МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
6 (21), 1969, стр. 335—338

Ilija A. Šapkarev

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE RÉSOLUBLES PAR QUADRATURES

(Communiqué le 9 Mai 1969)

1. On considère dans cet article l'équation différentielle

$$y'' + [\alpha f(x) + \beta] y' + [A f^2(x) + B f(x) + C] y = 0, \tag{1}$$

où $f(x)$ est une fonction arbitraire, continue et différentiable dans un intervalle déterminé, et α, β, A, B, C sont des paramètres arbitraires.

D. S. Mitrinović [1] a donné certaines criteriums d'intégrabilité de l'équation (1) par quadratures dans les cas où $f(x) = x$ et $f(x) = \exp(bx)$ ($b = \text{const}$). Ces criteriums sont, en réalité, les conditions pour que l'équation (1), dans ces cas soit réductible, c'est-à-dire qu'elle peut être réduite à un système de deux équations linéaires différentielles du première ordre.

B. S. Popov [2] a démontré, avec un procédé analogue à celui de D. S. Mitrinović, que l'équation différentielle (1), peut être intégrée par quadratures, c'est-à-dire, peut être réduite à un système intégrable de deux équations différentielles du première ordre, dans les cas suivants:

1° $f'(x) = 1$; 2° $f'(x) = f^2(x)$; 3° $f'(x) = f(x)$; 4° $f'(x) = f^2(x) + 1$.

Dans ces cas il a obtenu les résultats suivants:

1° La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$y'' + (\alpha x + \beta) y' + (A x^2 + B x + C) y = 0 \tag{2}$$

soit réductible est que parmis les constantes α, β, A, B, C il existe la relation

$$(\alpha\beta - 2B)^2 + (\alpha^2 - 4A)(4C - 2\alpha - \beta^2) = \pm 2(2n+1)(\alpha^2 - 4A)^{3/2}, \tag{3}$$

où n est un nombre naturel.

2° La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$x^2 y'' + (\beta x - \alpha) x y' + (C x^2 - B x + A) y = 0 \tag{4}$$

soit réductible est que les constantes α, β, A, B, C soient liées par la relation

$$2B - \alpha\beta = \mp \sqrt{\beta^2 - 4C}\,[2n + 1 \pm \sqrt{(\alpha+1)^2 - 4A}, \tag{5}$$

où n est un nombre naturel.

3° La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

(6) $$y'' + (\alpha e^x + \beta) y' + (Ae^{2x} + Be^x + C) y = 0$$

soit réductible est que parmis les paramètres α, β, A, B, C on ait la relation

(7) $$\alpha\beta - 2B + \alpha = \mp (\alpha^2 - 4A)^{1/2}[2n + 1 - (\beta^2 - 4C)^{1/2}],$$

où n est un nombre naturel.

4° La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

(8) $$y'' + (\alpha \operatorname{tg} x + \beta) y' + (A \operatorname{tg}^2 x + B \operatorname{tg} x + C) y = 0$$

soit réductible est que parmis les paramètres α, β, A, B, C on ait la relation

(9) $$4C - \beta^2 + \frac{(\alpha\beta - 2B)^2}{(2n + 1 \pm \sqrt{(\alpha+1)^2 - 4A})^2}\left[1 + \frac{4n(n-1)}{1 \pm \sqrt{(\alpha+1)^2 - 4A}}\right]$$
$$= 2[(\alpha + 1) \pm \sqrt{(\alpha+1)^2 - 4A}] - 4[2 \pm \sqrt{(\alpha+1)^2 - 4A}](2a_2 - n),$$

où n est un nombre naturel, et a_2 peut s'énoncer avec α, β, A, B, C et n.

Remarquons encore que les criteriums obtenus par D. S. Mitrinović peuvent être obtenus de ceux par B. S. Popov pour $n = 0$ et $n = 1$.

2. Dans cet article, nous allons démontrer que l'équation différentielle (1), peut être résoulue par quadratures, si les paramètres α, β, A, B, C sont liées par la relation

(10) $$\{[\beta + (2n+1)b]r + B + [(n+1)a + \alpha]nb\}^2 - \beta(2r + \alpha)\{[\beta + (2n+1)b]r$$
$$+ B + [(n+1)a + \alpha]bn\} + (2r + \alpha)^2[c(2n+1)r + cn(an + a + \alpha) + C] = 0,$$

pour $4A \neq (\alpha - 2an)[\alpha + 2(n+1)a]$, où

(11) $$r = \frac{-\alpha - (2n+1)a \pm \sqrt{(\alpha + a)^2 - 4A}}{2},$$

n est un nombre naturel ou zéro, et la fonction $f(x)$ est déterminée par la relation

(12) $$f'(x) = af^2(x) + bf(x) + c,$$

avec a, b, c des constantes arbitraires, ou par les relations

(13) $$4A = (\alpha - 2na)[\alpha + 2(n+1)a], \quad B = -\beta + (2n+1)\frac{\alpha b}{2} - an[(n+1)a + \alpha].$$

Puis, nous démontrons que tous les criteriums (3), (5), (7), (9), pour l'intégrabilité des équations (2), (4), (6) et (8), peuvent être obtenus de la relation (10), si les constantes a, b, c sont convenablement choisies.

3. L'équation (1), par le changement

$$y = z \exp\left(\int (rf+s)\,dx\right),$$

où r et s sont des constantes, se transforme en équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} + [(2r+\alpha)f + 2s+\beta]\frac{dz}{dx} + [(r^2+\alpha r + A)f^2 + (2rs+\alpha r+\beta r + B)f$$
$$+ (s^2+\beta s + C) + rf']\,z = 0.$$

Cette équation, par le changement $f(x) = t$, où $f(x)$ satisfait à la relation (12), devient

$$(at^2+bt+c)^2\frac{d^2z}{dt^2} + [(2a+2r+\alpha)t + 2s+\beta+b]\,(at^2+bt+c)\frac{dz}{dt}$$
$$+ [(r^2+\alpha r + A + ra)t^2 + (2rs+\alpha s + \beta r + br + B)t + (s^2+\beta s + rc + C)]\,z = 0.$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} &r^2+\alpha r + A + ra = ka,\\ (14)\qquad &2rs+\alpha s+\beta r + B + rb = kb,\\ &s^2+\beta s + C + rc = kc, \end{aligned}$$

où k est une constante arbitraire, la dernière équation devient

$$(at^2+bt+c)\frac{d^2z}{dt^2} + [(2a+2r+\alpha)t + b + 2s + \beta]\frac{dz}{dt} + kz = 0.$$

En différenciant cette équation n-fois, on obtient l'équation

$$(at^2+bt+c)\frac{d^{n+2}z}{dt^{n+2}} + \{[2a(n+1)+2r+\alpha]\,t + b(n+1) + 2s+\beta\}\frac{d^{n+1}z}{dt^{n+1}}$$
$$+ [k + an(n-1) + (2a+2r+\alpha)n]\,z = 0.$$

La dernière équation et aussi avec elle, l'équation (1), peut être réduite aux quadratures, si l'on a

$$k + an(n-1) + 2a + 2r + \alpha = 0.$$

Les relations (14), d'après la dernière relation, deviennent

$$\begin{aligned} &r^2 + [\alpha + a(2n+1)]\,r + A + an\,[a(n+1)+\alpha] = 0,\\ (15)\qquad &(2r+\alpha)\,s + [\beta + b(2n+1)]\,r + B + [a(n+1)+\alpha]\,bn = 0,\\ &s^2+\beta s + c(2n+1)\,r + C + cn\,(an+a+\alpha) = 0. \end{aligned}$$

De la première équation de (15), il suit (11), et par élimination de s, de deux dernières équations de (15), pour $r \neq -\alpha/2$, on obtient la relation (10). Si $r = -\alpha/2$, de deux premières équations de (15), on obtient les relations (13).

3.1. Pour $a=b=0$, $c=1$, il suit $f'=1$ c'est-à-dire $f=x$. Dans ce cas l'équation (1) devient (2), et la relation (10) devient (3).

3.2. Pour $a=1$, $b=c=0$ il suit $f'=f^2$, c'est-à-dire $f=-1/x$. Dans ce cas l'équation (1) devient (4), et la relation (10) devient (5).

3.3. Pour $a=c=0$, $b=1$ il suit $f'=f$, c'est-à-dire $f=\exp(x)$. Dans ce cas, l'équation (1) devient (6), et la relation (10) devient (7).

3.4. Pour $a=c=1$, $b=0$ on obtient $f'=f^2+1$, d'où il suit $f=\operatorname{tg} x$. Dans ce cas, l'équation (1) devient (8), et la relation (10) devient

$$(2B-\alpha\beta)^2+(2n+1\mp\sqrt{(\alpha+1)^2-4A})^2[4C-\beta^2-2\alpha+4n(n+1)$$
$$-2(2n+1)(2n+1\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4A})]=0.$$

Enfin remarquons que B. S. Popov a démontré que l'équation différentielle

$$y''+(\operatorname{tg} x)\,y'-\left(\frac{5}{4}\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{2}\right)y=0$$

est réductible au système suivant

a) $$y'-\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} x\right)y=z,$$

$$z'+\left(\frac{3}{2}\operatorname{tg} x\right)z=0.$$

$$(\operatorname{tg} x\pm i)\,y'-\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x\pm i\operatorname{tg} x)\,y=z,$$

b) $$z'+\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} x\pm i\right)z=0.$$

Cependant, cette équation est réductible aussi dans les cas où $n=2$, c'est-à-dire au système suivant

c) $$(\operatorname{tg}^2 x+1)\,y'-\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x)\,y=z,$$

$$z'-\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} x\right)z=0.$$

d) $$(\operatorname{tg}^2 x\pm 2i\operatorname{tg} x-1)\,y'+\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^3 x\mp i\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{2}\operatorname{tg} x\right)y=z,$$

$$z'+\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tg} x\pm 2i\right)z=0.$$

RÉFÉRENCES

[1] D. S. Mitrinović, *Procédé de formation critères d'intégrabilité des équations différentielles linéaires à coefficients ayant des formes données à l'avance,* Faculté de philosophie de l'Université de Skopje, section des sciences naturelles (1949) 2. tome.

[2] B. S. Popov, *Formation des critériums de réductibilité des équations différentielles linéaires ayant des formes données à l'avance,* Faculté de philosophie de l'Université de Skopje, section des sciences naturelles (1952) 5. tome.