МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
4 (19), 1967, стр. 67—70

Ilija A. Šapkarev

ÜBER LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT DER EIGENSCHAFT DAß k—te POTENZEN DER INTEGRALE EINER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG ZWEITER ORDNUNG IHRE INTEGRALE SIND

(Vorgelegt am 14. Oktober 1966)

I

Im bekannten Buch von Kamke [1] findet man lineare Differentialgleichungen der dritten und vierten Ordnung mit der Eigenschaft daß zweite und dritte Potenzen der Integrale der Gleichung

$$z'' = h(x)\, z \tag{1}$$

ihre Integrale sind.

Mitrinović und Đoković [2] erhielten, indem sie ein geeignetes Verfahren angewandt haben, eine Differentialgleichung der fünften Ordnung mit der Eigenschaft daß die vierten Potenzen der Integrale der Gleichung (1), ihre Integrale sind.

In meinen Arbeiten [3] und [4] habe ich, unter Anwendung des Verfahrens von Mitrinović und Đoković, Differentialgleichungen der 5., 6., 7. bzw 8. Ordnung erhalten mit der Eigenschaft, daß die 4., 5., 6, bzw. 7. Potenzen der Integrale von (1) als Integrale vorkommen.

In dieser Arbeit geben wir ein neues Verfahren, mit dessen Hilfe wir eine Differentialgleichung der $(k+1)$—ten Ordnung der Form

$$y^{(k+1)} + f_1(x)\, y^{(k-1)} + f_2(x)\, y^{(k-2)} + \cdots + f_k(x)\, y = 0 \tag{2}$$

erhalten, mit der Eigenschaft, daß die k—ten Potenzen der Integrale der Gleichung (1) ihre Integrale sind.

Ferner zeigen wir: wenn u und v zwei linear unabhängige Lösungen der Gleichung (1) sind, dann sind die Funktionen

$$u^k,\ u^{k-1} v, \ldots, u v^{k-1},\ v^k \tag{3}$$

Integrale der Gleichung (2) und bilden ein Fundamentalsystem der Gleichung (2).

Daher ist das allgemeine Integral der Gleichung (2)

$$y = C_1 u^k + C_2 u^{k-1} v + \cdots + C_k u v^{k-1} + C_{k+1} v^k. \tag{4}$$

II

Setzen wir

$$A_0 = y,$$
$$A_1 = A_0',$$
$$A_2 = A_1' - k\,h\,A_0,$$
$$A_3 = A_2' - 2\,(k-1)\,h\,A_1,$$
$$\vdots$$
$$A_r = A_{r-1}' - (r-1)\,(k-r+2)\,h\,A_{r-2}, \quad r = 1, 2, \ldots, k+1,$$
$$\vdots$$
$$A_{k+1} = A_k' - k\,h\,A_{k-1},$$

wo k eine natürliche Zahl bedeutet.

Wir werden zeigen, daß die Gleichung

$$A_{k+1} = 0 \tag{5}$$

die k—ten Potenzen der Integrale der Gleichung (1) als Integrale hat, und daß sie die Form (2) hat.

Zu diesem Zweck setzen wir

$$y = z^k,$$

wo z eine beliebige Lösung der Gleichung (1) ist.

Durch Differentieren erhalten wir

$$A_0 = z^k,$$
$$A_1 = k\,z^{k-1}\,z',$$
$$A_2 = k\,(k-1)\,z^{k-2}\,z'^2,$$
$$\vdots$$
$$A_r = k\,(k-1)\cdot\,\cdots\,\cdot(k-r+1)\,z^{k-r}\,z'^k,$$
$$\vdots$$
$$A_{k-1} = k!\,z'^{k-1}\,z,$$
$$A_k = k!\,z'^k,$$
$$A_k' = k\,k!\,h\,z\,z'^{k-1}.$$

Indem wir z aus der letzten und der drittletzten Gleichung eliminieren, erhalten wir die Gleichung

$$A_k' - k\,h\,A_{k-1} = 0, \tag{6}$$

die mit der Gleichung (5) identisch ist.

Durch die Art und Weise, wie wir die Gleichung (6) erhalten haben, ist es klar, daß dieselbe eine homogene lineare Differentialgleichung der

$(k+1)$—ten Ordnung ist mit der Eigenschaft, daß die k—ten Potenzen von den Integralen der Gleichung (1) ihre Integrale sind, das heißt, daß sie die Form (2) hat.

III

Da die k—ten Potenzen eines beliebigen Integrals der Gleichung (1) ein Integral der Gleichung (2) ist, so folgt daß auch

$$y=(K_1 u+K_2 v)^k=\sum_{s=0}^{k} B_s y_s,$$

wo $B_s=\binom{k}{s}K_1^{k-s}K_2^s$, $y_s=u^{k-s}v^s$, ein Integral von (2) ist, unabhängig von der Wahl der Konstanten K_1 und K_2.

Wenn wir y und seine Ableitungen in (2) einsetzen, so erhalten wir

$$\sum_{s=0}^{k}[B_s(y_s^{(k+1)}+f_1 y_s^{(k-1)}+f_2 y_s^{(k-2)}+\cdots+f_k y_s)]=0.$$

Die letzte Gleichung wird dann und nur dann für alle zulässigen Werte der Konstanten $B_s\,(s=0,1,\ldots,k)$ erfüllt, wenn die Funktionen

$$y_0, y_1, \ldots, y_k,$$

das heißt die Funktionen (3), ihre Integrale sind.

IV

Nehmen wir an, daß die Funktionen (3) linearabhängig sind, das heißt, zwischen ihnen eine Relation

$$\lambda_0 u^k+\lambda_1 u^{k-1}v+\cdots+\lambda_k v^k=0,\quad (\lambda_j=\text{const.}) \tag{7}$$

besteht mit wenigstens einem $\lambda_j=\text{const}\,(\neq 0)$, $j=0,1,\ldots,k$.

Wenn wir die Gleichung (7) durch v^k teilen, erhalten wir

$$\lambda_0\left(\frac{u}{v}\right)^k+\lambda_1\left(\frac{u}{v}\right)^{k-1}+\cdots+\lambda_k=0,$$

woraus unmittelbar folgt

$$\frac{u}{v}=\text{const.}$$

Die Voraussetzung für die lineare Abhängigkeit der Funktionen (3) führt also zum Widerspruch. Daraus folgt aber, daß die Funktionen (3) ein Fundamentalsystem für die Gleichung (2) bilden.

Daher ist ihr allgemeines Integral mit (4) gegeben.

V

Wenn wir $A_2, A_3, A_4, \ldots$ durch y und seine Ableitungen explitzit ausdrücken, erhalten wir

$$\begin{aligned}
A_2&=y''-k\,h\,y,\\
A_3&=y'''-(3\,k-2)\,h\,y'-k\,h'\,y,\\
A_4&=y^{(4)}-(6\,k-8)\,h\,y''-(4\,k-2)\,h'\,y'+[(3\,k^2-6\,k)\,h^2-k\,h'']y,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Für $k=2, 3, \ldots, 7$ wurden die entsprechenden Gleichungen in den zitierten Arbeiten gegeben und für $k=8$ und $k=9$ von den zwei letzten Ausdrücken bekommen wir

$$\begin{aligned}
&y^{(9)} - 120\, h\, y^{(7)} - 420 h'\, y^{(6)} + 84\,(52\, h^2 - 9\, h'')\, y^{(5)} + 840\,(26\, h\, h' - h''')\, y^{(4)} - \\
&- 20\,(30 h^{(4)} - 1095\, h'^2 - 1308\, h h'' + 2624\, h^3)\, y''' - 30\,(9\, h^{(5)} - 1314\, h' h'' - 580\, h h''' + \\
&+ 7872\, h^2 h')\, y'' + 2\,(3100\, h' h^{(4)} - 118400\, h\, h'^2 - 70592\, h^2 h'' + 73728\, h^4 - 35\, h^{(6)} + \\
&+ 5922\, h''^2 + 8750\, h' h''')\, y' + 8\,(390\, h' h^{(4)} - 4960\, h'^3 - 17728\, h\, h' h'' + 36864\, h^3 h' + \\
&\qquad + 116\, h\, h^{(5)} - 3904\, h^2 h''' - h^{(7)} + 658\, h'' h''')\, y = 0,
\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
&y^{(10)} - 165\, h\, y^{(8)} - 660\, h' y^{(7)} + (8778\, h^2 - 1386\, h'')\, y^{(6)} + (52668\, h\, h' - 1848\, h''')\, y^{(5)} + \\
&\quad + (66000\, h'^2 + 78870\, h\, h'' - 172810\, h^3 - 1650\, h^{(4)})\, y^{(4)} + (158400\, h' h'' + \\
&\quad + 69960\, h\, h''' - 1036860\, h^2 h' - 990\, h^{(5)})\, y''' + (71379\, h''^2 + 105490\, h' h''' + \\
&\quad + 37400\, h\, h^{(4)} - 1559140\, h\, h'^2 - 930094\, h^2 h'' + 1057221\, h^4 - 385\, h^{(6)})\, y'' + \\
&\quad + (63448\, h'' h''' + 37620\, h' h^{(4)} + 11198\, h\, h^{(5)} - 522280\, h'^3 - 1867888\, h\, h' h'' - \\
&\quad - 411664\, h^2 h''' + 4228884\, h^3 h' - 88\, h^{(7)})\, y' + (7056\, h'''^2 + 11322\, h'' h^{(4)} + \\
&\quad + 5634\, h' h^{(5)} + 1449\, h\, h^{(6)} - 470052\, h'^2 h'' - 280107\, h\, h''^2 - 413802\, h\, h' h''' - \\
&\quad - 73206\, h^2 h^{(4)} + 3179412\, h^2 h'^2 - 1262466\, h^3 h'' - 893025\, h^5 - 9\, h^{(8)})\, y = 0,
\end{aligned}$$

dessen allgemeine Integrale sind

$$y = C_1 u^8 + C_2 u^7 v + \cdots + C_9 v^8,$$

beziehungsweise

$$y = C_1 u^9 + C_2 u^8 v + \cdots + C_{10} v^9.$$

LITERATUR

[1] Э. Камке, *Спровочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Москва (1961), с. 531 и 553.

[2] D. S. Mitrinović et D. Ž. Đoković, *Compléments au Traité de Kamke*, Note IX, Publikation de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique N^0 108 (1963).

[3] I. A. Šapkarev, *Équations différentielles linéaires des ordres 5 et 6 dont l'intégration se ramène à celle d'une équation linéaire du second ordre*, Matematički vesnik, knjiga 1 (16), sveska 2, Beograd (1964).

[4] I. A. Šapkarev, *Équations différentielles linéaires des ordres 7 et 8 dont l'intégration se ramène à celle d'une équation linéaire du second ordre*, Bulletin de la Société des mathématiciens et des physiciens de la R. S. Macédoine t. XIV, Skopje (1963).