ЗА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ЧИИ ИНТЕГРАЛИ СЕ ВТОРИ И ТРЕТИ СТЕПЕНИ ОД ИНТЕГРАЛИТЕ НА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ТРЕТ И ЧЕТВРТ РЕД

Илија А. Шапкарев

Во познатата книга од Камке [1] се наоѓаат линеарни диференцијални равенки од трет и четврт ред, чии интеграли се втори односно трети степени од интегралите на диференцијалната равенка

$$z'' = h(x)\, z. \tag{1}$$

Митриновиќ и Ѓоковиќ [2] имаат добиено, применувајќи една погодна постапка, дифиренцијална равенка од петти ред, со особина нејзините интеграли да бидат четврти степени од интегралите на равенката (1).

Илија А. Шапкарев [3] има дадено постапка за добивање линеарна диференцијална равенка од $(k+1)$-ви ред, со особина k-тите степени од интегралите на равенката (1) да бидат нејзини интеграли.

Во овој труд ние добиваме линеарни диференцијални равенки, со особина квадрати односно кубови од интегралите на диференцијалната равенка

$$z''' = f(x)\, z' + g(x)\, z \tag{2}$$

да бидат нивни интеграли.

Исто така добиваме и линеарни диференцијални равенки, чии интеграли се квадрати од интегралите на диференциалната равенка

$$z^{(4)} = f(x) z'' + g(x)\, z' + h(x)\, z. \tag{3}$$

1. Ако ставиме

$$A_0 = y,$$

$$A_1 = y',$$

$$A_2 = y'',$$

$$A_3 = y''' - fy' - 2\, gy,$$

$$A_4 = y^{(4)} - 4fy'' - (f' + 5\, g)\, y' - 2g'\, y,$$

$$A_5 = y^{(5)} - 5fy''' - 5(f' + g)y'' - (f'' + 7g' - 4f^2)y'$$
$$- 2(g'' - 4fg)y,$$
$$A_6 = y^{(6)} - 5fy^{(4)} - (9f' + 7g)y''' - 2(3f'' + 6g' - 2f^2)y''$$
$$- (f''' + 9g'' - 10ff' - 4fg)y' - 2(g''' - 6f'g - 4fg' - 4g^2)y,$$

ке покажаме дека равенките $A_5 = 0$ за $f' = 2g$ и $(f' - 2g)A_6 - (f' - 2g)' A_5 = 0$ за $f' \neq 2g$ т.е. равенките

$$\text{(1.1)} \qquad y^{(5)} - 5fy''' - 5(f' + g)y'' - (f'' + 7g' - 4f^2)y'$$
$$- 2(g'' - 4fg)y = 0 \qquad (f' = 2g),$$

$$\text{(1.2)} \qquad (f' - 2g)y^{(6)} - (f' - 2g)' y^{(5)} - 5f(f' - 2g)y^{(4)} - [(9f' + 7g)(f' - 2g)$$
$$- 5f(f' - 2g)']y''' - [(6f'' + 12g' - 4f^2)(f' - 2g)$$
$$- 5(f' + g)(f' - 2g)']y'' - [(f''' + 9g'' - 10ff' - 4fg)(f' - 2g)$$
$$- (f'' + 7g' - 4f^2)(f' - 2g)']y' - [(2g''' - 12f'g$$
$$- 8fg' + 8g^2)(f' - 2g) - (2g'' - 8fg)(f' - 2g)']y = 0 \qquad (f' \neq 2g)$$

имаат интеграли кои се квадрати од интегралите на диференцијалната равенка (2).

За да го покажеме тоа нека ставиме $y = z^2$, каде што z е било кое решение на равенката (2). Со диференцирање добиваме

$$A_0 = z^2,$$
$$A_1 = 2zz',$$
$$A_2 = 2z'^2 + 2zz'',$$
$$A_3 = 6z'z'',$$
$$A_4 = 6z''^2 - 6fzz'',$$
$$A_5 = 6(2g - f')zz'',$$
$$A_6 = 6(2g - f')' zz''.$$

Ако е $f' = 2g$ следува дека $A_5 = 0$, т.е. се добива равенката (1.1). За $f' \neq 2g$, со елиминација на zz'' од последните две равенки се добива точно равенката (1.2).

Од начинот на кој ја добивме и равенката (1.1) и равенката (1.2) јасно е дека и двете имаат интеграли кои се квадрати од интегралите на равенката (2).

2. Ако пак сега ставиме

$$A_0 = y,$$
$$A_1 = y',$$
$$A_2 = y'',$$

$$A_3 = y''' - fy' - 3gy,$$

$$A_4 = y^{(4)} - fy'' - (f' + 9g)y' - 3g'y,$$

$$A_5 = y^{(5)} - fy''' - (2f' + 21g)y'' - (f'' + 12g' - 4f^2)y' - 3(g'' - 4fg)y,$$

$$A_6 = y^{(6)} - 5fy^{(4)} - 9(h + 5g)y''' - (3f'' + 33g' - 4f^2)y'' - (f''' + 15g'' - 8ff' - 22fg - 2fh)y' - (3g''' - 12f'g - 12fg' - 6gh - 30g^2)y \qquad (h = f' - 2g),$$

$$A_7 = y^{(7)} - 14fy^{(5)} - (14h + 70g)y^{(4)} - (14h' + 84g' - 49f^2)y''' - (4h'' + 56g'' - 36fh - 294fg)y'' - (h''' + 20g''' - 10f'h - 65f'g - 21fh' - 176fg' - 6gh - 165g^2 + 36f^3)y' - (3g^{(4)} - 24h'g - 30hg' - 39fg'' - 177gg' + 108f^2g)y,$$

$$A_8 = 15hA_7' - 20h'A_7 - 126h^2A_5 - 15h(2h'' - 18fh)A_3 \qquad (h \neq 0),$$

$$A_9 = 420hAA_8' - (420hA' - 140h'A + 21hB)A_8 - 400A^2A_7 - 840hABA_3 \qquad (h \neq 0,\ A \neq 0),$$

$$A = 6hh'' - 7h'^2 + 9fh^2,\ B = 15hh''' - 20h'h'' - 261h^3 + 45fhh' + 45h^2g,$$

$$A_9 = BA_8' - B'A_8 - 2B^2A_3 \qquad (h \neq 0,\ A = 0,\ B \neq 0),$$

$$A_{10} = 20ACA_9' - (20AC' - BC)A_9 - C^2A_8 - 40AC^2A_3 \ (h \neq 0, A \neq 0, C \neq 0),$$

$$C = 420hAB' - 400A^2h'' + 3600A^2fh - 420hA'B + 140h'AB - 21hB^2,$$

$$A_{10} = 21hBA_9' - (42hB' - 7h'B)A_9 + (B^2h'' - 9fhB^2)A_8 - B^3A_7 \qquad (h \neq 0,\ A \neq 0,\ B \neq 0),$$

ќе покажеме дека интегралите на равенките $A_7 = 0$ $(h = 0)$; $A_9 = 0$ $(h \neq 0, A \neq 0)$, $A_{10} = 0$ $(h \neq 0,\ A \neq 0,\ C \neq 0)$, $A_{10} = 0$ $(h \neq 0,\ A = 0,\ B \neq 0)$, т.е. на равенките

$$y^{(7)} - 14fy^{(5)} - (14h + 70g)y^{(4)} - (14h' + 84g' - 49f^2)y''' - (4h'' + 56g'' - 36fh - 294g)y'' - (h''' + 20g''' - 10f'h - 65f'g - 21fh' - 176fg' - 6gh - 165g^2 + 36f_3)y' - (3g^{(4)} - 24h'g - 30g'h - 39fg'' - 177gg' + 108f^2g)y = 0 \qquad (h = 0), \tag{2.1}$$

(2.2) $420\, hAA_8' - (420\, hA' - 140\, h'A + 21\, hB)\, A_8 - 400\, A^2 A_7$

$$- 840\, ABhA_3 = 0 \qquad (h \neq 0,\ A \neq 0),$$

(2.3) $20\, ACA_9' - (20\, AC' - BC)\, A_9 - C^2 A_8 - 40\, AC^2 A_3 = 0$

$$(h \neq 0,\ A \neq 0,\ C \neq 0),$$

(2.4) $21\, hBA_9' - (42\, hB' - 7\, Bh')\, A_9 + (h'' B^2 - 9\, B^2 fh)\, A_8 - B^3 A_7 = 0$

$$(h \neq 0,\ A = 0,\ B \neq 0)$$

се кубови од интегралите на равенката (2).

За таа цел нека земеме едно кое и да е решение z од равенката (2) и нека ставиме $y = z^3$. Со диференцирање добиваме

$$A_0 = z^3,$$

$$A_1 = 3\, z^2 z',$$

$$A_2 = 6\, zz'^2 + 3\, zz^2 z'',$$

$$A_3 = 6\, z'^3 + 18\, zz'z'',$$

$$A_4 = 36\, z'^2 z'' + 18\, zz''^2 + 18\, fzz'^2,$$

$$A_5 = 90\, z' z''^2 + 30\, fz'^3 + 18\, hzz'^2 \qquad (h = f' - 2g),$$

$$A_6 = 90\, z''^3 + 270\, fz'^2 z'' + 36\, hz'^3 + 18\, h' zz'^2,$$

$$A_7 = 42\, h' z'^3 + (18\, h'' - 162\, fh)\, zz'^2 + 378\, hz'^2 z'',$$

$$A_8 = 120\, Az'^3 + 18\, Bzz'^2 \qquad (h \neq 0),$$

$$A_9 = 18\, Czz'^2 \qquad (h \neq 0,\ A \neq 0),$$

$$A_9 = 6\, B^2 z'^3 \qquad (h \neq 0,\ A = 0,\ B \neq 0),$$

$$A_{10} = 0 \qquad (h \neq 0,\ A \neq 0,\ C \neq 0),$$

$$A_{10} = 0 \qquad (h \neq 0,\ A = 0,\ B \neq 0).$$

Ако е $h = 0$ следува дека $A_7 = 0$, т.е. се добива равенката (2.1). За да јбиде $A_8 = 0$ треба истовремено да биде $A = 0$ и $B = 0$, т.е. треба да бидат исполнети релациите

$$6\, hh'' - 7\, h'^2 + 9\, fh^2 = 0,$$

$$15\, hh''' - 20\, h' h'' - 261\, h^3 + 45\, fhh' + 45\, h^2 g = 0.$$

Ако првата од овие релации ја диференцираме во однос на x, а потоа а помножиме со 5, ја добиваме релацијата

$$30\, hh''' - 40\, h' h'' + 45\, f' h^2 + 90\, fhh' = 0.$$

Втората релација, помножена со 2 и одземена од последната, дава $h = 0$. Бидејки пак по претпоставка е $h \neq 0$, следува дека A_8 не може да биде нула, т.е. интегралите на линеарна диференцијална равенка од осми ред не може да бидат трети степени од интегралите на равенката (2).

За $h \neq 0$, $A \neq 0$, $C = 0$ се добива равенката $A_9 = 0$ т.е. равенката (2.2).

За $h \neq 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ следува дека $A_{10} = 0$ т.е. се добива равенката (2.3).

Најпосле, за $h \neq 0$, $A = 0$, $B \neq 0$ се добива равенката $A_{10} = 0$ т.е. равенката (2.4).

Од начинот на кој се добиени сите овие равенки (2.1), (2.2), (2.3) и (2.4) е јасно дека нивните интеграли се трети степени од интегралите на раоенката (2).

3. Нека ставиме

$$A_0 = y,$$

$$A_1 = y',$$

$$A_2 = y'',$$

$$A_3 = y''',$$

$$A_4 = y^{(4)} - fy'' - gy' - 2hy,$$

$$A_5 = y^{(5)} - fy''' - (f' + g)y'' - (g' + 6h)y' - 2h'y,$$

$$A_6 = y^{(6)} - 5fy^{(4)} - (2f' + 7g)y''' - 6(g' + h)y''$$
$$- (g'' - 4fg + 8h')y' - 2(h'' - 4fh)y,$$

$$A_7 = 5y^{(7)} - 28fy^{(5)} - 35(f' + g)y^{(4)} + (23f^2 - 15f'' - 15g' - 180h)y'''$$
$$+ 35(3fg - g'' - 2h')y'' + (20f'g + 23fg' - 5g''' - 50h''$$
$$+ 128fh + 30g^2)y' + (40f'h + 46fh' - 10h''' + 60gh)y,$$

$$A_8 = 105\alpha A_7' - (105\alpha' + \beta)A_7 - 735\alpha^2 A_5 + 70\alpha\beta A_4 - 105\alpha\gamma y'''$$
$$+ 35\alpha(21\alpha f' - 126\alpha g - 2\beta f)y'' - 105\alpha(70\alpha h + \gamma')y' \quad (\alpha \neq 0),$$
$$\alpha = f' - g, \ \beta = 5f'' - 65g' + 200h + 18f^2,$$
$$\gamma = 5f''' - 20g'' + 50h' - 43ff' + 52fg,$$

$$A_8 = 24\beta A_7' - 30\beta' A_7 + 16\beta^2 A_4 - 6\beta\beta' y''' + 16f\beta^2 y'' \quad (\alpha = 0, \ \beta \neq 0),$$

$$A_9 = 105\alpha PA_8' - (105\alpha P' + Q^2\gamma - 210\alpha fQ)A_8 + PQA_7$$
$$- 70\alpha PQA_4 - 105\alpha P^2 y''' - 6\alpha fPQy'' \qquad (\alpha \neq 0, \ P \neq 0),$$
$$P = 70\alpha\beta f - 735\alpha^2 f' - 4410\alpha^2 g - 105\alpha'\gamma - \beta\gamma,$$
$$Q = 105\alpha'\beta - 105\alpha\beta' + \beta^2 + 2940\alpha^2 f - 105\alpha\gamma,$$

$$A_9 = 105\alpha QA_8' - (105\alpha Q' - \beta Q)A_8 + Q^2 A_7 - 70\alpha Q^2 A_4$$
$$- 70\alpha f Q^2 y'' \ (\alpha \neq 0, \ P = 0, \ Q \neq 0),$$

$$A_9 = 20\beta A_8' - 20\beta' A_8 - (10S - 128\beta f)A_7 - 32\beta^2 A_5 - 10\beta S y''' - 224\beta^2 f' y'' - 320\beta^2 h y'$$

$$(\alpha = 0,\ \beta \neq 0),\quad S = 12\beta\beta'' - 15\beta'^2 + 32 f\beta^2,$$

$$A_{10} = 105\alpha PRA_9' + (70\alpha f R^2 - \gamma R^2)A_8 + PR^2 A_7 - 70\alpha PR^2 A_4 - 70\alpha f PR^2 y'' - (105\alpha PR' - \beta PR - \gamma QR + 70\alpha f QR)A_9$$

$$(\alpha \neq 0,\ P \neq 0,\ R \neq 0),$$

$$R = 105\alpha PQ' - 105P^2 - \beta PQ - 105\alpha P'Q - \gamma Q^2 + 840\alpha f Q^2,$$

$$A_{10} = (\gamma - 7\alpha f)Q^2 A_9' - (\gamma Q^2 - 7\alpha f Q^2)' A_9 - Q^3(\gamma - 7\alpha f)^2 A_8 - Q^4(\gamma - 7\alpha f)^2 y''', \qquad (\alpha \neq 0,\ P = 0,\ Q \neq 0,\ \gamma - 7\alpha f \neq 0),$$

$$A_{10} = 4\beta A_9' - (4\beta T' - \beta' T)A_9 - 2T^2 A_7 - 2\beta T^2 y' \quad (\alpha = 0,\ \beta \neq 0, T \neq 0),$$

$$T = 20\beta S' - 25\beta' S - 448 f'\beta^2 + 64\beta\beta' f.$$

Ке покажеме дека равенките $A_7 = 0$ $(\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0)$, $A_8 = 0\,(\alpha \neq 0,\ P = 0,\ Q = 0)$, $A_9 = 0\,(\alpha \neq 0,\ P \neq 0,\ R = 0)$, $A_9 = 0\,(\alpha = 0,\ \beta \neq 0,\ T = 0)$, $A_9 = 0\,(\alpha \neq 0,\ P = 0,\ Q \neq 0,\ 7\alpha f - \gamma = 0)$, $A_{10} = 0\,(\alpha \neq 0,\ P \neq 0,\ R \neq 0)$, $A_{10} = 0\,(\alpha \neq 0,\ P = 0,\ Q \neq 0,\ \gamma - 7\alpha f \neq 0)$, $A_{10} = 0\,(\alpha = 0,\ \beta \neq 0,\ T \neq 0)$, т.е. равенките

(3.1) $$5y^{(7)} - 28 f y^{(5)} - 35(f' + g)y^{(4)} + (23f^2 - 15f'' - 15g' - 180h)y''' + (105fg - 35g'' - 70h')y'' + (20f'g + 23fg' - 5g''' - 50h'' + 128fh + 30g^2)y' + (40f'h + 46fh' - 10h''' + 60gh)y = 0$$

$$(\alpha = \beta = \gamma = 0),$$

(3.2) $$105\alpha A_7' - (105\alpha' + \beta)A_7 - 735\alpha^2 A_5 + 70\alpha\beta A_4 - 105\alpha\gamma)y''' + 35\alpha(21\alpha f' - 126\alpha g + 2\beta f)y'' - 105\alpha(70\alpha h + \gamma')y' = 0$$

$$(\alpha \neq 0,\ P = 0,\ Q = 0),$$

(3.3) $$105\alpha PA_8' - (105\alpha P' + Q^2\gamma - 210\alpha f Q)A_8 + PQA_7 - 70\alpha PQA_4 - 105\alpha P^2 y''' - 6\alpha f PQ y'' = 0, \qquad (\alpha \neq 0,\ P \neq 0)$$

(3.4) $$105\alpha QA_8' - (105\alpha Q' - \beta Q)A_8 + Q^2 A_7 - 70\alpha Q^2 A_4 - 70\alpha f Q^2 y'' = 0$$

$$(\alpha \neq 0,\ P = 0,\ Q \neq 0),$$

(3.5) $$20\beta A'_8 - 20\beta' A_8 - (10S - 128\beta f)A_7 - 32\beta^2 A_5 - 10\beta S y''' - 224\beta^2 f' y'' - 320\beta^2 h y' = 0, \qquad (\alpha = 0,\ \beta \neq 0)$$

(3.6) $$105\alpha PRA_9' + (70\alpha f R^2 - \gamma R^2)A_8 + PR^2 A_7 - 70\alpha PR^2 A_4 - 70\alpha f PR^2 y'' - (105\alpha PR' - \beta PR - \gamma QR + 70\alpha f QR)A_9 = 0$$

$$(\alpha \neq 0,\ P \neq 0,\ R \neq 0),$$

$$(3.7)\quad (\gamma - 7\alpha f)\, Q^2 A_9' - (\gamma Q^2 - 7\alpha f Q^2)' A_9 - Q^3 (\gamma - 7\alpha f)^2 A_8$$
$$- Q^4 (\gamma - 7\alpha f)^2 y''' = 0 \qquad (\alpha \neq 0,\ P = 0,\ Q \neq 0,\ \gamma - 7\alpha f \neq 0),$$

$$(3.8)\quad 4\beta T A_9' - (4\beta T' - \beta' T) A_9 - 2 T^2 A_7 - 2\beta T^2 y' = 0 \ (\alpha = 0,\ \beta \neq 0,\ T \neq 0)$$

имаат особина нивните интеграли да бидат квадрати од интегралите на равенката (3).

За таа цел, ако земеме z да биде било кое решение на равенката (3) и ако ставиме $y = z^2$, тогаш со диференцирање добиваме

$$A_0 = z^2.$$
$$A_1 = 2zz'.$$
$$A_2 = 2z'^2 + 2z'z'',$$
$$A_3 = 6z'z'' - 2zz''',$$
$$A_4 = 6z''^2 + 8z'z''' - 2fz'^2,$$
$$A_5 = 20z''z''' + 4fz'z'' + 2(4g - f')z'^2,$$
$$A_6 = 20z'''^2 - 12gzz''' - 28fz'z'''$$
$$+ 2(f'' - 4g' + 10h - 4f^2)zz'',$$
$$A_7 = 140\alpha z'z''' - 4\beta z'z'' + 2\gamma zz'',$$
$$A_8 = 2Pzz'' + 4Qz'z'' \qquad (\alpha \neq 0),$$
$$A_8 = 32\beta z'z''' + Szz'' \qquad (\alpha = 0,\ \beta \neq 0),$$
$$A_9 = 4Rz'z'' \qquad (\alpha \neq 0,\ P \neq 0),$$
$$A_9 = 2Q^2(\gamma - 7\alpha f)zz'' \qquad (\alpha \neq 0,\ P = 0,\ Q \neq 0),$$
$$A_9 = Tzz'' \qquad (\alpha = 0,\ \beta \neq 0),$$
$$A_{10} = 0 \qquad (\alpha \neq 0,\ P \neq 0,\ R \neq 0),$$
$$A_{10} = 0 \qquad (\alpha \neq 0,\ P = 0,\ Q \neq 0,\ \gamma - 7\alpha f \neq 0),$$
$$A_{10} = 0 \qquad (\alpha = 0,\ \beta \neq 0,\ T \neq 0).$$

За $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ се добива $A_7 = 0$ т.е. се добива равенката (3.1).

За $\alpha \neq 0$, $P = Q = 0$ се добива $A_8 = 0$ т.е. се добива равенката (3.2).

За $\alpha \neq 0$, $P \neq 0$, $R = 0$ односно $\alpha \neq 0$, $P = 0$, $Q \neq 0$, $\gamma - 7\alpha f = 0$ односно $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, $T = 0$ се добива $A_9 = 0$, т.е. се добиваат равенките (3.3), (3.4) и (3.5). Ако е пак $\alpha \neq 0$, $P \neq 0$, $R \neq 0$ односно $\alpha \neq 0$, $P = 0$, $Q \neq 0$, $\gamma - 7\alpha f \neq 0$ односно $\alpha = 0$, $\beta \neq 0, T \neq 0$ се добива $A_{10} = 0$, т.е. се добиваат равенките (3.6), (3.7) и (3.8).

Во врска со начинот на кој ги добивме овие равенки, јасно е дека тие имаат особина нивните интеграли да бидат квадрати од интегралите на равенката (3).

LITERATURA

[1] Э. Камке, Спровочник по обикновенным дифференцияльным уравнениям, Москва (1961) стр. 531 и 553.

[2] D. S. Mitrinović et D. Ž. Đoković, Compléments au Traité de Kamke, Note IX, Publikation de la Fakulté d'Élektrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathematiques et physique N° 108 (1963).

[3] I. A. Šapkarev, Über lineare Differentialgleichungen mit der Eigenschaft dass k-te Potenzen der Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ihre Integrale sind, Matematički vesnik, 4 (19) sv. 1, str. 67—70, Beograd (1967).

Ilija A. Šapkarev

ÜBER LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DEREN INTEGRALE ZWEITE UND DRITTE POTENZEN DER INTEGRALE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGFN DRITTER UND VIERTER ORDNUNG SIND

Zusammenfassung

In dieser Arbeit zeigen wir dass die Integrale der Differentialgleichungen

$$y^{(5)}-5fy'''-5(f'+g)y''-(f''+7g'-4f^2)y'-2(g''-4fg)y=0 \quad (f'-2g\neq 0),$$

$$\begin{aligned}(f'-2g)\,y^{(6)} &- (f'-2g)'\,y^{(5)}-5f(f'-2g)\,y^{(4)}\\ &-[(9f'+7g)(f'-2g)-5f(f'-2g)']\,y'''\\ &-[(6f''-12g'-4f^2)(f'-2g)-5(f'+g)(f'-2g)]y''\\ &-[(f'''+9g''-10ff'-4fg)(f'-2g)\\ &-(f''+7g'-4f^2)\ (f'-2g)']\,y'\\ &-[(2g'''-12f'g-8fg'+8g^2)(f'-2g)\\ &-(2g''-8fg)(f'-2g)']\,y=0 \quad (f'\neq 2g)\end{aligned}$$

zweite Potenzen der Integrale der Differentialgleichung

$$\text{(a)} \qquad z'''-f(x)\,z'-g(x)\,z=0$$

sind.

Auch zeigen wir dass die Integrale der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}&A_7=0 && (h=0),\\ &A_9=0 && (h\neq 0,\ A\neq 0),\\ &A_{10}=0 && (h\neq 0,\ A\neq 0,\ C\neq 0),\\ &A_{10}=0, && (h\neq 0,\ A=0,\ B\neq 0),\end{aligned}$$

mit

$$A_7 = y^{(7)} - 14fy^{(5)} - (14h + 70g)y^{(4)} - (14h' + 84g' - 49f^2)y'''$$
$$- (4h'' + 56g'' - 36fh - 294fg)y'' - (h''' + 20g'''$$
$$- 10f'h - 65f'g - 21fh' - 176fg' - 6gh - 165g^2 + 36f^3)y'$$
$$- (3g^{(4)} - 24h'g - 30g'h - 39fg'' - 177gg' + 108f^2g)y,$$
$$A_8 = 15hA_7' - 20h'A_7 - 15h(2h'' - 18fh)A_3 - 126h^2A_5 \quad (h \neq 0),$$
$$A_9 = 420hAA_8' - (420hA' - 140h'A + 21hB)A_8 - 400A^2A_7$$
$$- 840ABhA_3 \qquad (h \neq 0,\ A \neq 0),$$
$$A_9 = BA'_8 - B'A_8 - 2B^2A_3 \qquad (h \neq 0,\ A = 0,\ B \neq 0),$$
$$A_{10} = 20ACA_9' - (20AC' - BC)A_9 - C^2A_8 - 40AC^2A_3$$
$$(h \neq 0,\ A \neq 0,\ C \neq 0),$$
$$A_{10} = 21hBA_9' - (42hB' - 7Bh')A_9 + (h''B^2 - 9B^2fh)A_8 - B^3A_7$$
$$(h \neq 0,\ A = 0,\ B \neq 0),$$
$$h = f' - 2g,\ A = 6hh'' - 7h'^2 + 9fh^2,$$
$$B = 15hh''' - 20h'h'' - 261h^3 + 45fhh' + 45h^2g,$$
$$C = 420hAB' - 400A^2h'' + 3600A^2fh - 420hA'B + 140h'AB - 21hB^2,$$

dritte Potenzen der Integrale der Differentialgleichung (a) sind.

Weiter erhalten wir die Differentialgleichungen

$$A_7 = 0 \quad (\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0),$$
$$A_8 = 0 \quad (\alpha \neq 0,\ P = 0,\ Q = 0),$$
$$A_9 = 0 \quad (\alpha \neq 0,\ P \neq 0,\ R = 0),$$
$$A_9 = 0 \quad (\alpha \neq 0,\ P = 0,\ Q \neq 0,\ 7\alpha f - \gamma = 0),$$
$$A_9 = 0 \quad (\alpha = 0,\ \beta \neq 0,\ T = 0),$$
$$A_{10} = 0 \quad (\alpha \neq 0,\ P \neq 0,\ R \neq 0),$$
$$A_{10} = 0 \quad (\alpha \neq 0,\ P = 0,\ Q \neq 0,\ 7\alpha f - \gamma \neq 0),$$
$$A_{10} = 0 \quad (\alpha = 0,\ \beta \neq 0,\ T \neq 0),$$

mit

$$A_7 = 5y^{(7)} - 28fy^{(5)} - 35(f' + g)y^{(4)} + (23f^2 - 15f''$$
$$- 15g' - 180h)y''' + (105fg - 35g'' - 70h')y''$$
$$+ (20f'g + 23fg' - 5g''' - 50h'' + 128fh\,30g^2)y'$$
$$+ (c\,40f'h + 46fh' - 10h''' + 60gh\,y),$$

$$A_8 = 105\,\alpha\,A_7' - (105\,\alpha' + \beta)\,A_7 - 735\,\alpha^2\,A_5 + 70\,\alpha\beta\,A_4 - \alpha\gamma\,y'''$$
$$+ 35\,\alpha\,(21\,\alpha f' - 126\,\alpha g + 2\,\beta f)\,y'' - 105\,\alpha\,(70\,\alpha h + \gamma')\,y' \quad (\alpha \neq 0),$$
$$A_8 = 24\,\beta\,A_7' - 30\,\beta'\,A_7 + 16\,\beta^2\,A_4 - 6\,\beta\beta'\,y''' + 16\,f\beta^2\,y'' \quad (\alpha = 0,\ \beta \neq 0),$$
$$A_9 = 105\,\alpha\,PA_8' - (105\,\alpha P' + Q^2\gamma - 210\,\alpha f Q)\,A_8 + PQA_7 - 70\,PQA_4$$
$$- 105\,\alpha P^2\,y''' - 6\,\alpha f PQ y'', \qquad (\alpha \neq 0,\ P \neq 0)$$
$$A_9 = 105\,\alpha\,QA_8' - (105\,\alpha\,Q' - \beta\,Q)\,A_8 + Q^2 A_7 - 70\,\alpha\,Q^2 A_4 - 70\,\alpha f Q^2 y''$$
$$(\alpha \neq 0,\ P = 0,\ Q \neq 0),$$
$$A_9 = 20\,\beta\,A_8' - 20\,\beta'\,A_8 - (10\,S - 128\,\beta f)\,A_7 - 32\,\beta^2\,A_5 - 10\,\beta\,Sy'''$$
$$- 224\,\beta^2 f'\,y'' - 320\,\beta^2\,hy', \qquad (\alpha = 0,\ \beta \neq 0),$$
$$A_{10} = 105\,\alpha\,PRA_9' + (70\,\alpha f R^2 - \gamma\,R^2)\,A_8 + PR^2 A_7 - 70\,\alpha\,PR^2\,A_4$$
$$- 70\,\alpha f PR^2\,y'' - (105\,\alpha\,PR' - \beta\,PR - \gamma\,QR + 70\,\alpha f QR)\,A_9$$
$$(\alpha \neq 0,\ P \neq 0,\ R \neq 0),$$
$$A_{10} = (\gamma - 7\,\alpha f)\,Q^2 A_9' - (\gamma\,Q^2 - 7\,\alpha f\,Q^2)'\,A_9 - Q^3\,(\gamma - \alpha f)^2\,A_8$$
$$- Q^4\,(\gamma - 7\,\alpha f\,)^2\,y''', \qquad (\alpha \neq 0,\ P = 0,\ Q \neq 0,\ \gamma - 7\alpha f \neq 0),$$
$$A_{10} = 4\,\beta\,TA_9' - (4\,\beta\,T' - \beta'\,T)\,A_9 - 2\,T^2 A_7 - 2\,\beta\,T^2\,y'$$
$$(\alpha = 0,\ \beta \neq 0,\ T \neq 0),$$
$$\alpha = f' - g,\ \beta = 5f'' - 65\,g' + 200\,h + 18\,f^2,$$
$$\gamma = 5\,f''' - 20\,g'' + 50\,h' - 43\,ff' + 52\,fg,$$
$$P = 70\,\alpha\beta f - 735\,\alpha^2 f' - 4410\,\alpha^2 g - 105\,\alpha'\gamma - \beta\gamma,$$
$$Q = 105\,\alpha'\beta - 105\,\alpha\beta' + \beta^2 + 2940\,\alpha^2 f - 105\,\alpha\gamma,$$
$$R = 105\,\alpha\,PQ' - 105\,\alpha\,P^2 - \beta\,PQ - 105\,\alpha\,P'Q - \gamma\,Q^2 + 840\,\alpha f Q^2,$$
$$S = 12\,\beta\beta'' - 15\,\beta'^2 + 32\,f\beta^2,$$
$$T = 20\,\beta\,S' - 25\,\beta'\,S - 448\,f'\,\beta^2 + 64\,\beta\beta' f,$$

deren Integrale zweite Potenzen der Integrale der Differentialgleichung

$$z^{(4)} - f(x)z'' - g(x)\,z' - h(x)z = 0$$

sind.