ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПЕТТИ И ШЕСТИ РЕД КОИ СО СМЕНА НА ФУНКЦИЈАТА СЕ ТЕАНСФОРМИРААТ САМИ ВО СЕБЕ

Илија А. Шапкарев

Да го земеме системот равенки

$$
\begin{gathered}
a_0(x)\,y' + a_1(x)\,y = z, \\
b_0(x)\,z^{(4)} + b_1(x)\,z''' + b_2(x)\,z'' + b_3(x)\,z' + b_4(x)\,z = y, \\
(a_0 b_0 \neq 0).
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Со елиминација на z од системот (1.1), ја добиваме диференцијалната равенка

$$
\begin{aligned}
y^{(5)} &+ \left(\frac{a_1}{a_0} + 4\frac{a_0'}{a_0} + \frac{b_1}{b_0}\right)y^{(4)} + \left(6\frac{a_0''}{a_0} + 4\frac{a_1'}{a_0} + 3\frac{a_0'\,b_1}{a_0\,b_0} + \frac{a_1\,b_1}{a_0\,b_0} + \frac{b_2}{b_0}\right)y''' \\
&+ \left(4\frac{a_0'''}{a_0} + 6\frac{a_1''}{a_0} + 3\frac{a_0''\,b_1}{a_0\,b_0} + 3\frac{a_1'\,b_1}{a_0\,b_0} + 2\frac{a_0'\,b_2}{a_0\,b_0} + \frac{a_1\,b_2}{a_0\,b_0} + \frac{b_3}{b_0}\right)y'' \\
&+ \left(\frac{a_0^{(4)}}{a_0} + 4\frac{a_1'''}{a_0} + \frac{a_0'''\,b_1}{a_0\,b_0} + 3\frac{a_1''\,b_1}{a_0\,b_0} + \frac{a_0''\,b_2}{a_0\,b_0} + 2\frac{a_1'\,b_2}{a_0\,b_0} + \frac{a_0'\,b_3}{a_0\,b_0} + \frac{a_1 b_3}{a_0 b_0} + \frac{b_4}{b_0}\right)y' \\
&+ \left(\frac{a_1^{(4)}}{a_0} + \frac{a_1'''\,b_1}{a_0\,b_0} + \frac{a_1''\,b_2}{a_0\,b_0} + \frac{a_1'\,b_3}{a_0\,b_0} + \frac{a_1\,b_4}{a_0\,b_0} - \frac{1}{a_0\,b_0}\right)y = 0,
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

а со елиминација на y, равенката

$$
\begin{aligned}
z^{(5)} &+ \left(\frac{b_0'}{b_0} + \frac{b_1}{b_0} + \frac{a_1}{a_0}\right)z^{(4)} + \left(\frac{b_1'}{b_0} + \frac{b_2}{b_0} + \frac{a_1\,b_1}{a_0\,b_0}\right)z''' + \left(\frac{b_2'}{b_0} + \frac{b_3}{b_0} + \frac{a_1 b_2}{a_0 b_0}\right)z'' \\
&+ \left(\frac{b_3'}{b_0} + \frac{b_4}{b_0} + \frac{a_1\,b_3}{a_0\,b_0}\right)z' + \left(\frac{b_4'}{b_0} + \frac{a_1\,b_4}{a_0\,b_0} - \frac{1}{a_0\,b_0}\right)z = 0.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

За да се трансформира равенката (1.2), со смената на функцијата

$$a_0 y' + a_1 y = z, \tag{1.4}$$

сама во себе, треба да биде исполнет системот равенки

$$\frac{a_1}{a_0} + 4\frac{a_0'}{a_0} + \frac{b_1}{b_0} = \frac{a_1}{a_0} + \frac{b_1}{b_0} + \frac{b_0'}{b_0},$$

$$6\frac{a_0''}{a_0} + 4\frac{a_1'}{a_0} + 3\frac{a_0' b_1}{a_0 b_0} + \frac{a_1 b_1}{a_0 b_0} + \frac{b_2}{b_0} = \frac{a_1 b_1}{a_0 b_0} + \frac{b_1'}{b_0} + \frac{b_2}{b_0},$$

$$\begin{aligned}(1.5)\qquad & 4\frac{a_0'''}{a_0} + 6\frac{a_1''}{a_0} + 3\frac{a_0'' b_1}{a_0 b_0} + 3\frac{a_1' b_1}{a_0 b_0} + 2\frac{a_0' b_2}{a_0 b_0} + \frac{a_1 b_2}{a_0 b_0} + \frac{b_3}{b_0} \\ & = \frac{a_1 b_2}{a_0 b_0} + \frac{b_2'}{b_0} + \frac{b_3}{b_0},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \frac{a_0^{(4)}}{a_0} + 4\frac{a_1'''}{a_0} + \frac{a_0''' b_1}{a_0 b_0} + 3\frac{a_1'' b_1}{a_0 b_0} + \frac{a_0'' b_2}{a_0 b_0} + 2\frac{a_1' b_2}{a_0 b_0} + \frac{a_0' b_3}{a_0 b_0} \\ & + \frac{a_1 b_3}{a_0 b_0} + \frac{b_4}{b_0} = \frac{a_1 b_3}{a_0 b_0} + \frac{b_3'}{b_0} + \frac{b_4}{b_0},\end{aligned}$$

$$\frac{a_1^{(4)}}{a_0} + \frac{a_1''' b_1}{a_0 b_0} + \frac{a_1'' b_2}{a_0 b_0} + \frac{a_1' b_3}{a_0 b_0} + \frac{a_1 b_4}{a_0 b_0} - \frac{1}{a_0 b_0} = \frac{a_1 b_4}{a_0 b_0} + \frac{b_4'}{b_0} - \frac{1}{a_0 b_0}.$$

Од првата равенка од системот (1.5) добиваме

$$b_0 = A_0 a_0^4, \tag{1.6}$$

а од втората равенка од истиот систем, за определување на b_1 ја имаме диференцијалната равенка

$$b_1' - 3\frac{a_0'}{a_0} b_1 = 6\frac{a_0''}{a_0} b_0 + 4\frac{a_1'}{a_0} b_0,$$

од каде што, според (1.6), следува

$$b_1 = A_0 (6a_0^3 a_0' + 4a_0^3 a_1) + A_1 a_0^3. \tag{1.7}$$

Од третата равенка од системот (1.5), за определување на b_2, ја добиваме диференцијалната равенка

$$b_2' - 2\frac{a_0'}{a_0}b_2 = 4\frac{a_0'''}{a_0}b_0 + 6\frac{a_1''}{a_0}b_0 + 3\frac{a_0''}{a_0}b_1 + 3\frac{a_1'}{a_0}b_1,$$

од каде што, во врска со (1.6) и (1.7), добиваме

$$(1.8)\qquad b_2 = A_0(4a_0^3a_0'' + 7a_0^2a_0'^2 + 6a_0^3a_1' + 12a_0^2a_0'a_1 + 6a_0^2a_1^2) + A_1(3a_0^2a_0' + 3a_0^2a_1) + A_2a_0^2.$$

Од четвртата равенка од системлт (1.5), за определување на b_3, ја добиваме диференцијалната равенка

$$b_3' - \frac{a_0'}{a_0}b_3 = \frac{a_0^{(4)}}{a_0}b_0 + 4\frac{a_1'''}{a_0}b_0 + 3\frac{a_1''}{a_0}b_1 + \frac{a_0''}{a_0}b_2 + 2\frac{a_1'}{a_0}b_2 + \frac{a_0'''}{a_0}b_1,$$

од каде што, во врска со (1.6), (1.7) и (1.8), следува

$$(1.9)\qquad b_3 = A_0(a_0^3a_0''' + 4a_0^2a_0'a_0'' + a_0a_0'^3 + 4a_0^3a_1'' + 10a_0^2a_0'a_1' + 4a_0^2a_0''a_1 + 4a_0a_0'^2a_1 + 12a_0^2a_1a_1' + 6a_0a_0'a_1^2 + 4a_0a_1^3) + A_1(a_0^2a_0'' + a_0'^2a_0 + 3a_0a_0'a_1 + 3a_0^2a_1' + 3a_0a_1^2) + A_2(a_0a_0' + 2a_0a_1) + A_3a_0.$$

Од последната равенка од системот (1.5), во врска со (1.6), (1.7), (1.8) и (1.9), добиваме

$$(1.10)\qquad b_4 = A_0(a_0^3a_1''' + 3a_0^2a_0'a_1'' + a_0^2a_0''a_1' + a_0a_0'^2a_1' + 4a_0^2a_1a_1'' + 3a_0^2a_1'^2 + 4a_0a_0'a_1a_1' + 6a_0a_1^2a_1' + a_1^4) + A_1(a_0^2a_1'' + a_0a_0'a_1' + 3a_0a_1a_1' + a_1^3) + A_2(a_0a_1' + a_1^2) + A_3a_1 + A_4.$$

Притоа константите $A_0\,(\neq 0)$, A_1, A_2, A_3, A_4 се произволни.

Бидејќи равенката (1.2), со смената (1.4), се трансформира сама во себе, следува дека $z = y$. Ако во равенката (1.4), се стави $z = y$, таа станува

$$(1.11)\qquad a_0y' + (a_1 - 1)y = 0,$$

чиј интеграл е

$$(1.12)\qquad y = exp\left(\int \frac{1-a_1}{a_0}dx\right).$$

Равенка од петти ред, која има особина секој интеграл од равенката (1.12) да биде и нејзин интеграл, има вид

$$(p_0D^4 + p_1D^3 + p_2D^2 + p_3D + p_4)[a_0Dy + (a_1 - 1)y] = 0,$$

каде што $p_0\,(\neq 0), p_1, p_2, p_3, p_4$ се произволни функции од x, односно

$$y^{(5)}+\left(4\frac{a_0'}{a_0}+\frac{a_1}{a_0}+\frac{p_1}{p_0}-\frac{1}{a_0}\right)y^{(4)}+\left(6\frac{a_0''}{a_0}+4\frac{a_1'}{a_0}+3\frac{a_0'p_1}{a_0p_0}+\frac{a_1p_1}{a_0p_0}+\frac{p_2}{p_0}-\frac{p_1}{a_0p_0}\right)y'''$$

$$+\left(4\frac{a_0'''}{a_0}+6\frac{a_1''}{a_0}+3\frac{a_0''p_1}{a_0p_0}+3\frac{a_1'p_1}{a_0p_0}+2\frac{a_0'p_2}{a_0p_0}+\frac{a_1p_2}{a_0p_0}+\frac{p_3}{p_0}-\frac{p_2}{a_0p_0}\right)y''$$

$$+\left(\frac{a_0^{(4)}}{a_0}+4\frac{a_1'''}{a_0}+\frac{a_0'''p_1}{a_0p_0}+3\frac{a_1''p_1}{a_0p_0}+\frac{a_0''p_2}{a_0p_0}+2\frac{a_1'p_2}{a_0p_0}\right.$$

$$\left.+\frac{a_0'p_3}{a_0p_0}+\frac{a_1p_3}{a_0p_0}-\frac{p_3}{a_0p_0}+\frac{p_4}{p_0}\right)y'$$

$$+\left(\frac{a_1^{(4)}}{a_0}+\frac{a_1'''p_1}{a_0p_0}+\frac{a_1''p_2}{a_0p_0}+\frac{a_1'p_3}{a_0p_0}+\frac{a_1p_4}{a_0p_0}-\frac{p_4}{a_0p_0}\right)y=0.$$

За да има равенката (1.2) особина секое решение од равенката (1.11) да биде и нејзино решение, треба да биде исполнет системот равенки

$$\frac{a_1}{a_0}+4\frac{a_0'}{a_0}+\frac{b_1}{b_0}=4\frac{a_0'}{a_0}+\frac{a_1}{a_0}+\frac{p_1}{p_0}-\frac{1}{a_0},$$

$$6\frac{a_0''}{a_0}+4\frac{a_1'}{a_0}+3\frac{a_0'b_1}{a_0b_0}+\frac{a_1b_1}{a_0b_0}+\frac{b_2}{b_0}=6\frac{a_0''}{a_0}+4\frac{a_1'}{a_0}+3\frac{a_0'p_1}{a_0p_0}+\frac{a_1p_1}{a_0p_0}+\frac{p_2}{p_0}-\frac{p_1}{a_0p_0},$$

$$4\frac{a_0'''}{a_0}+6\frac{a_1''}{a_0}+3\frac{a_0''b_3}{a_0b_0}+3\frac{a_1'b_1}{a_0b_0}+2\frac{a_0'b_2}{a_0b_0}+\frac{a_1b_2}{a_0b_0}+\frac{b_3}{b_0}$$

$$(1.13)\qquad =4\frac{a_0'''}{a_0}+6\frac{a_1''}{a_0}+3\frac{a_0''p_1}{a_0p_0}+3\frac{a_1'p_1}{a_0p_0}+2\frac{a_0'p_2}{a_0p_0}+\frac{a_1p_2}{a_0p_0}+\frac{p_3}{p_0}-\frac{p_2}{a_0p_0},$$

$$\frac{a_0^{(4)}}{a_0}+4\frac{a_1'''}{a_0}+\frac{a_0'''b_1}{a_0b_0}+3\frac{a_1''b_1}{a_0b_0}+\frac{a_0''b_2}{a_0b_0}+2\frac{a_1'b_2}{a_0b_0}+\frac{a_0'b_3}{a_0b_0}+\frac{a_1b_3}{a_0b_0}+\frac{b_4}{b_0}$$

$$=\frac{a_0^{(4)}}{a_0}+4\frac{a_1'''}{a_0}+\frac{a_0'''p_1}{a_0p_0}+3\frac{a_1''p_1}{a_0p_0}+\frac{a_0''p_2}{a_0p_0}$$

$$+2\frac{a_1'p_2}{a_0p_0}+\frac{a_0'p_3}{a_0p_0}+\frac{a_1p_3}{a_0p_0}-\frac{p_3}{a_0p_0}+\frac{p_4}{p_0},$$

$$\frac{a_1^{(4)}}{a_0}+\frac{a_1'''b_1}{a_0b_0}+\frac{a_1''b_2}{a_0b_0}+\frac{a_1'b_3}{a_0b_0}+\frac{a_1b_4}{a_0b_0}-\frac{1}{a_0b_0}$$

$$=\frac{a_1^{(4)}}{a_0}+\frac{a_1'''p_1}{a_0p_0}+\frac{a_1''p_2}{a_0p_0}+\frac{a_1'p_3}{a_0p_0}+\frac{a_1p_4}{a_0p_0}-\frac{p_4}{a_0p_0}.$$

Од првата равенка од системот (1.13), имаме

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{b_1}{b_0} + \frac{1}{a_0}, \tag{1.14}$$

а од втората равенка од истиот систем, во врска со (1.14), добиваме

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{b_2}{b_0} + \frac{1}{a_0^2} + \frac{b_1}{a_0 b_0} - \frac{a_1}{a_0^2} - 3\frac{a_0'}{a_0^2}. \tag{1.15}$$

Од третата равенка од системот (1.13), во врска со (1 14) и (115), следува

$$\frac{p_3}{p_0} = \frac{b_3}{b_0} + \frac{1}{a_0^3} + 5\frac{a_0' a_1}{a_0^3} + 6\frac{a_0'^2}{a_0^3} + \frac{a_1^2}{a_0^3} - 3\frac{a_0''}{a_0^2} - 3\frac{a_1'}{a_0^2} \tag{1.16}$$

$$-5\frac{a_0'}{a_0^3} - 2\frac{a_1}{a_0^3} - 2\frac{a_0' b_1}{a_0^2 b_0} - \frac{a_1 b_1}{a_0^2 b_0} + \frac{b_2}{a_0 b_0} + \frac{b_1}{a_0^2 b_0},$$

а од четвртата равенка од истиот систем, во врска со (1.14), (1.15), (1.16), (1.6), (1.7), (1.8) и (1.9), добиваме

$$\frac{p_4}{p_0} = \frac{a_1''}{a_0^2} + \frac{a_1'}{a_0^3} + \frac{a_0' a_1'}{a_0^3} + 3\frac{a_1 a_1'}{a_0^3} + \frac{a_1^3}{a_0^4} + \frac{a_1^2}{a_0^4} + \frac{1}{a_0^4} + \frac{A_1 a_1'}{A_0 a_0^3} \tag{1.17}$$

$$+ \frac{A_1 a_1^2}{A_0 a_0^4} + \frac{A_1 a_1}{A_0 a_0^4} + \frac{A_1}{A_0 a_0^4} + \frac{A_2 a_1}{A_0 a_0^4} + \frac{A_3}{A_0 a_0^4} + \frac{b_4}{b_0}.$$

Последната равенка од системот (1.13), во врска со (1.14), (1.15), (1.16), (1.17) и имајќи ги предвид (1.6), (1.7), (1.8), (1.9) и (1.10), ќе биде задоволена, ако меѓу константите A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 постои релацијата

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1.$$

Диференцијална равенка од четврт ред, која има особина секое решение од равенката (1.12) да биде и нејзино решение, има вид

$$(q_0 D^3 + q_1 D^2 + q_2 D + q_3)[a_0 Dy + (a_1 - 1)y] = 0,$$

каде што $q_0(\neq 0)$, q_1, q_2, q_3 се произволни функции од x, односно

$$y^{(4)} + \left(3\frac{a_0'}{a_0} + \frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{a_0} + \frac{q_1}{q_0}\right)y''' + \left(3\frac{a_0''}{a_0} + 3\frac{a_1'}{a_0} + 2\frac{a_0' a_1}{a_0 q_0} + \frac{a_1 q_1}{a_0 q_0}\right.$$

$$\left. - \frac{q_1}{a_0 q_0} + \frac{q_2}{q_0}\right)y'' + \left(\frac{a_0'''}{a_0} + 3\frac{a_1''}{a_0} + \frac{a_0'' q_1}{a_0 q_0} + 2\frac{a_1' q_1}{a_0 q_0} + \frac{a_0' q_2}{a_0 q_0} + \frac{a_1 q_2}{a_0 q_0}\right.$$

$$\left. - \frac{q_2}{a_0 q_0} + \frac{q_3}{q_0}\right)y' + \left(\frac{a_1'''}{a_0} + \frac{a_1'' q_1}{a_0 q_0} + \frac{a_1' q_2}{a_0 q_0} + \frac{a_1 q_3}{a_0 q_0} - \frac{q_3}{a_0 q_0}\right)y = 0.$$

За да има равенката

$$y^{(4)}+\frac{b_1}{b_0}y'''+\frac{b_2}{b_0}y''+\frac{b_3}{b_0}y'+\frac{b_4-1}{b_0}y=0$$

особина секое решение на равенката (1.11) да биде и нејзино решение, во врска со (1.6), (1.7), (1.8), (1.9), (1.10), треба да биде исполнет системот равенки

$$3\frac{a_0'}{a_0}+\frac{a_1}{a_0}-\frac{1}{a_0}+\frac{q_1}{q_0}=6\frac{a_0'}{a_0}+4\frac{a_1}{a_0}+\frac{A_1}{A_0a_0},$$

$$3\frac{a_0''}{a_0}+3\frac{a_1'}{a_0}+2\frac{a_0'q_1}{a_0q_0}+\frac{a_1q_1}{a_0q_0}-\frac{q_1}{a_0q_0}+\frac{q_2}{q_0}=4\frac{a_0''}{a_0}+7\frac{a_0'^2}{a_0^2}+6\frac{a_1'}{a_0}$$
$$+12\frac{a_0'a_1}{a_0^2}+6\frac{a_1^2}{a_0^2}+3\frac{A_1a_0'}{A_0a_0^2}+\frac{A_2}{A_0a_0^2},$$

$$\frac{a_0'''}{a_0}+3\frac{a_1''}{a_0}+\frac{a_0''q_1}{a_0q_0}+2\frac{a_1'q_1}{a_0q_0}+\frac{a_0'q_2}{a_0q_0}$$
$$+\frac{a_1q_2}{a_0q_0}-\frac{q_2}{a_0q_0}+\frac{q_3}{q_0}=\frac{a_0'''}{a_0}+4\frac{a_0'a_0''}{a_0^2}+\frac{a_0'^3}{a_0^3}+4\frac{a_1''}{a_0}+10\frac{a_0'a_1'}{a_0^2}+4\frac{a_0''a_1}{a_0^2}$$
$$(1.18)\qquad +4\frac{a_0'^2a_1}{a_0^3}+12\frac{a_1a_1'}{a_0^2}+6\frac{a_0'a_1^2}{a_0^2}+4\frac{a_1^3}{a_0^3}+\frac{A_1a_0''}{A_0a_0^2}+\frac{A_1a_0'^2}{A_0a_0^3}$$
$$+3\frac{A_1a_0'a_1}{A_0a_0^3}+3\frac{A_1a_1'}{A_0a_0^2}+3\frac{A_1a_1^2}{A_0a_0^3}+\frac{A_2a_0'}{A_0a_0^3}+2\frac{A_2a_1}{A_0a_0^3}+\frac{A_3}{A_0a_0^3},$$

$$\frac{a_1'''}{a_0}+\frac{a_1''q_1}{a_0q_0}+\frac{a_1'q_2}{a_0q_0}+\frac{a_1q_3}{a_0q_0}-\frac{q_3}{a_0q_0}=\frac{a_1'''}{a_0}+3\frac{a_0'a_1''}{a_0^2}+\frac{a_0''a_1'}{a_0^2}+\frac{a_0'^2a_1'}{a_0^3}$$
$$+4\frac{a_1a_1''}{a_0^2}+3\frac{a_1'^2}{a_0^2}+4\frac{a_0'a_1a_1'}{a_0^3}+6\frac{a_1^2a_1'}{a_0^3}+\frac{a_1^4}{a_0^4}+\frac{A_1a_1''}{A_0a_0^2}+\frac{A_1a_0'a_1'}{A_0a_0^3}$$
$$+3\frac{A_1a_1a_1'}{A_0a_0^3}+\frac{A_1a_1^3}{A_0a_0^4}+\frac{A_2a_1'}{A_0a_0^3}+\frac{A_2a_1^2}{A_0a_0^3}+\frac{A_3a_1}{A_0a_0^4}+\frac{A_4}{A_0a_0^4}.$$

Од првата равенка од системот (1.18) добиваме

$$(1.19)\qquad \frac{q_1}{q_0}=3\frac{a_0'}{a_0}+3\frac{a_1}{a_0}+\frac{1}{a_0}+\frac{A_1}{A_0a_0},$$

а од втората равенка од истиот систем, според (1.19), следува:

$$(1.20)\qquad \frac{q_2}{q_0}=\frac{a_0''}{a_0}+\frac{a_0'^2}{a_0^2}+3\frac{a_1'}{a_0}+3\frac{a_0'a_1}{a_0^2}+3\frac{a_1^2}{a_0^2}+\frac{a_0'}{a_0^2}+2\frac{a_1}{a_0^2}+\frac{1}{a_0^2}$$
$$+\frac{A_1a_0'}{A_0a_0^2}+2\frac{A_1a_1}{A_0a_0^2}+\frac{A_1}{A_0a_0^2}+\frac{A_2}{A_0a_0^2}.$$

Од третата равенка од системот (1.18), според (1.19) и (1.20), добиваме

$$(1.21)\qquad \frac{q_3}{q_0}=\frac{a_1''}{a_0}+\frac{a_0'a_1'}{a_0^2}+3\frac{a_1a_1'}{a_0^2}+\frac{a_1^3}{a_0^3}+\frac{a_1'}{a_0^2}+\frac{a_1^2}{a_0^3}+\frac{a_1}{a_0^3}+\frac{1}{a_0^3}$$

$$+\frac{A_1a_1'}{A_0a_0^2}+\frac{A_1a_1^2}{A_0a_0^3}+\frac{A_1a_1}{A_0a_0^2}+\frac{A_1}{A_0a_0^3}+\frac{A_2a_1}{A_0a_0^3}+\frac{A_2}{A_0a_0^3}+\frac{A_3}{A_0a_0^3},$$

а четвртата равенка од истиот систем, во врска со (1.19) (1.20) и (1.21), ќе биде задоволена, ако меѓу константите A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 постои релацијата

$$A_0+A_1+A_2+A_3+A_4=1.$$

Равенка од петти ред, која има особина секое решение од равенката

$$(1.22)\qquad b_0y^{(4)}+b_1y'''+b_2y''+b_3y'+(b_4-1)y=0,$$

да биде и нејзино решение, има вид

$$(r_0D+r_1)\left[b_0y^{(4)}+b_1y'''+b_2y''+b_3y'+(b_4-1)y\right]=0,$$

каде што r_0 ($\neq 0$) и r_1 се произволни функции од x, односно

$$y^{(5)}+\left(\frac{b_0'}{b_0}+\frac{b_1}{b_0}+\frac{r_1}{r_0}\right)y^{(4)}+\left(\frac{b_1'}{b_0}+\frac{b_2}{b_0}+\frac{b_1r_1}{b_0r_0}\right)y'''+\left(\frac{b_2'}{b_0}+\frac{b_3}{b_0}+\frac{r_1b_2}{r_0b_0}\right)y''$$

$$+\left(\frac{b_3'}{b_0}+\frac{b_4}{b_0}-\frac{1}{b_0}+\frac{b_3r_1}{r_0b_0}\right)y'+\left(\frac{b_4'}{b_0}+\frac{r_1b_4}{r_0b_0}-\frac{r_1}{r_0b_0}\right)y=0.$$

За да има равенката (1.3) особина секое решение од (1.22) да биде и нејзино решение, треба да биде исполнет системот равенки

$$\frac{b_0'}{b_0}+\frac{b_1}{b_0}+\frac{a_1}{a_0}=\frac{b_0'}{b_0}+\frac{b_1}{b_0}+\frac{r_1}{r_0},$$

$$\frac{b_1'}{b_0}+\frac{b_2}{b_0}+\frac{a_1b_1}{a_0b_0}=\frac{b_1'}{b_0}+\frac{b_2}{b_0}+\frac{b_1r_1}{b_0r_0},$$

$$(1.23)\qquad \frac{b_2'}{b_0}+\frac{b_3}{b_0}+\frac{a_1b_2}{a_0b_0}=\frac{b_2'}{b_0}+\frac{b_3}{b_0}+\frac{r_1b_2}{r_0b_0},$$

$$\frac{b_3'}{b_0}+\frac{b_4}{b_0}+\frac{a_1b_3}{a_0b_0}=\frac{b_3'}{b_0}+\frac{b_4}{b_0}-\frac{1}{b_0}+\frac{b_3r_1}{r_0b_0},$$

$$\frac{b_4}{b_0}+\frac{a_1b_4}{a_0b_0}-\frac{1}{a_0b_0}=\frac{b_4'}{b_0}+\frac{r_1b_4}{r_0b_0}-\frac{r_1}{r_0b_0}.$$

Од првата равенка од системот (1.23) добиваме

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{a_1}{a_0}, \tag{1.24}$$

а втората и третата, во врска со (1.24) се идентично задоволени. Четвртата равенка, според (1.24), ќе биде задоволена, ако $\frac{1}{b_0} = 0$ т. е. ако $\frac{1}{A_0 a_0^4} = 0$, што противуречи на направената претпоставка.

Во врска со сето напред изнесено може да се искаже следната

Теорема 1. Диференцијалната равенка (1.2), при која b_0, b_1, b_2, b_3 и b_4 се определени со (1.6), (1.7), (1.8), (1.9) и (1.10), со смената на функцијата (1.4), се трансформира сама во себе. Таа има партикуларен интеграл (1.12), ако меѓу константите A_0, A_1, A_2, A_3 и A_4 постои релацијата

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1.$$

Пример. Диференцијалната равенка

$$y^{(5)} + (5x+\alpha)\, y^{(4)} + (10x^2 + 4\alpha x + 10 + \beta)\, y''' + (10x^3 + 6\alpha\, x^2 + 30x + 3\beta x + 6\alpha + \gamma)\, y''$$
$$+ (5x^4 + 4\alpha x^3 + 30x^2 + 3\beta x^2 + 12\alpha x + 2\gamma x + 15 + 3\beta + \delta)\, y'$$
$$+ (x^5 + \alpha x^4 + 10x^3 + \beta x^3 + 6\alpha x^2 + \gamma x^2 + 15x + 3\beta x + \delta x + 2\alpha - \beta - \delta - 1)\, y = 0,$$

со смената

$$y' + xy = z,$$

се трансформира сама во себе. Таа има партикуларен интеграл

$$y = e^{x - \frac{x^2}{2}}$$

и со смената

$$y = u\, e^{x - \frac{x^2}{2}}$$

станува

$$v^{(4)} + (\alpha + 5)\, v''' + (4\alpha + \beta + 10)\, v'' + (6\alpha + 3\beta + \gamma + 10)\, v'$$
$$+ (4\alpha + 3\beta + 2\gamma + \delta + 5)\, v = 0 \quad (u' = v),$$

чиј општ интеграл, за $\alpha = -15$, $\beta = 85$, $\gamma = -225$, $\delta = 324$ е

$$v = C_1' e^x + C_2' e^{2x} + C_3' e^{3x} + C_4' e^{4x}.$$

Во врска со тоа, општиот интеграл на равенката

$$y^{(5)} + (5x - 15)\, y^{(4)} + (10x^2 - 60x + 95)\, y''' + (10x^3 - 90x^2 + 285x - 315)\, y'' + (5x^4$$
$$- 60x^3 + 285x^2 - 630x + 594) y' + (x^5 - 15x^4 + 95x^3 - 315x^2 + 594x - 440)\, y = 0,$$

ќе биде

$$y = e^{x - \frac{x^2}{2}} (C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{3x} + C_5 e^{4x}).$$

2. Поаѓајќи од системот равенки

$$a_{0(x)}\, y'' + a_{1(x)}\, y' + a_{2(x)}\, y = z,$$

$$b_{0(x)}\, z''' + b_{1(x)}\, z'' + b_{2(x)}\, z' + b_{3(x)}\, z = y,$$

$$(a_0\, b_0 \neq 0)$$

и применувајќи ја напред наведената постапка, можеме да ја искажеме следната

Теорема 2. Диференцијалната равенка

$$\begin{aligned}(2.1)\qquad & y^{(5)} + \left(3\frac{a_0'}{a_0} + \frac{a_1}{a_0} + \frac{b_1}{b_0}\right) y^{(4)} + \left(3\frac{a_0''}{a_0} + 3\frac{a_1'}{a_0} + \frac{a_2}{a_0} + 2\frac{a_0'\, b_1}{a_0 b_0}\right.\\ & \left. + \frac{a_1 b_1}{a_0 b_0} + \frac{b_2}{b_0}\right) y''' + \left(\frac{a_0'''}{a_0} + 3\frac{a_1''}{a_0} + 3\frac{a_2'}{a_0} + \frac{a_0'' b_1}{a_0 b_0} + 2\frac{a_1' b_1}{a_0 b_0} + \frac{a_2 b_1}{a_0 b_0} + \frac{a_0' b_2}{a_0 b_0}\right.\\ & \left. + \frac{b_3}{b_0} + \frac{a_1' b_2}{a_0 b_0}\right) y'' + \left(\frac{a_1'''}{a_0} + 3\frac{a_2''}{a_0} + \frac{a_1'' b_1}{a_0 b_0} + 2\frac{a_2' b_1}{a_0 b_0} + \frac{a_1' b_2}{a_0 b_0} + \frac{a_2 b_2}{a_0 b_0} + \frac{a_1 b_3}{a_0 b_0}\right) y'\\ & + \left(\frac{a_2'''}{a_0} + \frac{a_2'' b_1}{a_0 b_0} + \frac{a_2' b_2}{a_0 b_0} + \frac{a_2 b_3}{a_0 b_0} - \frac{1}{a_0 b_0}\right) y = 0,\end{aligned}$$

при која

$$(2.2)\qquad b_0 = A_0\, a_0^{3/2},$$

$$(2.3)\qquad b_1 = A_1\, a_0 + \frac{3}{4} A_0\, a_0^{1/2}\, a_0' + \frac{3}{2} A_0\, a_0^{1/2}\, a_1,$$

$$(2.4)\qquad b_2 = a_0^{1/2}\left[A_0\left(\frac{a_0''}{8} + \frac{3a'_1}{4} + \frac{3a_2}{2} + \frac{3a_1^2}{8a_0} - \frac{3a'^2}{32a_0}\right) + A_1\frac{a_1}{a_0^{1/2}} + A_2\right],$$

$$\begin{aligned}(2.5)\qquad b_3 = {} & \frac{A_0}{8} a_0^{1/2} a_1'' + 3\frac{A_0\, a_0^{1/2}\, a_2'}{4} + A_1 a_2 + \frac{3A_0\, a_0^{-1/2}\, a_1\, a_2}{4} + \frac{A_2\, a_0^{-1/2}\, a_1}{2}\\ & - \frac{3A_0\, a_0^{-3/2}\, a_1^3}{16} - \frac{A_0\, a_0^{-1/2}\, a_0'\, a_1'}{16} - \frac{A_0\, a_0^{-1/2}\, a_0'' a_1}{16} + \frac{A_0\, a_0^{-3/2} a_0'^2 a_1}{64}\\ & + \frac{A_0 a_0^{-1/2}\, a_0'\, a_0''}{16} - \frac{A_0\, a_0^{1/2} a_0'''}{16} - \frac{3A_0\, a_0^{-1/2}\, a_0' a_2}{8} + \frac{3A_0\, a_0^{-3/2}\, a_0' a_1^2}{32}\\ & - \frac{3A_0\, a_0^{-3/2}\, a_0'^3}{128} - \frac{A_2\, a_0^{-1/2}\, a'_0}{4} + A_3,\end{aligned}$$

каде што $A_0\,(\neq 0)$, A_1, A_2, A_3 се произволни константи, со смената на функцијата

$$a_0\,y''+a_1\,y'+a_2\,y=z, \tag{2.6}$$

се трансформира сама во себе, ако е исполнета релацијата

$$\frac{a_2'''}{a_0}+\frac{a_2''b_1}{a_0b_0}+\frac{a_2'\,b_2}{a_0b_0}=\frac{b_3''}{b_0}+\frac{a_1\,b_3'}{a_0b_0}. \tag{2.7}$$

Пример. Диференцијалната равенка

$$x^5\,y^{(5)}+9x^4\,y^{(4)}+22x^3\,y'''+14x^2\,y''+7x\,y'+2\,y=0,$$

со смената на функцијата

$$x^2\,y''+2x\,y'+3\,y=z,$$

се трансформира сама во себе.

3. Со примена на наведената постапка на системот диференцијални равенки

$$a_0\,y'+a_1\,y=z,$$

$$b_0\,z^{(5)}+b_1\,z^{(4)}+b_2\,z'''+b_3\,z''+b_4\,z'+b_5\,z=y,$$

каде што a_0 $(\neq 0)$ a_1, b_0 $(\neq 0)$ b_1, b_2, b_3, b_4 и b_5 се диференцијабилни функции од x, може да се искаже следната

Теорема 3. Диференцијалната равенка

$$\begin{aligned}
y^{(6)}&+\left(5\frac{a_0'}{a_0}+\frac{a_1}{a_0}+\frac{b_1}{b_0}\right)y^{(5)}+\left(10\,\frac{a_0''}{a_0}+5\frac{a_1'}{a_0}+4\,\frac{a_0'b_1}{a_0\,b_0}+\frac{a_1b_1}{a_0b_0}\right.\\
&\left.+\frac{b_2}{b_0}\right)y^{(4)}+\left(10\,\frac{a_0'''}{a_0}+10\frac{a_1''}{a_0}+6\,\frac{a_0''b_1}{a_0\,b_0}+4\,\frac{a_1'\,b_1}{a_0\,b_0}+3\,\frac{a_0'\,b_2}{a_0\,b_0}+\frac{a_1b_2}{a_0b_0}+\frac{b_3}{b_0}\right)y'''\\
&+\left(5\frac{a_0^{(4)}}{a_0}+10\,\frac{a_1'''}{a_0}+4\,\frac{a_0'''\,b_1}{a_0\,b_0}+6\,\frac{a_1''b_1}{a_0\,b_0}+3\,\frac{a_0''b_2}{a_0b_0}+3\,\frac{a_1'\,b_2}{a_0\,b_0}+2\,\frac{a_0'\,b_3}{a_0\,b_0}\right.\\
&\left.+\frac{a_1b_3}{a_0b_0}+\frac{b_4}{b_0}\right)y''+\left(\frac{a_0^{(5)}}{a_0}+5\,\frac{a_1^{(4)}}{a_0}+\frac{a_0^{(4)}b_1}{a_0\,b_0}+4\,\frac{a_1'''\,b_1}{a_0\,b_0}+\frac{a_0'''\,b_2}{a_0\,b_0}+3\,\frac{a_1''b_2}{a_0\,b_0}\right.\\
&\left.+\frac{a_0''b_3}{a_0\,b_0}+2\,\frac{a_1'\,b_3}{a_0\,b_0}+\frac{a_0'\,b_4}{a_0\,b_0}+\frac{a_1b_4}{a_0b_0}+\frac{b_5}{b_0}\right)y'\\
&+\left(\frac{a_1^{(5)}}{a_0}+\frac{a_1^{(4)}b_1}{a_0\,b_0}+\frac{a_1'''\,b_2}{a_0\,b_0}+\frac{a_1''b_3}{a_0b_0}+\frac{a_1'\,b_4}{a_0b_0}+\frac{a_1b_5}{a_0b_0}-\frac{1}{a_0\,b_0}\right)y=0,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

при која

$$b_0 = A_0 a_0^5, \tag{3.2}$$

$$b_1 = A_1 a_0^4 + A_0 (10 a_0^4 a_0' + 5 a_0^4 a_1), \tag{3.3}$$

$$b_2 = A_2 a_0^3 + A_1 (6 a_0^3 a_0' + 4 a_0^3 a_1) + A_0 (10\, a_0^4 a_0'' + 25 a_0^3 a_0'^2 + 10 a_0^4 a_1' + 30 a_0^3 a_0' a_1 + 10 a_0^3 a_1^2), \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} b_3 = {} & A_3 a_0^2 + A_2 (3 a_0^2 a_0' + 3 a_0^2 a_1) + A_1 (6 a_0^3 a_1' + 12 a_0^2 a_0' a_1 + 6 a_0^2 a_1^2 \\ & + 4 a_0^3 a_0'' + 7 a_0^2 a_0'^2) + A_0 (5 a_0^4 a_0''' + 30 a_0^3 a_0' a_0'' + 10 a_0^4 a_1'' + 40 a_0^3 a_0' a_1' \\ & + 15 a_0'^3 a_0^2 + 20 a_0^3 a_0'' a_1 + 35 a_0^2 a_0'^2 a_1 + 10 a_0^2 a_1^3 + 30 a_0^3 a_1 a_1' + 30 a_0^2 a_0' a_1^2), \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} b_4 = {} & a_0 A_4 + A_3 (a_0 a_0' + 2 a_0 a_1) + A_2 (a_0^2 a_0'' + a_0 a_0'^2 + 3 a_0^2 a_1' \\ & + 3 a_0 a_0' a_1 + 3 a_0 a_1^2) + A_1 (a_0^3 a_0''' + 4 a_0^2 a_0' a_0'' + a_0 a_0'^3 + 4 a_0^3 a_1'' + 4 a_0^2 a_1 a_0'' \\ & + 10 a_0^2 a_0' a_1' + 4 a_0 a_0'^2 a_1 + 6 a_0 a_0' a_1^2 + 12 a_0^2 a_1 a_1' + 4 a_0 a_1^3) + A_0 (a_0^4 a_0^{(4)} \\ & + 7 a_0^3 a_0' a_0''' + 4 a_0^3 a_0''^2 + 11 a_0^2 a_0'^2 a_0'' + a_0 a_0'^4 + 5 a_0^3 a_1 a_0''' + 15 a_0^3 a_1 a_0'' \\ & + 25 a_0^3 a_0' a_1'' + 5 a_0^4 a_1''' + 20 a_0^2 a_0' a_0'' a_1 + 5 a_0 a_0'^3 a_1 + 25 a_0^2 a_0'^2 a_1' + 20 a_0^3 a_1 a_1'' \\ & + 10 a_0^2 a_1^2 a_0'' + 15 a_0^3 a_1'^2 + 50 a_0^2 a_0' a_1 a_1' + 10 a_0 a_0'^2 a_1^2 + 30 a_0^2 a_1^2 a_1' + 10 a_0 a_0' a_1^3 + 5 a_0 a_1^4), \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} b_5 = {} & A_5 + A_4 a_1 + A_3 (a_0 a_1' + a_1^2) + A_2 (a_0^2 a_1'' + a_0 a_0' a_1' + 3 a_0 a_1' a_1 + a_1^3) \\ & + A_1 (a_0^3 a_1''' + 3 a_0^2 a_0' a_1'' + 4 a_0^2 a_1 a_1'' + a_0^2 a_1' a_0'' + 4 a_0 a_0' a_1 a_1' + a_0 a_0'^2 a_1' \\ & + 6 a_0 a_1^2 a_1' + 3 a_0^2 a_1'^2 + a_1^4) + A_0 (a_0^4 a_1^{(4)} + 6 a_0^3 a_0' a_1^3 + 4\, a_0^3 a_0'' a_1'' + 7 a_0^2 a_0'^2 a_1'' \\ & + a_0^3 a_0''' a_1' + 4 a_0' a_0'' a_0^2 a_1' + a_0 a_0'^3 a_1' + 5 a_0^3 a_1 a_1''' + 10 a_0^3 a_1' a_1'' \\ & + 15 a_0^2 a_0' a_1 a_1'' + 5 a_0^2 a_0'' a_1 a_1' + 5 a_0 a_0'^2 a_1 a_1' + 10 a_0^2 a_0' a_1'^2 + 10 a_0^2 a_1^2 a_1'' \\ & + 15 a_0^2 a_1 a_1'^2 + 10 a_0 a_0' a_1^2 a_1' + 10 a_0 a_1^3 a_1' + a_1^5), \end{aligned} \tag{3.7}$$

каде што A_0 ($\neq 0$), A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 се произволни константи, со смената на функцијата

$$a_0 y' + a_1 y = z, \tag{3.8}$$

се трансформира сама во себе. Таа има партикуларен интеграл

$$y = exp\left(\int \frac{1 - a_1}{a_0}\, dx \right), \tag{3.9}$$

ако меѓу константите A_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ постои релацијата

(3.10) $$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 1.$$

Пример. Диференцијалната равенка

$$y^{(6)} + (6x + A_1)\, y^{(5)} + (15\, x^2 + 5\, A_1\, x + 15 + A_2)\, y^{(4)} + (20\, x^3 + 10\, A_1\, x^2$$

$$+ 60\, x + 4\, A_2\, x + 10\, A_1 + A_3)\, y''' + (15\, x^4 + 10\, A_1\, x^3 + 90\, x^2 + 6\, A_2\, x^2 + 30\, A_1\, x$$

$$+ 3\, A_3\, x + 45 + 6A_2 + A_4)\, y'' + (6x^5 + 5A_1x^4 + 60x^3 + 4A_2x^3 + 30A_1x^2 + 3A_3x^2$$

$$+ 90x + 12\, A_2x + 2\, A_4x + 15\, A_1 + 3\, A_3 + A_5)\, y' + (x^6 + A_1x^5 + 15x^4 + 10\, A_1x^3$$

$$+ A_2x^4 + A_3x^3 + 45x^2 + 6A_2x^2 + A_4x^2 + 15A_1x + 3A_3x + A_5x + 14 + 3A_2 + A_4)\, y = 0,$$

со смената на функцијата

$$y' + xy = z,$$

со трансформира сама во себе. Во случај кога $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 0$, таа има партикуларен интеграл $y = exp\,(x - x^2/2)$ и со смената $y = u exp\,(x - x^2/2)$ се трансформира во равенката

$$v^{(5)} + (6 + A_1)\, v^{(4)} + (5A_1 + A_2 + 15)\, v''' + (10A_1 + 4A_2 + A_3 + 20)\, v'' + (15$$

$$+ 10A_1 + 6A_2 + 3A_3 + A_4)\, v' + (6 + 5A_1 + 4A_2 + 3A_3 + 2A_4 + A_5)\, v = 0 \qquad (u' = v)$$

чиј општ интеграл за $A_1 = -6$, $A_2 = 13$, $A_3 = -12$, $A_4 = 3$, е

$$v = C_1' + C_2'x + C_3'x^2 + C_4'e^{\sqrt{2}\,x} + C_5'e^{-\sqrt{2}\,x}.$$

Во врска со тоа, општиот интеграл на равенката

$$y^{(6)} + (6x - 6)\, y^{(5)} + (15x^2 - 30x + 28)\, y^{(4)} + (20x^3 - 60x^2 + 112x - 72)\, y'''$$

$$+ (15x^4 - 60x^3 + 168x^2 - 216x + 126)\, y'' + (6x^5 - 30x^4 + 112x^3 - 216x^2$$

$$+ 252x - 124)\, y' + (x^6 - 6x^5 + 28x^4 - 72x^3 + 126x^2 - 124x + 56)\, y = 0,$$

ќе биде

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5e^{\sqrt{2}\,x} + C_6e^{-\sqrt{2}\,x})\, exp\,(x - x^2/2).$$

4. Поаѓајќи од системот равенки

$$a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = z,$$

$$b_0\, z^{(4)} + b_1\, z''' + b_2\, z'' + b_3\, z' + b_4\, z = y,$$

каде што $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$ се функции од x и $a_0 b_0 \neq 0$, и применувајќи ја напред наведената постапка, може да се искаже следната

Теорема 4. Диференцијалната равенка

$$
\begin{aligned}
(4.1)\qquad & y^{(6)} + \left(4\frac{a_0'}{a_0} + \frac{a_1}{a_0} + \frac{b_1}{b_0}\right) y^{(5)} + \left(6\frac{a_0''}{a_0} + 4\frac{a_1'}{a_0} + \frac{a_2}{a_0} + 3\frac{a_0' b_1}{a_0 b_0}\right. \\
& \left. + \frac{a_1 b_1}{a_0 b_0} + \frac{b_2}{b_0}\right) y^{(4)} + \left(4\frac{a_0'''}{a_0} + 6\frac{a_1''}{a_0} + 4\frac{a_2'}{a_0} + 3\frac{a_0'' b_1}{a_0 b_0} + 3\frac{a_1' b_1}{a_0 b_0} + \frac{a_2 b_1}{a_0 b_0}\right. \\
& \left. + 2\frac{a_0' b_2}{a_0 b_0} + \frac{a_1 b_2}{a_0 b_0} + \frac{b_3}{b_0}\right) y''' + \left(\frac{a_0^{(4)}}{a_0} + 4\frac{a_1'''}{a_0} + 6\frac{a_2''}{a_0} + \frac{a_0''' b_1}{a_0 b_0} + 3\frac{a_1'' b_1}{a_0 b_0}\right. \\
& \left. + 3\frac{a_2' b_1}{a_0 b_0} + \frac{a_0'' b_2}{a_0 b_0} + 2\frac{a_1' b_2}{a_0 b_0} + \frac{a_2 b_2}{a_0 b_0} + \frac{a_0' b_3}{a_0 b_0} + \frac{a_1 b_3}{a_0 b_0} + \frac{b_4}{b_0}\right) y'' + \left(\frac{a_1^{(4)}}{a_0}\right. \\
& \left. + 4\frac{a_2'''}{a_0} + \frac{a_1''' b_1}{a_0 b_0} + 3\frac{a_2'' b_1}{a_0 b_0} + \frac{a_1'' b_2}{a_0 b_0} + 2\frac{a_2' b_2}{a_0 b_0} + \frac{a_1' b_3}{a_0 b_0} + \frac{a_2 b_3}{a_0 b_0} + \frac{a_1 b_4}{a_0 b_0}\right) y' \\
& + \left(\frac{a_2^{(4)}}{a_0} + \frac{a_2''' b_1}{a_0 b_0} + \frac{a_2'' b_2}{a_0 b_0} + \frac{a_2' b_3}{a_0 b_0} + \frac{a_2 b_4}{a_0 b_0} - \frac{1}{a_0 b_0}\right) y = 0,
\end{aligned}
$$

со смената на функцијата

$$(4.2)\qquad a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = z,$$

се трансформира сама во себе ако

$$(4.3)\qquad b_0 = A_0 a_0^2,$$

$$(4.4)\qquad b_1 = A_1 a_0^{3/2} + A_0 (2a_0 a_0' + 2a_0 a_1),$$

$$(4.5)\qquad b_2 = A_2 a_0 + A_1 \left(\frac{3}{4} a_0' a_0^{1/2} + \frac{3}{2} a_1 a_0^{1/2}\right) + A_0 (a_0'' a_0 + 2a_1' a_0 + 2a_2 a_0 + a_1^2 + a_0' a_1),$$

$$
\begin{aligned}
(4.6)\qquad b_3 = {} & A_3 a_0^{1/2} + A_2 a_1 + A_1 \left(\frac{a_0'' a_0^{1/2}}{8} + \frac{3a_1' a_0^{1/2}}{4} + 3\frac{a_2 a_0^{1/2}}{2} + 3\frac{a_1^2 a_0^{-1/2}}{8}\right. \\
& \left. - 3\frac{a_0'^2 a_0^{-1/2}}{32}\right) + A_0 \left(2a_0 a_2' + a_1 a_1' + 2a_1 a_2 + a_1'' a_0\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4.7)\qquad b_4 = {} & A_4 + A_3 \left(\frac{a_1}{a_0^{1/2}} - \frac{a_0'}{2a_0^{1/2}}\right) + A_2 a_2 + A_1 \left(\frac{a_0^{1/2} a_1''}{8} - \frac{a_0' a_1'}{16 a_0^{1/2}}\right. \\
& + 3\frac{a_1 a_2}{4a_0^{1/2}} - \frac{3a_1^3}{16 a_0^{3/2}} - \frac{a_0'' a_1}{16 a_0^{1/2}} + 3\frac{a_0^{1/2} a_2'}{4} + \frac{a_0'^2 a_1}{64 a_0^{3/2}} + 3\frac{a_1^2 a_0'}{32 a_0^{3/2}} \\
& \left. + 3\frac{a_0' a_0''}{32 a_0^{1/2}} - \frac{3a_0'^3}{128 a_0^{3/2}}\right) + A_0 \left(a_0 a_2'' + a_1 a_2' + a_2^2\right),
\end{aligned}
$$

каде што $A_0(\neq 0)$, A_1, A_2, A_3 и A_4 се произволни константи и ако се исполнети равенките

$$(4.8)\quad \frac{a_1^{(4)}}{a_0}+4\frac{a_2'''}{a_0}+\frac{a_1'''b_1}{a_0 b_0}+3\frac{a_2''b_1}{a_0 b_0}+\frac{a_1''b_2}{a_0 b_0}+2\frac{a_2'b_2}{a_0 b_0}+\frac{a_1'b_3}{a_0 b_0}=\frac{b_3''}{b_0}+2\frac{b_4'}{b_0}+\frac{a_1 b_3'}{a_0 b_0},$$

$$(4.9)\quad \frac{a_2^{(4)}}{a_0}+\frac{a_2'''b_1}{a_0 b_0}+\frac{a_2''b_2}{a_0 b_0}+\frac{a_2'b_3}{a_0 b_0}=\frac{b_4''}{b_0}+\frac{a_1 b_4'}{a_0 b_0}.$$

Ако ставиме $A_1 = A_3 = 0$, тогаш можеме да речеме дека диференцијалната равенка (4.1), со смената на функцијата (4.2), се трансформира сама во себе, ако

$$(4.10)\quad b_0 = A_0 a_0^2,$$

$$(4.11)\quad b_1 = A_0(2a_0 a_0' + 2a_0 a_1),$$

$$(4.12)\quad b_2 = A_2 a_0 + A_0(a_0'' a_0 + 2a_1' a_0 + 2a_2 a_0 + a_1^2 + a_0' a_1),$$

$$(4.13)\quad b_3 = A_2 a_1 + A_0(2a_0 a_2' + a_1 a_1' + 2a_1 a_2 + a_1'' a_0),$$

$$(4.14)\quad b_4 = A_4 + A_2 a_2 + A_0(a_0 a_2'' + a_1 a_2' + a_2^2).$$

Во овој случај таа има партикуларни интеграли, дефинирани со равенката

$$(4.15)\quad a_0 y'' + a_1 y' + (a_2 - 1)y = 0,$$

ако меѓу константите A_0, A_2, A_4 постои релацијата

$$(4.16)\quad A_0 + A_2 + A_4 = 1.$$

Пример: Диференцијалната равенка

$$(x^2+1)^3 y^{(6)} - (x^2+1)^2 y^{(4)} + 4x(x^2+1)y''' - (35x^2+27)y'' + 116x y' - 162y = 0,$$

со смената на функцијата

$$(x^2+1)y'' - 4xy' + 7y = z,$$

се трансформира сама во себе. Таа има партикуларни интеграли y_1 и y_2 дефинирани со равенката

$$(x^2+1)y'' - 4xy' + 6y = 0$$

т. е.

$$y_1 = 3x^2 - 1, \quad y_2 = x^3 - 3x.$$

5. Ако, пак, сега ја примениме наведената постапка на системот

$$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = z,$$

$$b_0 z''' + b_1 z'' + b_2 z' + b_3 z = y,$$

каде што $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3$ се диференцијабилни функции од x, а $a_0 b_0 \neq 0$, може да се искаже следната

Теорема 5. Диференцијалната равенка

$$
\begin{aligned}
(5.1)\quad & y^{(6)} + \left(3\frac{a_0'}{a_0} + 2\frac{a_1}{a_0}\right) y^{(5)} + \left(3\frac{a_0''}{a_0} + 3\frac{a_1'}{a_0} + 2\frac{a_2}{a_0} + 2\frac{a_0' a_1}{a_0^2} + \frac{a_1^2}{a_0^2}\right) y^{(4)} \\
& + \left(\frac{a_0'''}{a_0} + 3\frac{a_1''}{a_0} + 3\frac{a_0'}{a_0} + \frac{a_3}{a_0} + \frac{a_0'' a_1}{a_0^2} + 2\frac{a_1 a_1'}{a_0^2} + 2\frac{a_1 a_2}{a_0^2} + \frac{a_0' a_2}{a_0^2} + \frac{a_3 - 1}{a_0}\right. \\
& \left. + \frac{1}{A_0 a_0}\right) y''' + \left(\frac{a_1'''}{a_0} + 3\frac{a_2''}{a_0} + 3\frac{a_3'}{a_0} + \frac{a_1 a_1''}{a_0^2} + 2\frac{a_1 a_2'}{a_0^2} + 2\frac{a_1 a_3}{a_0^2} + \frac{a_1' a_2}{a_0^2}\right. \\
& \left. + \frac{a_2^2}{a_0^2} - \frac{a_1}{a_0^2} + \frac{a_1}{A_0 a_0^2}\right) y'' + \left(\frac{a_2'''}{a_0} + 3\frac{a_3''}{a_0} + \frac{a_1 a_2''}{a_0^2} + 2\frac{a_1 a_3'}{a_0^2} + \frac{a_2 a_2'}{a_0^2} + 2\frac{a_2 a_3}{a_0^2}\right. \\
& \left. + \frac{a_2}{A_0 a_0^2} - \frac{a_2}{a_0^2}\right) y' + \left(\frac{a_3'''}{a_0} + \frac{a_1 a_3''}{a_0^2} + \frac{a_2 a_3'}{a_0^2} + \frac{a_3^2}{a_0^2} - \frac{a_3}{a_0^2} + \frac{a_3}{A_0 a_0^2} - \frac{1}{A_0 a_0^2}\right) y = 0,
\end{aligned}
$$

со смената на функцијата

$$(5.2)\qquad a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = z,$$

се трансформира сама во себе. Таа има партикуларни интеграли дефинирани со равенката

$$(5.3)\qquad a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + (a_3 - 1) y = 0.$$

Пример. Диференцијалната равенка

$$
\begin{aligned}
(x^3+1)^2 y^{(6)} + 3x^2 (x^3+1) y^{(5)} + 3x (x^3+4) y^{(4)} - 4 (x^3+1) y''' \\
+ 12x^2 y'' - 24x y' + 24 y = 0,
\end{aligned}
$$

со смената на функцијата

$$(x^3+1) y''' - 3x^2 y'' + 6x y' - 5 y = z,$$

се трансформира сама во себе. Таа има партикуларни интеграли дефинирани со равенката

$$(x^3+1) y''' - 3x^2 y'' + 6x y' - 6 y = 0$$

т. е.

$$y_1 = x,\ y_2 = x^2,\ y_3 = x^3 + 1.$$

Во врска со овој труд може да се видат трудовите на Appell [1], Mitrinović [2] i Šapkarev [3], [4].

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Appell, Sur des équations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes par un changement de fonction et de variable, Acta Math. 15 (1891) 281—315.

[2] D. S. Mitrinović, Sur une équation différentielle linéaire du second ordre transformable en elle-même, C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949) 1188—1190.

[3] I. A. Šapkarev, Sur des équations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes par un changement de fonction, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Zagreb, (1964) broj 3—4, 211—216.

[4] И. А. Шапкарев, Линеарни диференцијални равенки од трети и четврти ред кои се трансформираат сами во себе со смена на функцијата, Годишен зборник на Електро-машинскиот факултет — Скопје (1967) книга 1, стр. 5—31.

Ilija A. Šapkarev

SUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DES ORDRES 5 ET 6 TRANSFORMABLES EN ELLES-MÊMES PAR UN CHANGEMENT DE FONCTION

Résumé

Dans cet article on démontre que l'équation différentielle (1. 2), par le changement de fonction (1.4), se transforme en elle-même, si les fonctions b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 sont définies respectivement par (1.6), (1.7), (1.8), (1.9) et (1.10).

Dans ce cas, elle a une solution particulière déterminée par (1.12), si parmi les constantes $A_0(\neq 0)$, A_1, A_2, A_3 et A_4 existe la relation $\sum_{i=0}^{4} A_i = 1$.

Aussi on donne, sans prouver, que l'équation différentielle (2.1), par le changement de fonction (2.6), se transforme en elle-même, si les fonctions b_0, b_1, b_2, b_3 déterminées respectivement par (2.2), (2.3), (2.4) et (2.5) satisfont à la relation (2.7).

Puis on cite que l'équation différentielle (3.1), par le changement de fonction (3. 8), se transforme en elle-même, si les fonctions b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 sont déterminées respectivement par (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) et (3.7). Elle a une solution particulière définie par (3.9), si parmi les constantes A_i ($i=0$, 1, 2, 3, 4, 5) existe la relation (3.10).

Sans prouver on donne que l'équation différentielle (4.1), par le changement de fonction (4.2), se transforme en elle-même, si les fonctions b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, déterminées respectivement par (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), (4.7), satisfont aux relations (4.8) et (4.9).

Si $A_1=A_3=0$ alors l'équation différentielle (4.1), par le changement de fonction (4.2), se transforme en elle-même, si les fonctions b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 sont determinées respectivement par (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14). Dans ce cas elle a des intégrales particulières définies par (4.15), où les constantes A_0, A_2, A_4 satisfont à la relation (4.16).

Enfin on cite que l'équation différentielle (5.1), par le changement de fonction (5.2) se transforme en elle-même. Elle a des intégrales particulières définies par (5.3).