АЛГЕБАРСКО ИНТЕГРИРАЊЕ НА ЛИНЕРАНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД II РЕД

Илија А. Шапкарев

Д. Перчинкова во трудот [1] има покажано дека диференцијалната равенка

$$x^2(1+x^3)\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3}{2} \times \frac{dy}{dx} + y = 0$$

има партикуларно решение $y=y(x)$ дефинирано со равенката

$$y^3 + 3xy + 2x^3 = 0.$$

Во трудот [2] Д. Перчинкова има показано дека поопштата диференцијална равенка

$$x^2(A + Bx^3)\frac{d^2y}{dx^2} + Cx\frac{dy}{nx} + y = 0$$

има партикуларно решение $y-y(x)$ дефинирано со равенката

$$y^3 + 3axy + bx^3 = 0$$

ако

$$A = 1,\ b^2 - 4a^2,\ B = 0\ \ C - -\frac{3}{2}.$$

Во книгата [3] се наведува дека диференцијалната равенка

$$(ax^3 + b)\frac{d^2y}{dx^2} + cx^2\frac{dy}{dx} + xy - 0$$

има партикуларно решение дефинирано со равенката

$$y^3 + pxy + q = 0\ \ (p \neq 0)$$

ако

$$a = -2,\ b = -\frac{27q^3}{2p^3},\ c = -3.$$

Во трудот [4] П. Васиħ, има покажано дека диференцијалната равенка

$$x^2(ax^n + b)\frac{d^2y}{dx^2} + x(cx^n + d)\frac{dy}{dx}(ex^n + f)y = 0$$

има партикуларно решение $y = y(x)$ дефинирано со равенката

$$y^3 + pyx^{n/3+2k} + qx^{3k} = 0\ (n \neq 0),\ k,\ (c,\ (\neq 0),\ q \text{ — константи})$$

ако

$$q = r,\ b = \frac{27q^2}{4p^2}r,\ c = \frac{6-12k+n}{6}r,\ d = \frac{9q^3}{4p^3}(3-6k-n)r,$$

$$a = \frac{18k^2 - 3kn - n^3}{18}r,\ f = \frac{9q^2}{4p^3}k(n+3k)r,\ (r \text{ — произволна константа}).$$

Ние во оваа работа даваме една метода со која можат да се добијат коефициентите $f(x)$ и $g(x)$ на диференцијалната равенка

(1) $$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

во функција од коефициентите $a_0(x),\ a_1(x),\ a_2(x), \ldots,\ a_n(x)$ на алгебарската равенка

(2) $$F(x, y) = y^n + a_0(x)y^{n-1} + a_1(x)y^{n-2} + \cdots = a_{k-2}(x)y + a_{n-1}(x) = 0$$

при услов нејзинните корени да бидат партикуларни интеграли на диференцијалната равенка (1).

Понатака за $n = 2$ добиваме дека корените на алгебарската равенка

(3) $$y^2 + a_0(x)y + a_1(x) = 0$$

ќе бидат партикуларни интеграли на диференцијалната равенка (1) ако

(4) $$f(x) = \frac{(a_0{}^2 - 4a_1)(a^0a_1'' - 2a_0''a_1) - 2a_0(a_0a_0'a_1' - a_1'^2 - a_0'^2a_1)}{(a_0{}^2 - 4a_1)(2a_0'a_1 - a_0a_1')},$$

(5) $$g(x) = \frac{(a_0{}^2 - 4a_1)(a_0''a_1' - a_0'a_1'') + 2a_0'(a_0a_0'a_1' - a_1'^2 - a_0'^2a_2}{(a_0{}^2 - 4a_1)(2a_0'a_1 - a_0a_1')},$$

а за $n=3$ добиваме дека корените на алгебарската равенка

$$y^3+a_1(x)y+a_2(x)=0 \tag{6}$$

ќе бидат партикуларни решенија на диференцијалната равенка (1), ако

$$f(x)= \tag{7}$$

$$=\frac{(4a_1{}^3+27a_2{}^2)(2a_1a_2''-3a_1''a_2)+2(27a_1'a_2{}^2a_2'-27a_1a_2a_2'^2-8a_1{}^3a_1'a_2'+9a_1{}^2a_1'^2a_2)}{(4a_1{}^2+27a_2{}^2)(3a_1'a_2-2a_2-2a_1a_2')},$$

$$g(x)=\frac{(4a_1{}^3+27a_2{}^2)(a_1''a_2'-a_1'a_2'')+2a_1(4a_1'^2a_2'+3a_2'^3-3a_1'^3a_2-a_1{}^2a_1''a_2')}{(4a_1{}^3+27a_2{}^2)(3a_1'a_2-2a_1a_2')}, \tag{8}$$

За да го тоа докажеме равенката (2) ја диференцираме два пати во однос на x и добиваме:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0.$$

Под претпоставка дека $\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$, со елиминацијата на y' и y'' од овие две равенки и од равенката (1), ја добиваме равенката

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\\ +f\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\frac{\partial F}{\partial x}-g\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3y=0.\end{aligned} \tag{9}$$

Јасно е дека оваа равенка е алгебарска во однос на y од степен $3n—2$. За нејзините корени да бидат партикуларни решенија на диференцијалната равенка (1) треба тие истовремено да бидат корени и на равенката (2). Бидејќи $3n—2\geqslant n$ треба левата страна на равенката (9) да биде делива со левата страна на равенката (2). При делењето на полиномот во однос на y, определен со левата страна од (9), со полиномот во однос на y' определен со левата страна од (2), се добива остаток што претставува полином од $(n—1)$—ва степен. Овој полином треба да биде идентички равен на нула т. е. треба сите негови коефициенти да бидат равни на нула. На тој начин добиваме точно n равенки во кои покрај коефициентите