SUR DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DERIVÉES PARTIELLES DU SECOND ET DU TROISIÈME ORDRE TRANSFORMABLES EN ELLES-MÊMES PAR UN CHANGEMENT DE FONCTION

Ilija A. Šapkarev

1. Considérons le système d'équations linéaires aux derivées partielles suivant

$$(1) \qquad \begin{aligned} a_0(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + a_1(x, y)\, z &= z_1, \\ b_0(x, y)\frac{\partial z_1}{\partial y} + b_1(x, y)\, z_1 &= z, \end{aligned}$$

$$(a_0 b_0 \neq 0).$$

Par élimination de z_1 du système (1), on obtient l'équation au derivée partielle

$$(2) \qquad a_0 b_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial a_0}{\partial y} b_0 + a_0 b_1\right)\frac{\partial t}{\partial x} + a_1 b_0 \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} b_0 + a_1 b_1 - 1\right) z = 0,$$

et par élimination de z du même système, on trouve l'équation au derivée partielle

$$(3) \qquad a_0 b_0 \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + \left(a_0 \frac{\partial b_0}{\partial x} + a_1 b_0\right)\frac{\partial z_1}{\partial y} + a_0 b_1 \frac{\partial z_1}{\partial x}$$

$$+ \left(a_0 \frac{\partial b_1}{\partial x} + a_1 b_1 - 1\right) z_1 = 0.$$

Pour que l'équation (2), par le changement de fonction donné par

$$(4) \qquad a_0 \frac{\partial z}{\partial x} + a_1 z = z_1,$$

se transforme en elle-même, il faut et il suffit que le système suivant

$$
\begin{aligned}
& b_0 \frac{\partial a_0}{\partial y} + a_0 b_1 = a_0 b_1, \\
(5) \qquad & a_0 \frac{\partial b_0}{\partial x} + a_1 b_0 = a_1 b_0, \\
& b_0 \frac{\partial a_1}{\partial y} + a_1 b_1 - 1 = a_0 \frac{\partial b_1}{\partial x} + a_1 b_1 - 1
\end{aligned}
$$

soit satisfait.

De la première équation du système (5), on obtient

$$a_0 = f(x), \tag{6}$$

et de la seconde

$$b_0 = g(y), \tag{7}$$

où $f(x)\ (\neq 0)$ et $g(y)\ (\neq 0)$ sont des fonctions arbitraires de x et de y respectivement.

De la troisième équation du même système, d'apres (6) et (7), il suit

$$b_1 = g \int \frac{1}{f} \frac{\partial a_1}{\partial y} dx + h(y),$$

où $h(y)$ est une fonction arbitraire de y.

Par suite, l'équation (2) devient

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{1}{f} \int \frac{\partial a_1}{\partial y} dx + \frac{h}{g} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{a_1}{f} \frac{\partial z}{\partial y} \\
(8) \qquad & + \left(\frac{1}{f} \frac{\partial a_1}{\partial y} + \frac{a_1}{f} \int \frac{1}{f} \frac{\partial a_1}{\partial y} dx + \frac{a_1 h}{f g} - \frac{1}{f g} \right) z = 0.
\end{aligned}
$$

Puisque l'équation (8), par le changement (4), se transforme en elle-même, il suit que $z = z_1$. Si, dans l'équation (4) on pose $z = z_1$, elle devient

$$f \frac{\partial z}{\partial x} + (a_1 - 1) z = 0. \tag{9}$$

De l'équation (9) il suit

(10) $$z = \alpha(y)\, exp\left(\int \frac{1-a_1}{f}\, d\,x\right),$$

où $\alpha(y)$ ($\neq 0$) est une fonction arbitraire de y.

Pour que la fonction z, determinée par la relation (10), soit une intégrale de l'équation (8), la fonction $\alpha(y)$ doit etre une solution de l'équation suivante

(11) $$\alpha' + \frac{h-1}{g}\alpha = 0,$$

d'où l'on tire

(12) $$\alpha = C\, exp\left(\int \frac{1-h}{g}\, d\,y\right),$$

où C est une constante d'intégration.

Par suite, l'équation (8) a comme solution particulière

(13) $$z = exp\left(\int \frac{1-a_1}{f}\, d\,x + \int \frac{1-h}{g}\, d\,y\right).$$

L'équation (8), par le changement

$$z = u\, exp\left(\int \frac{1-a_1}{f}\, d\,x + \int \frac{1-h}{g}\, d\,y\right),$$

où u est une nouvelle fonction de x et de y, se transforme en équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{1}{g}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{f}\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Par suite, on peut énoncer le résultat suivant:

Théorème 1. L'équation au derivée partielle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \left(\int \frac{1}{f}\,\frac{\partial a_1}{\partial y}\, d\,x + \frac{h}{g}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{a_1}{f}\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$+ \left(\frac{1}{f}\,\frac{\partial a_1}{\partial y} + \frac{a_1}{f}\int \frac{1}{f}\,\frac{\partial a_1}{\partial y}\, d\,x + \frac{a_1 h}{f g} - \frac{1}{f g}\right) z = 0,$$

par le changement de fonction

$$f\frac{\partial z}{\partial x} + a_1 z = z_1,$$

se transforme en elle-même. Elle a comme solution particulière

$$z = exp\left(\int \frac{1-a_1}{f}\, d\,x + \int \frac{1-h}{g}\, d\,y\right).$$

2. A partir du système d'équations aux derivées partielles

$$a_0(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + a_1(x, y)\, z = z_1,$$

$$b_0(x, y)\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + b_1(x, y)\frac{\partial z_1}{\partial y} + b_2(x, y)\, z_1 = z$$

$$(a_0\, b_0 \neq 0)$$

avec un procédé analogue, on obtient le résultat suivant:

Théorème 2. L'équation au derivée partielle

(14) $$f g\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} + \left(2 f g \int \frac{1}{f}\, \frac{\partial a_1}{\partial y}\, d\,x + f h\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a_1 g\, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$+ \left[f g \int \frac{1}{f}\, \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}\, d\,x + f g\left(\int \frac{1}{f}\, \frac{\partial a_1}{\partial y}\, d\,x\right)^2 + f h \int \frac{1}{f}\, \frac{\partial a_1}{\partial y}\, d\,x + f\varphi\right]\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$+ \left(2\, g\frac{\partial a_1}{\partial y} + 2\, a_1 g \int \frac{1}{f}\, \frac{\partial a_1}{\partial y}\, d\,x + a_1 h\right)\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$+ \left[a_1\, g \int \frac{1}{f}\, \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}\, d\,x + a_1 g\left(\int \frac{1}{f}\, \frac{\partial a_1}{\partial y}\, d\,x\right)^2 + a_1 h \int \frac{1}{f}\, \frac{\partial a_1}{\partial y}\, d\,x\right.$$

$$\left. + a_1\varphi + \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}\, g + 2\frac{\partial a_1}{\partial y}\, g \int \frac{1}{f}\, \frac{\partial a_1}{\partial y}\, d\,x + h\, \frac{\partial a_1}{\partial y} - 1\right] z = 0,$$

où $f(x)$ est une fonction arbitraire de x, et g, φ, h sont des fonctions arbitraires de y, et a_1 est une fonction de x et de y, par le changement de fonction

(15) $$f\frac{\partial z}{\partial x} + a_1 z = z_1,$$

se transforme en elle-même. Elle a comme solution particulière

(16)
$$z = \alpha(y)\, exp\left(\int \frac{1-a_1}{f}\, dx\right),$$

où $\alpha(y)$ est une solution de l'équation

(17)
$$g\,\alpha'' + h\,\alpha' + (\varphi - 1)\,\alpha = 0.$$

3. Le procédé employé plus haut pour la formation des équations aux derivées partielles linéaires, transformables en elles-mêmes, s'applique aussi bien à des équations aux derivées partielles linéaires plus générales que celles envisagées dans ce qui précède.

Remarque: En ce qui concerne la transformation des équations aux derivées partielles on peut voir les transformations de Lorentz {voir, par exemple [1]} et notre Note [2].

Exemples: 1° L'équation au derivée partielle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + (x^2 + 2y)\,y\frac{\partial z}{\partial x} + x\,y^2\frac{\partial z}{\partial y} + (x^3 y^3 + 2\,x\,y^4 + 2\,x\,y - 1)\,z = 0,$$

par le changement de fonction

$$2\frac{\partial z}{\partial x} + 2\,x\,y^2\,z = z_1,$$

se transforme en elle-même. Elle a comme solution particulière

$$z = exp\left(\frac{12\,y - 4\,y^3 + 3\,x - 3\,x^2\,y^2}{6}\right)$$

et par le changement

$$z = u\, exp\left(\frac{12\,y - 4\,y^3 + 3\,x - 3\,x^2\,y^2}{6}\right)$$

se transforme en équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

La dernière équation, par le changement

$$u = v\, exp\left(-\frac{x}{2} - 2\,y\right)$$

devient

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - v = 0,$$

dont l'intégral complet est

$$v = C_2 e^{rx-sy} + C_3 e^{sx-ry} + C_4 e^{-rx+sy} + C_5 e^{-sx+ry},$$

où

$$r = \sqrt{-\frac{C_1}{2} + \sqrt{\frac{C_1^2}{4} - 1}}, \quad s = \sqrt{-\frac{C_1}{2} - \sqrt{\frac{C_1^2}{4} - 1}},$$

et les constantes C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, sont arbitraires.

Par suite, l'intégral complet de l'équation donnée est

$$z = (C_2 e^{rx-sy} + C_3 e^{sx-ry} + C_4 e^{-rx+sy} + C_5 e^{-sx+ry}) \exp\left(-\frac{4y^3 + 3x^2y^2}{6}\right).$$

2º L'équation au derivée partielle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 5x^4y^4\frac{\partial z}{\partial x} + x^3(4y^5+3)\frac{\partial z}{\partial y} + (20x^7y^9 + 20x^3y^4 + 15x^7y^4 - 1)z = 0,$$

par le changement de fonction

$$3\frac{\partial z}{\partial y} + 15x^4y^4z = z_1,$$

se transforme en elle-même. Elle a comme solution particulière

$$z = \exp\left(\frac{36x - 9x^4 + 4y - 12x^4y^5}{12}\right)$$

et par le changement

$$z = u \exp\left(\frac{36x - 9x^4 + 4y - 12x^4y^5}{12}\right)$$

se transforme en équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

La dernière équation, par le changement

$$u = v\, exp\left(-3x - \frac{y}{3}\right),$$

devient

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - v = 0,$$

dont l'intégrale complet est

$$v = C_2\, e^{rx-sy} + C_3\, e^{sx-ry} + C_4\, e^{-rx+sy} + C_5\, e^{-sx+ry}$$

où

$$r = \sqrt{-\frac{C_1}{2} + \sqrt{\frac{C_1^2}{4} - 1}}, \qquad s = \sqrt{-\frac{C_1}{2} - \sqrt{\frac{C_1^2}{4} - 1}},$$

et C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 sont des constantes arbitraires.

Par suite, l'intégrale complet de l'équation donnée est

$$z = (C_2\, e^{rx-sy} + C_3\, e^{sy-rx} + C_4\, e^{-rx+sy} + C_5\, e^{-sx+ry})\, exp\left(-\frac{x^4}{4} - x^4 y^5\right).$$

3⁰ L'équation au derivée partielle

$$x\, y^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} + x\, y\, (2\, x^2 y + 1) \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + 2\, x^2 y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + (x^5 y^2 + x^3 y + x\, y^2$$

$$- v^2 x + x) \frac{\partial z}{\partial x} + 2\, x^2 y^2 (2\, x^2 y + 3) \frac{\partial z}{\partial y} + (2\, x^6 y^3 + 6\, x^4 y^2 + 2\, x^2 y^3$$

$$- 2\, v^2 x^2 y + 4\, x^2 y - 1)\, z = 0,$$

par le changement de fonction

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2\, x^2 y\, z = z_1,$$

se transforme en elle-même. Elle a comme solution particulière

$$z = \frac{1}{x}\, \alpha\, (y)\, exp\, (x^2 y),$$

où $\alpha\,(y)$ est une solution de l'équation de Bessel

$$y^2 \alpha'' + y\, \alpha' + (y^2 - v^2)\, \alpha = 0.$$

4⁰ L'équation au derivée partielle

$$(1 - x^2)\, y \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 2\,(y^2 - x^2 y^2 - x\, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (1 - x^2)\, x\, y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$+ (2\, y - 4\, x^2 y + 2\, x\, y^2 - 2\, x^3 y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + [y^3 - x^2 y^3 - 2\, x\, y^2 + y + n\,(n+1)\, y] \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$+ [x\, y^3 - x^3 y^3 - 4\, x^2 y^2 + 2\, y^2 - x\, y + n\,(n+1)\, x\, y - 1]\, z = 0,$$

par le changement de fonction

$$y \frac{\partial z}{\partial y} + x\, y\, z = z_1,$$

se transforme en elle-même. Elle a comme solution particulière

$$z = y\, \alpha\,(x)\, exp\,(-\, x\, y),$$

où $\alpha\,(x)$ est une solution de l'équation de Legendre

$$(1 - x^2)\, \alpha'' - 2\, x\, \alpha' + n\,(n+1)\, \alpha = 0.$$

RÉFÉRENCES

[1] M. A. Buhl, Nouvaux éléments d'analyse, tome I, deuxième édition, Paris, 1944, p. 132—135.

[2] Ilija A. Šapkarev, Sur des équations aux derivées partielles du second ordre transformables en elles-mêmes par un changement de fonction, Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите на СР Македонија, книга XIV (1963) стр. 23—30.

ЗА ЛИНЕАРНИ ПАРЦИЈАЛНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР И ТРЕТ РЕД КОИ СЕ ТРАНСФОРМИРААТ САМИ ВО СЕБЕ СО СМЕНА НА ФУНКЦИЈАТА

Илија А. Шапкарев

Резиме

Во овој труд се покажува дека парцијалната диференцијална равенка (8), со смената на функцијата (4), се трансформира сама во себе. Користејќи ја оваа особина се добива дека (13) е нејзин партикуларен интеграл.

Исто така се наведува дека парцијалната диференцијална равенка (14), со смената на функцијата (15), се трансформира сама во себе. Со помош на оваа особина се наоѓа дека нејзин партикуларен интеграл е даден со (16), каде што $\alpha\,(y)$ е решение на (17).