 9f'')y' + 4(16ff' - f''')y = 0$$

a comme solution générale

$$y = C_1 u^4 + C_2 u^3 v + C_3 u^2 v^2 + C_4 uv^3 + C_5 v^4,$$

où u et v représentent un système fondamental de solutions de l'équation

$$y'' = f(x)y.$$

Dans cette note, en employant le procédé dû à D. S. Mitrinović et D. Ž. Đoković, nous allons démontrer que les équations différentielles

$$\begin{aligned} y^{\mathrm{V}} &+ 10fy^{\mathrm{IV}} + 5(7f^2 + 2f' + 4g)y''' + 5(10f^3 + 9ff' + 24fg + f'' + 6g')y'' \\ &+ (46f^2f' + 7f'^2 + 56f'g + 24f^4 + 208f^2g + 64g^2 \\ &\qquad + 120fg' + 11ff'' + 18g'' + f''')y' \\ &+ 4(26f^2g' + 7f'g' + 16gg' + 24f^3g + 20ff'g \\ &\qquad + 32fg^2 + 2f''g + 9fg'' + g''')y = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
(4)\quad & y^{VI}+15fy^{V}+5(17f^2+4f'+7g)y^{IV}+5(33ff'+45f^3+70fg+3f''+14g')y''' \\
& +(274f^4+1183f^2g+421f^2f'+266f'g+52f'^2+259g^2 \\
& \qquad\qquad +81ff''+525fg'+6f'''+63g'')y'' \\
& +(120f^5+326f^3f'+1540f^3g+1183f^2g'+101f^2f'' \\
& \qquad\qquad +1071ff'g+1295fg^2+518gg' \\
& +(91f''g+127ff'^2+266f'g'+25f'f''+315fg'' \\
& \qquad\qquad +16ff'''+f^{IV}+28g''')y' \\
& +5(120f^4g+172f^2f'g+290f^2g^2+154f^3g'+71f^2g'' \\
& \qquad\qquad +62f'g^2+45g^3+259fgg'+31gg'' \\
& +20f'^2g+107ff'g'+16f'g''+30ff''g+9f''g' \\
& \qquad\qquad +26g'^2+2f'''g+14fg'''+g^{IV})y=0
\end{aligned}
$$

ont comme solutions générales

$$(3')\qquad y=C_1u^4+C_2u^3v+C_3u^2v^2+C_4uv^3+C_5v^4,$$

$$(4')\qquad y=C_1u^5+C_2u^4v+C_3u^3v^2+C_4u^2v^3+C_5uv^4+C_6v^5,$$

où u et v représentent un système fondamental de solutions de l'équation différentielle

$$(5)\qquad y''+f(x)y'+g(x)y=0.$$

II

1. Soit u et v un système fondamental de solutions de l'équation différentielle (5).

Posons

$$
\begin{aligned}
A &= y_1y_2y_3y_4, \\
B &= y_1'y_2y_3y_4+y_1y_2'y_3y_4+y_1y_2y_3'y_4+y_1y_2y_3y_4', \\
C &= y_1'y_2'y_3y_4+y_1'y_2y_3'y_4+y_1'y_2y_3y_4'+y_1y_2'y_3'y_4+y_1y_2'y_3y_4'+y_1y_2y_3'y_4', \\
D &= y_1'y_2'y_3'y_4+y_1'y_2'y_3y_4'+y_1'y_2y_3'y_4'+y_1y_2'y_3'y_4', \\
E &= y_1'y_2'y_3'y_4',
\end{aligned}
$$

où y_i $(i=1, 2, 3, 4)$ désignent des solutions quelconque de l'équation (5).

Par différentiation, on obtient

$$
\begin{aligned}
z &= A, \\
z' &= B, \\
z'' &= 2C-fB-4gA, \\
z''' &= 6D-6fC+(f^2-f'-10g)B+(4fg-4g')A,
\end{aligned}
$$

$$z^{IV}=24E-36fD+(14f^2-32g-8f')C+(32fg-f^3+3ff'-14g'-f'')B$$
$$+(8f'g+40g^2-4f^2g+4fg'-4g'')A,$$
$$z^{V}=-240fE+(150f^2-60f'-120g)D+(200fg+50ff'-60g'$$
$$-10f''-30f^3)C$$
$$+(136g^2+64f'g-78f^2g+f^4-6f^2f'+50fg'$$
$$+4ff''+3f'^2-18g''-f''')B$$
$$+(12f''g+12f'g'+136gg'-20ff'g-4f^2g'+4fg''$$
$$-4g'''-128fg^2+4f^3g)A,$$

car on peut remplacer y_i'' par $-fy_i'-gy_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$.

Par élimination des A, B, C, D, E, il vient

$$\begin{vmatrix} z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z' & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ z'' & -4g & -f & 2 & 0 & 0 \\ z''' & c_1 & c_2 & c_3 & 6 & 0 \\ z^{\mathrm{IV}} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ z^{\mathrm{V}} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix}=0,$$

où

$$a_1=12f''g+12f'g'+136gg'-20ff'g-4f^2g'+4fg''$$
$$-4g'''-128fg^2+4f^3g,$$
$$a_2=136g^2+64f'g-78f^2g+f^4-6f^2f'+50fg'+4ff''+3f'^2-18g''-f''',$$
$$a_3=200fg+50ff'-60g'-10f''-30f^3,$$
$$a_4=150f^2-60f'-120g,$$
$$a_5=-240f,$$
$$b_1=8f'g+40g^2-4f^2g+4fg'-4g'',$$
$$b_2=32fg-f^3+3ff'-14g'-f'',$$
$$b_3=14f^2-32g-8f',$$
$$b_4=-36f,$$
$$b_5=24,$$
$$c_1=4fg-4g',$$
$$c_2=f^2-10g-f',$$
$$c_3=-6f.$$

Le déterminant qui figure dans la dernière équation étant développé, on arrive à l'équation différentielle (3).

Si $y_1=y_2=y_3=y_4=u$, on conclut que la fonction $z=u^4$ satisfait à l'équation (3). Si $y_1=y_2=y_3=u$, $y_4=v$, on obtient que $z=u^3 v$ satisfait à l'équation (3), et ainsi de suite.

Donc, la solution générale de l'équation (3) est (3').

2. Posons maintenant

$$A=y_1 y_2 y_3 y_4 y_5,$$

$$B=y_1' y_2 y_3 y_4 y_5+y_1 y_2' y_3 y_4 y_5+y_1 y_2 y_3' y_4 y_5+y_1 y_2 y_3 y_4' y_5+y_1 y_2 y_3 y_4 y_5',$$

$$\begin{aligned}C=&y_1' y_2' y_3 y_4 y_5+y_1' y_2 y_3' y_4 y_5+y_1' y_2 y_3 y_4' y_5+y_1' y_2 y_3 y_4 y_5'+y_1 y_2' y_3' y_4 y_5\\&+y_1 y_2' y_3 y_4' y_5+y_1 y_2' y_3 y_4 y_5'+y_1 y_2 y_3' y_4' y_5+y_1 y_2 y_3' y_4 y_5'+y_1 y_2 y_3 y_4' y_5',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D=&y_1' y_2' y_3' y_4 y_5+y_1' y_2' y_3 y_4' y_5+y_1' y_2' y_3 y_4 y_5'+y_1' y_2 y_3' y_4' y_5+y_1' y_2 y_3' y_4 y_5'\\&+y_1' y_2 y_3 y_4' y_5'+y_1 y_2' y_3' y_4' y_5+y_1 y_2' y_3' y_4 y_5'+y_1 y_2' y_3 y_4' y_5'+y_1 y_2 y_3' y_4' y_5',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E=&y_1' y_2' y_3' y_4' y_5+y_1' y_2' y_3' y_4 y_5'+y_1' y_2' y_3 y_4' y_5'+y_1' y_2 y_3' y_4' y_5'\\&+y_1 y_2' y_3' y_4' y_5',\end{aligned}$$

$$F=y_1' y_2' y_3' y_4' y_5',$$

où $y_i\,(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ désignent des solutions quelconques de l'équation (5).

Par différentation, on obtient

$$z=A,$$

$$z'=B,$$

$$z''=2C-fB-5gA,$$

$$z'''=6D-6fC+(f^2-13g-f')B+(5fg-5g')A,$$

$$\begin{aligned}z^{\mathrm{IV}}=&24E-36fD+(14f^2-8f'-44g)C+(42fg-f^3+3ff'-18g'-f'')B\\&+(65g^2-5f^2g+10f'g+5fg'-5g'')A,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z^{\mathrm{V}}=&120F-240fE+(150f^2-60f'-180g)D\\&+(280fg-30f^3+5ff'-10f''-80g')C\\&+(84f'g+241g^2-103f^2g+f^4-6f^2f'+65fg'\\&\qquad+4ff''+3f'^2-23g''-f''')B\\&+(220gg'-25ff'g-5f^2g'+15f''g+15f'g'\\&\qquad+5fg''-5g'''-210fg^2+5f^3g)A,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z^{\mathrm{VI}}=&-1800fF+(1560f^2-840g-400f')E\\&+(1860fg+630ff'-90f''-420g'-540f^3)D\\&+(628f'g+570fg'+1022g^2-202f^2f'+78ff''\\&\qquad-12f'''-126g''+56f'^2+62f^4-1216f^2g)C\\&+(228f^3g-1571fg^2-515ff'g+139f''g+1022gg'\\&\qquad-f^5+10f^3f'-173f^2g'\end{aligned}$$

$$-10f^2f''-15ff'^2+5ff'''+10f'f''+93fg''+164f'g'-f^{IV}-28g''')B$$
$$+(45f^2f'g-630f'g^2-1205g^3+515f^2g^2-5f^4g-745fgg'-45ff''g-40f'^2+20f'''g$$
$$+335gg''-5g^{IV}+5f^3g'+5fg'''+20f'g''+30f''g'-35ff'g'-5f^2g''+220g'^2)A,$$

puisqu'on peut remplacer y_i'' par $-fy_i'-gy_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$.

Par élimination des A, B, C, D, E, F, il vient

$$\begin{vmatrix} z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z' & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z'' & -5g & -f & 2 & 0 & 0 & 0 \\ z''' & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 & 0 \\ z^{IV} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 \\ z^{V} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ z^{VI} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix}=0,$$

avec

$$a_1=45f^2f'g-630f'g^2-1205g^3+515f^2g^2-5f^4g-745fgg'-45ff''g-40f'^2g$$
$$+20f'''g+335gg''-5g^{IV}+5f^3g'+5fg'''+20f'g''+30f''g'-35ff'g'-5f^2g''+220g'^2,$$

$$a_2=228f^3g-1571fg^2-515ff'g+139f''g+1022gg'-f^5+10f^3f'-173f^2g'$$
$$-10f^2f''-15ff'^2+5ff'''+10f'f''+93fg''+164f'g'-f^{IV}-28g''',$$

$$a_3=628f'g+570fg'+1022g^2-202f^2f'+78ff''-12f'''-126g''+56f'^2+62f^4-1216f^2g,$$

$$a_4=1860fg+630ff'-90ff''-420g'-540f^3,$$

$$a_5=1560f^2-840g-480f',$$

$$a_6=-1800f,$$

$$b_1=15f''g+15f'g'-25ff'g-5f^2g'+220gg'-5g'''-40fg^2+5f^3g+5fg'',$$

$$b_2=84f'g+241g^2-103f^2g+f^4-6f^2f'+65fg'+4ff''+3f'^2-f'''-23g'',$$

$$b_3=280fg-30f^3+50ff'-10f''-80g',$$

$$b_4=150f^2-60f'-180g,$$

$b_5 = -240f,$

$b_6 = 120,$

$c_1 = 10f'g + 5fg' - 5f^2 g + 65g^2 - 5g'',$

$c_2 = 42fg - f^3 + 3ff' - 18g' - f'',$

$c_3 = 14f^2 - 8f' - 44g,$

$c_4 = -36f,$

$c_5 = 24,$

$d_1 = 5fg - 5g',$

$d_2 = f^2 - 13g - f',$

$d_3 = -6f,$

$d_4 = 6.$

En développant le déterminant figurant dans la dernière équation, on arrive à l'équation différentielle (4).

Si $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = u$, on conclut que la fonction $z = u^5$ satisfait à l'équation (4). Si $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = u$, $y_5 = v$, on obtient que $z = u^4 v$ satisfait à l'équation (4), et ainsi de suite. Donc, la solution générale de l'équation (4) est (4').

Exemples:

1° L'équation différentielle

$$\begin{aligned}(a)\quad & x^4 y^{V} + 10x^3 y^{IV} + 5x^2(4x^2 - 4\nu^2 + 5)y''' + 15x(8x^2 - 4\nu^2 + 1)y'' \\ & + (64x^4 + 152x^2 - 128\nu^2 x^2 + 1 - 20\nu^2 + 64\nu^4)y' + 32x(4x^2 - 4\nu^2 + 1)y = 0,\end{aligned}$$

a comme solution générale

$$y = C_1 u^4 + C_2 u^3 v + C_3 u^2 v^2 + C_4 uv^3 + C_5 v^4,$$

où u et v désignent un système fondamental de solutions de l'équation de Bessel

$$(b)\qquad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

Posons $y = z^4$, où z est une solution de l'équation (b). Alors, étant donné que

$$\begin{aligned}y &= z^4,\\ y' &= 4z^3 z',\\ y'' &= 12z^2 z'^2 + 4z^3 z'',\\ y''' &= 24zz'^3 + 36z^2 z' z'' + 4z^3 z''',\\ y^{IV} &= 24z'^4 + 144zz'^2 z'' + 36z^2 z''^2 + 48z^2 z' z''' + 4z^3 z^{IV},\\ y^{V} &= 240z'^3 z'' + 360zz' z''^2 + 240zz'^2 z''' + 120z^2 z'' z''' + 60z^2 z' z^{IV} + 4z^3 z^{V},\end{aligned}$$

l'équation (a) devient

$$\begin{aligned}(c)\quad & 4x^4 z^3 z^{V} + 60x^4 z^2 z' z^{IV} + 40x^3 z^3 z^{IV} + 120x^4 z^2 z'' z''' + 240x^4 zz'^2 z''' \\ & + 480x^3 z^2 z' z''' + 20x^2(4x^2 - 4\nu^2 + 5)z^3 z''' + 360x^4 zz' z''^2 + 240x^4 z'^3 z''\end{aligned}$$

$$
\text{(c)}\quad
\begin{aligned}
&+360x^3z^2z''^2+1440x^3zz'^2z''+180x^2(4x^2-4\nu^2+5)z^2z'z''\\
&+60x(8x^2-4\nu^2+1)z^3z''+240x^3z'^4+120x^2(4x^2-4\nu^2+5)zz'^3\\
&+180x(8x^2-4\nu^2+1)z^2z'^2\\
&+4(64x^4+152x^2-128\nu^2x^2+1-20\nu^2+64\nu^4)z^3z'\\
&\qquad\qquad+32x(4x^2-4\nu^2+1)z^4=0.
\end{aligned}
$$

Par différentiation de l'équation (b) trois fois de suite, on obtient

$$
\text{(d)}\quad
\begin{aligned}
&x^2z'''+3xz''+(x^2-\nu^2+1)z'+2xz=0,\\
&x^2z^{\mathrm{IV}}+5xz'''+(x^2-\nu^2+4)z''+4xz'+2z=0,\\
&x^2z^{\mathrm{V}}+7xz^{\mathrm{IV}}+(x^2-\nu^2+9)z'''+6xz''+6z'=0.
\end{aligned}
$$

Remplaçons dans l'équation (c) z''', z^{IV}, z^{V} donné par (d). Nous obtenons ainsi la relation suivante

$$
\begin{aligned}
&[x^2z''+xz'+(x^2-\nu^2)z]\ [360x^2zz'z''+360xz'^2z+(180x^2-180\nu^2)z^2z'\\
&\qquad\qquad+240x^2z'^3-24xz^3]=0,
\end{aligned}
$$

ou bien

$$[x^2z''+xz'+(x^2-\nu^2)z]\ [20x^2z'^3-15(x^2-\nu^2)z^2z'-2xz^3]=0.$$

De la dernière relation il suit que $y=z^4$ est vraiment une solution de l'équation (a).

2° L'équation différentielle

$$
\begin{aligned}
&x^6y^{\mathrm{VI}}+15x^5y^{\mathrm{V}}+5x^4(7x^2-7\nu^2+13)y^{\mathrm{IV}}+10x^3(35x^2-21\nu^2+9)y'''\\
&+x^2(259x^4+917x^2-518\nu^2x^2+31+259\nu^4-245\nu^2)y''\\
&+x(1295x^4+651x^2-1554\nu^2x^2+1-35\nu^2+259\nu^4)y'\\
&+5(45x^6+228x^4-135\nu^2x^4+16x^2-124\nu^2x^2+135\nu^4x^2-45\nu^6)y=0
\end{aligned}
$$

a comme solution générale

$$y=C_1u^5+C_2u^4v+C_3u^3v^2+C_4u^2v^3+C_5uv^4+C_6v^5,$$

où u et v représentent un système fondamental de solutions de l'équation de Bessel

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0.$$

RÉFÉRENCES

[1] E. Kamke: *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen,* erster Teil, Leipzig 1959.

[2] D. S. Mitrinović et D. Ž. Đoković: *Compléments au Traité de Kamke. IX.* Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique № 108 (1963).