ЗА ЕДНА ХОМОГЕНА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ВТОР РЕД ЧИИ ИНТЕГРАЛИ СЕ ДОБИВААТ СО КВАДРАТУРИ

Илија А. ШАПКАРЕВ

1. Наша цел во овој труд е да покажеме дека диференцијалната равенка

$$(1) \qquad (ax^2+bx+c)^2y''+(Ax^2+Bx+C)y=0,$$

може да се интегрира со квадратури, ако постои релацијата

$$(2) \qquad \{B+[2\alpha-(k+1)a]bk\}\{B+[2\alpha-(k+2)a]\,(k+1)b\}$$
$$+4[(k+1)a-\alpha]^2\,\{C+[(2k+1)\alpha-k(k+2)a]c\}=0$$

за $A \neq -k(k+1)a^2$, или релациите

$$(3) \qquad A=-k(k+1)a^2,\; B=-k\,(k+1)\,ab,$$

каде што k е природен број или нула, а α е

$$(4) \qquad \alpha=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4A}}{2}.$$

Се покажува дека условите добиени во [1], [2], [3] се добиваат од условот (2).

Применувајќи го овој резултат, изведуваме дека диференцијалната равенка

$$(5) \qquad (Ax^2+Bx+C)\,y''+(Dx+E)\,y'+y=0$$

може да се интегрира со квадратури, ако постои ралацијата

$$(6) \qquad \{AE+B-\frac{DE}{2}+[2\alpha-(k+1)A]kB\}\,\{AE+B-\frac{DE}{2}+$$
$$+\;[2\alpha-(k+2)A]\,(k+1)B\}$$
$$+4[(k+1)A-\alpha]^2\,\{C+\frac{BE}{2}-\frac{CD}{2}-\frac{E^2}{4}+[(2k+1)\,\alpha-k(k+2)A]C\}=0$$

за $A+\dfrac{AD}{2}-\dfrac{D^2}{4}\neq -k(k+1)A^2$, или релациите

$$(7) \qquad A+\frac{AD}{2}-\frac{D^2}{4}=-k(k+1)A^2,\ AE+B-\frac{DE}{2}=-k(k+1)AB.$$

Притоа k е природен број или нула, а α е

$$(8) \qquad \alpha=\frac{A\pm\sqrt{(A-D)^2-4A}}{2}.$$

2. Равенката (1), со смената

$$y=z\exp\left(\int\frac{rx+s}{ax^2+bx+c}\,dx\right),$$

каде што r и s се нови параметри, а z нова непозната функција, се трансформира во равенката

$$(9) \qquad (ax^2+bx+c)^2 z''+2(rx+s)z'+pz=0,$$

при што p е константа, ако

$$(10) \qquad \begin{aligned} r^2-ar+A&=ap,\\ 2rs-2as+B&=bp,\\ s^2-bs+rc+C&=cp. \end{aligned}$$

Со k последователни диференцирања на равенката (9), ја добиваме равенката

$$(ax^2+bx+c)\,z^{(k+2)}+[(2r+2ak)\,x+2s+kb]\,z^{(k+1)}+$$
$$+\,[p+ak(k-1)+2rk]\,z^{(k)}=0.$$

Последната равенка, а во врска со неа и равенката (1), ќе може да се реши со квадратури, ако

$$(11) \qquad p+ak(k-1)+2rk=0.$$

Од првата равенка на (10), во врска со (11), следува $r=\alpha-ka$, каде што α е определен со (4), а со елиминацијата на p и s од другите две равенки од (10) и од (11), за $r\neq a$ т.е. за $A\neq -k(k+1)a^2$, ја добиваме релацијата (2), а за $r=a$ ги добиваме релациите (3).

Ако константите a, b, c, A, B, C згодно се изберат, тогаш условите во (1) лесно се добиваат од релацијата (2).

3. Со оглед на тоа што нормалниот вид на диференцијалната равенка (5) е

$$(Ax^2+Bx+C)^2 z''+\left[\left(A+\frac{AD}{2}-\frac{D^2}{4}\right)x^2+\left(AE+B-\frac{DE}{2}\right)x+\right.$$
$$\left.+\,C-\frac{CD-BE}{2}-\frac{E^2}{4}\right]z=0,$$

следува дека таа ќе може да се интегрира со квадратури, ако константите A, B, C, D, E ја задоволуваат релацијата (6) во случај кога $A+\frac{AD}{2}-\frac{D^2}{4}\neq -k(k+1)A^2$, или пак, во случај кога постојат релациите (7).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Витанов, А.*, Об одном обобщении дифференциального уравнения, Билтен на друштвото на математичарите и физичарите од СР Македонија, Скопје (1966), книга XVII, стр. 45—71.

[2] *Карамата Ј.*, Проблем 3. (Весник Друштва математичара и физичара НР Србије I, 1949, стр. 72).

[3] *Попов Б.*, За еден Д'Алемберт-ов услов на интеграбилност на балистичката диференцијална равенка, Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите од НР Македонија, Скопје (1950). книга I, стр. 29—39.

ZUSAMMENFASSUNG

ÜBER EINE HOMOGENE LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG DER ZWEITEN ORDNUNG DEREN INTEGRALE IN DER GESCHLOSSENEN FORM ERHALTEN WERDEN KÖNNEN

Ilija A. Šapkarev

Man betrachtet in dieser Arbeit die Differentialgleichung

$$(ax^2 + bx + c)^2 y'' + (Ax^2 + Bx + C)y = 0, \tag{a}$$

wo a, b, c $(abc \neq 0)$, A, B, C beliebige Konstanten sind.

Diese Gleichung transformiert sich mit der Substitution

$$y = z\exp\left(\int \frac{rx + s}{ax^2 + bx + c}\, dx\right),$$

wobei r und s Konstanten sind, in der Differentialgleichung

$$(ax^2 + bx + c)\, z'' + 2(rx + s)\, z' + pz = 0, \tag{b}$$

wo p eine Konstante ist, wenn die folgenden Relationen

$$\begin{aligned} r^2 - ar + A &= ap, \\ 2rs - 2as + B &= bp \\ s^2 - bs + rc + C &= cp, \end{aligned} \tag{c}$$

bestehen.

Wenn man die Gleichung (b) k-mal differenziert, bekommt man die Differentialgleichung

$$(ax^2 + bx + c)\, z^{(k+2)} + [(2r + 2ak)\, x + 2s + kb]\, z^{(k+1)} + [p + ak(k-1) + 2rk]\, z^{(k)} = 0$$

Das allgemeine Integral der letzten Gleichung und damit auch das allgemeine Integral der Gleichung (a) kann in der geschlossenen Form erhalten werden, wenn die folgende Relation

$$p + ak(k-1) + 2rk = 0 \tag{d}$$

besteht.

Von der ersten Gleichun von (c) und der Gleichung (d) bekommt man $r = \alpha - ka$, wo $\alpha = (a \pm \sqrt{a^2 - 4A})/2$ ist, und durch Eliminieren von s und p der zwei letzten Relationen von (c) und (d) erhalten wir die Relation

$$\{B + [2\alpha - (k+1)\, a]\, bk\}\, \{B + [2\alpha - (k+2)a]\, (k+1)\, b\} + 4[(k+1)a - \alpha]^2\, \{C + [(2k+1)\alpha - k(k+2)a]c\} = 0$$

für $A \neq -k(k+1)a^2$, oder die Relationen

$$A = -k(k+1)\, a^2, \quad B = -k(k+1)\, ab.$$

Fakultät für Maschinenwesen und Elektrotechnik Skopje

Примено на 14. IV 1970 г.