GLASNIK MAT. - FIZ. I ASTR.
Tom 19. — No. 3—4 — 1964.

SUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES TRANSFORMABLES EN ELLES-MÊMES PAR UN CHANGEMENT DE FONCTION

Ilija A. Šapkarev, Skopje

1. Considérons le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{aligned} a_0(x)\, y' + a_1(x)\, y &= z\,, \\ b_0(x)\, z' + b_1(x)\, z &= y \end{aligned} \qquad (a_0\, b_0 \neq 0)\,. \tag{1}$$

Par élimination de z du système (1), on obtient l'équation différentielle

$$y'' + \left(\frac{a_0'}{a_0} + \frac{a_1}{a_0} + \frac{b_1}{b_0}\right) y' + \left(\frac{a_1'}{a_0} + \frac{a_1\, b_1}{a_0\, b_0} - \frac{1}{a_0\, b_0}\right) y = 0, \tag{2}$$

et par élimination de y du même système, on trouve

$$z'' = \left(\frac{b_0'}{b_0} + \frac{b_1}{b_0} + \frac{a_1}{a_0}\right) z' + \left(\frac{b_1'}{b_0} + \frac{a_1\, b_1}{a_0\, b_0} - \frac{1}{a_0\, b_0}\right) z = 0. \tag{3}$$

Pour que l'équation (2), par le changement de fonction donné par

$$a_0\, y' + a_1\, y = z\,, \tag{4}$$

se transforme en elle-même, il faut et il suffit que le système suivant

$$\begin{aligned} \frac{a_0'}{a_0} + \frac{a_1}{a_0} + \frac{b_1}{b_0} &= \frac{b_0'}{b_0} + \frac{b_1}{b_0} + \frac{a_1}{a_0}\,, \\ \frac{a_1'}{a_0} + \frac{a_1\, b_1}{a_0\, b_0} - \frac{1}{a_0\, b_0} &= \frac{b_1'}{b_0} + \frac{a_1\, b_1}{a_0\, b_0} - \frac{1}{a_0\, b_0}\,, \end{aligned} \tag{5}$$

soit satisfait.

De la première équation du système (5), on obtient

$$b_0 = K\, a_0\,, \tag{6}$$

et de la seconde, d'après (6),

$$b_1 = K\, a_1 + L\,, \tag{7}$$

où K et L sont des constantes d'intégration, $K \neq 0$.

Par suite, l'équation (2) devient

$$y'' + \left(\frac{a_0'}{a_0} + 2\frac{a_1}{a_0} + \frac{L}{Ka_0}\right) y' + \left(\frac{a_1'}{a_0} + \frac{a_1^2}{a_0^2} + \frac{La_1 - 1}{Ka_0^2}\right) y = 0. \tag{8}$$

Puisque l'équation (8), par le changement (4), se transforme en elle-même, il suit que $y = z$. Si dans l'équation (4) on pose $y = z$, elle devient

$$a_0 y' + (a_1 - 1) y = 0 . \tag{9}$$

Une équation du second ordre, qui a la propriété que toute intégrale de l'équation (9) soit aussi son intégrale, prend la forme

$$[p_0(x) D + p_1(x)] [a_0 D y + (a_1 - 1) y] = 0 \quad (p_0 \neq 0),$$

ou bien

$$y'' + \left(\frac{a_0'}{a_0} + \frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{a_0} + \frac{p_1}{p_0}\right) y' + \left(\frac{a_1'}{a_0} + \frac{a_1 p_1}{a_0 p_0} - \frac{p_1}{a_0 p_0}\right) y = 0.$$

Pour que l'équation (8) a la propriété, que toute intégrale de l'équation (9) soit également son intégrale, il faut que le système suivant,

$$\begin{aligned} \frac{a_0'}{a_0} + \frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{a_0} + \frac{p_1}{p_0} &= \frac{a_0'}{a_0} + 2\frac{a_1}{a_0} + \frac{L}{Ka_0}, \\ \frac{a_1'}{a_0} + \frac{a_1 p_1}{a_0 p_0} - \frac{p_1}{a_0 p_0} &= \frac{a_1'}{a_0} + \frac{a_1^2}{a_0^2} + \frac{La_1}{Ka_0^2} - \frac{1}{Ka_0}, \end{aligned} \tag{10}$$

soit satisfait.

De la première équation du système (10), il suit

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{a_0} + \frac{L}{Ka_0},$$

et la seconde équation du même système sera satisfaite si l'on a

$$K + L - 1 = 0 .$$

Par suite, on peut énoncer le résultat suivant:

Théorème 1. *L'équation différentielle*

$$\begin{aligned} y'' &+ \left(\frac{a_0'}{a_0} + 2\frac{a_1}{a_0} + \frac{1 - K}{Ka_0}\right) y' + \\ &+ \left(\frac{a_1'}{a_0} + \frac{a_1^2}{a_0^2} + \frac{(1 - K) a_1 - 1}{Ka_0^2}\right) y = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

par le changement de fonction

$$a_0 y' + a_1 y = z ,$$

se transforme en elle-même. Elle a comme solution particulière

$$y = \exp\left(\int \frac{1-a_1}{a_0}\,dx\right), \tag{12}$$

et sa solution générale est

$$y = \left[\exp\left(\int \frac{1-a_1}{a_0}\,dx\right)\right]\Big\{C_1 \int \exp\Big[- \\ - \int \left(\frac{a_0+1}{a_0} + \frac{1}{Ka_0}\right) dx\Big]\, dx + C_2\Big\}, \tag{13}$$

(C_1, C_2 sont des constantes d' intégration).

2. A partir du système d' équations différentielles

$$a_0(x)\, y' + a_1(x)\, y = z, \qquad b_0(x)\, z'' + b_1(x)\, z' + b_2(x)\, z = y \qquad (a_0\, b_0 \neq 0),$$

avec un procédé analogue, on obtient le résultat suivant:

Théorème 2. *L' équation différentielle*

$$y''' + \left(3\frac{a_1}{a_0} + 3\frac{a_0'}{a_0} + \frac{L}{Ka_0}\right) y'' + \left[\frac{a_0''}{a_0} + 3\frac{a_1'}{a_0} + \right. \\ + \left(\frac{a_0'}{a_0}\right)^2 + 3\frac{a_0' a_1}{a_0^2} + 3\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 + \frac{La_0'}{Ka_0^2} + 2\frac{La_1}{Ka_0^2} + \\ \left. + \frac{1-K-L}{Ka_0^2}\right] y' + \left[\frac{a_1''}{a_0} + \frac{a_0' a_1'}{a_0^2} + 3\frac{a_1 a_1'}{a_0^2} + \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3 + \right. \\ \left. + \frac{La_1'}{Ka_0^2} + \frac{La_1^2}{Ka_0^3} + \frac{(1-K-L)\,a_1}{Ka_0^3} - \frac{1}{Ka_0^3}\right] y = 0, \tag{14}$$

par le changement de fonction

$$a_0\, y' + a_1\, y = z,$$

se transforme en elle-même. Elle a comme solution particulière

$$y = \exp\left(\int \frac{1-a_1}{a_0}\,dx\right),$$

où K et L sont des constantes arbitraires, $K \neq 0$.

3. Le procédé employé plus haut pour la formation des équations linéaires, transformables en elles-mêmes, s' applique aussi bien à des équations linéaires plus générales que celles envisagées dans ce qui précède.

Remarque. Les résultats de la présente Note s'ajoutent à ceux obtenus dans les travaux dus à Appell [1] et Mitrinović [2].

4. Exemples: 1° L'équation différentielle

$$y'' + \left(2x^2 - \frac{1}{x}\right) y' + (x^4 - x^2 + x)\, y = 0\,,$$

par le changement de fonction $y' + x^2 y = xz$, se transforme en elle-même. Elle a comme solution particulière

$$y = \exp\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right),$$

et sa solution générale est

$$y = C_1 \exp\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right).$$

2° L'équation différentielle

$$y'' + (2x - e^x - 1)\, y' + (x^2 - x + 1 - x\,e^x - 2\,e^{2x})\, y = 0\,,$$

par le changement de fonction $y' + x^2 y = xz$, se transforme en elle-elle-même. Elle a comme solution particulière

$$y = \exp\left(2\,e^x - \frac{x^2}{2}\right),$$

et sa solution générale est

$$y = C_1 \exp\left(2\,e^x - \frac{x^2}{2}\right) + C_2 \exp\left(-\,e^x - \frac{x^2}{2}\right).$$

3° L'équation différentielle

$$\begin{aligned} &y''' + (3e^x + \beta)\, y'' + (3e^{2x} + 3e^x + 2\beta\, e^x + \gamma)\, y' + \\ &+ (e^{3x} + 3e^{2x} + e^x + \beta\, e^x + \beta\, e^{2x} + \gamma\, e^x - \alpha)\, y = 0\,, \end{aligned}$$

où $\alpha\,(\neq 0)$, β, γ sont des constantes arbitraires, par le changement de fonction $y' + e^x y = z$, se transforme en elle-même. Dans le cas où $\alpha = \beta + \gamma + 1$ elle a comme solution particulière $y = \exp(x - e^x)$ et par le changement de fonction $y = u \exp(x - e^x)$ se transforme en équation

$$v'' + (3 + \beta)\, v' + (3 + 2\beta + \gamma)\, v = 0 \qquad (v = u')\,,$$

dont la solution générale, pour $\alpha = 6$, $\beta = 4$, $\gamma = 1$ est

$$v = C'_1\, e^{-3x} + C'_2\, e^{-4x}\,.$$

Par suite, la solution générale de l' équation

$$y''' + (3e^x + 4)\, y'' + (3e^{2x} + 11e^x + 1)\, y' + (e^{3x} + 7e^{2x} + 6e^x - 6)\, y = 0$$

est

$$y = C_1 \exp(-2x - e^x) + C_2 \exp(-3x - e^x) + C_3 \exp(x - e^x)\,.$$

RÉFÉRENCES:

[1] *P. Appell*, Sur des équations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes par un changement de fonction et de variable, Acta Math. 15 (1891), 281—315,

[2] *D. S. Mitrinović*, Sur une équation différentielle linéaire du second ordre transformable en elle-même, C. R. Acad. Sci. Paris **228** (1949), 1188—1190.

O LINEARNIM DIFERENCIJALNIM JEDNAČINAMA KOJE SE TRANSFORMIŠU U SAME SEBE JEDNOM SMENOM FUNKCIJE

Ilija A. Šapkarev, Skopje

Sadržaj

Dokazano je da se jednačina (11), smenom funkcije (4), transformiše u samu sebe. Jedno njeno partikularno rešenje je (12), a opšte rešenje je (13). Jednačina (14), smenom funkcije (4), transformiše se također u samu sebe. Jedno njeno partikularno rešenje je funkcija (15).

(Primljeno 10. III 1964.)