GLASNIK MATEMATIČKI
Tom 5 (25) — No. 1 — 1970.

ÜBER DIE INTEGRATION DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG DRITTER ORDNUNG IN GESCHLOSSENER FORM

Ilija A. Šapkarev, Skopje

1. In [1] hat B. S. Popov bewiesen, dass die Differentialgleichungen

$$y''' + a_1 y'' - \frac{2}{3} a_1^2 y' - \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9} a_1^3 + 3a_1 a_1' + a_1''\right) y = 0, \tag{1}$$

$$y''' + a_1 y'' - \frac{2}{3} a_1^2 y' + \left(\frac{1}{3} a_1'' - \frac{8}{27} a_1^3\right) y = 0, \tag{2}$$

$$y''' + a_1 y'' - \left(\frac{2}{3} a_1^2 + 2a_1' + \frac{a_1''}{a_1}\right) y' - \left(\frac{2}{3} a_1 a_1' + \frac{8}{27} a_1^3\right) y = 0 \tag{3}$$

in geschlossener Form integriert werden können und dass ihre allgemeinen Integrale lauten:

$$y = E^{2/3} \{C_3 + C_2 \int E^{-2}\, dx + C_1 \int E dx \int E^{-2}\, dx - C_1 \int E \int E^{-2}\, dx^2\}, \tag{1'}$$

$$y = E^{-1/3}\{C_1 + C_2 \int E dx + C_3 \int E \int E^{-2}\, dx^2\}, \tag{2'}$$

$$y = E^{-1/3}\{C_1 + C_2 \int a_1 E dx + C_3 \int a_1 E \int a_1^{-2} E^{-2}\, dx^2\}, \tag{3'}$$

$$a_1 = a_1(x),\ C_i = \text{const},\ i = 1, 2, 3,\ E = exp \int a_1\, dx .$$

In dieser Arbeit zeigen wir, dass die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y''' + (P + R)\, y'' + [P' + PR - (Q' + PQ + Q^2)]\, y' - \\ - [R\,(Q' + PQ + Q^2) + (PQ + Q + Q^2)']\, y = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

wobei P, Q, R beliebige Funktionen von x sind, in geschlossener Form integriert werden kann und dass ihr allgemeines Integral

$$y = C_1\, e^{\int Q dx} + C_2\, e^{\int Q dx} \int e^{-\int (P+2Q) dx}\, dx + C_3\, \delta \tag{5}$$

ist, wobei $\delta = \delta\,(x)$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$\delta'' + P\,\delta' - (Q' + PQ + Q^2)\,\delta = e^{-\int R dx} \tag{6}$$

ist.

Weiter zeigen wir, dass die drei zitierten Differentialgleichungen (1), (2), (3) spezielle Fälle der Differentialgleichung (4) sind.

2. Das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' + f(x)\, y'' + g(x)\, y' + h(x)\, y = 0 \tag{7}$$

ist bekanntlich

$$y = A_1\, \alpha + A_2\, \beta + A_3\, \gamma, \tag{8}$$

wo α, β, γ deren linearunabhängigen partikulären Integrale sind und A_1, A_2, A_3 beliebige Konstanten.

Wenn wir die Gleichung (8) dreimal differenzieren und dann A_1, A_2, A_3 eliminieren, erhalten wir gerade die Differentialgleichung (7) mit

$$f(x) = -\frac{\alpha(\beta'\gamma''' - \beta'''\gamma') - \alpha'(\beta\gamma''' - \beta'''\gamma) + \alpha'''(\beta\gamma' - \beta'\gamma)}{\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') - \alpha'(\beta\gamma'' - \beta''\gamma) + \alpha''(\beta\gamma' - \beta'\gamma)},$$

$$g(x) = \frac{\alpha(\beta''\gamma''' - \beta'''\gamma'') - \alpha''(\beta\gamma''' - \beta'''\gamma) + \alpha'''(\beta\gamma'' - \beta''\gamma)}{\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') - \alpha'(\beta\gamma'' - \beta''\gamma) + \alpha''(\beta\gamma' - \beta'\gamma)},$$

$$h(x) = -\frac{\alpha'(\beta''\gamma''' - \beta'''\gamma'') - \alpha''(\beta'\gamma''' - \beta'''\gamma') + \alpha'''(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')}{\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') - \alpha'(\beta\gamma'' - \beta''\gamma) + \alpha''(\beta\gamma' - \beta'\gamma)}.$$

Setzen wir jetzt

$$\frac{\beta'}{\beta} = Q, \qquad \frac{\beta\gamma'' - \beta''\gamma}{\beta\gamma' - \beta'\gamma} = -P, \tag{9}$$

$$\alpha'' - \frac{\beta\gamma'' - \beta''\gamma}{\beta\gamma' - \beta'\gamma}\, \alpha' + \frac{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'}{\beta\gamma' - \beta'\gamma}\, \alpha = e^{-\int R\,dx}, \tag{10}$$

so erhält man

$$\frac{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'}{\beta\gamma' - \beta'\gamma} = -(Q' + PQ + Q^2),$$

$$\frac{\beta\gamma''' - \beta'''\gamma}{\beta\gamma' - \beta'\gamma} = P^2 + Q^2 + PQ + Q' - P',$$

$$\frac{\beta'\gamma''' - \beta'''\gamma'}{\beta\gamma' - \beta'\gamma} = PQ^2 + QP^2 - 2QQ' - P'Q - Q'',$$

$$\frac{\beta''\gamma''' - \beta'''\gamma''}{\beta\gamma' - \beta'\gamma} = PQ'' + 4PQQ' + Q'^2 + 2Q^2 Q' + 2Q^3 P + \\ + Q^4 - P'Q' + P^2 Q^2 + P^2 Q' - Q^2 P'.$$

Weiter folgt

$$f(x) = P + R,$$

$$g(x) = P' + PR - (Q' + PQ + Q^2),$$

$$h(x) = -[R(Q' + PQ + Q^2) + (Q' + PQ + Q^2)'].$$

Aus der ersten Relation von (9) bekommen wir

$$\beta = A e^{\int Q dx},$$

und aus der zweiten

$$\gamma = e^{\int Q dx} \left(B + C \int e^{-\int (P+2Q)\, dx}\, dx\right).$$

Die Gleichung (10) wird

$$\alpha'' + P\alpha' - (Q' + PQ + Q^2)\, \alpha = e^{-\int R dx},$$

deren allgemeines Integral, siehe [2], lautet:

$$\alpha = e^{\int Q dx} \left[D_1 + D_2 \int e^{-\int (P+2Q)\, dx}\, dx\right] + \delta.$$

Dabei sind A, B, C, D_1 und D_2 beliebige Konstanten.

Damit in Verbindung folgt, dass (5) das allgemeine Integral der Differentialgleichung (4) ist.

1° Für $P = 2a_1/3$, $Q = 2a_1/3$, $R = a_1/3$ geht die Differentialgleichung (4) in die Differentialgleichung (1) über.

2° Für $P = -a_1/3$, $Q = -a_1/3$, $R = 4a_1/3$ geht die Differentialgleichung (4) in die Differentialgleichung (2) über.

3° Für $P = a_1/3 - a_1'/a_1$, $Q = -a_1/3$, $R = 4a_1/3 + a_1'/a_1$ geht die Differentialgleichung (4) in die Differentialgleichung (3) über.

Es ist zu bemerken, dass die Differentialgleichung (4) angewandt werden kann, um die Bedingungen für die Integration in geschlossener Form einiger speziellen Differentialgleichungen zu bekommen.

B e i s p i e l e: a) Wenn wir in der Differentialgleichung (4) $P = a_1 x + b_1$, $Q = a_2 x$, $R = a_3 x$ setzen, so folgt, dass die Differentialgleichung

$$y''' + (ax + b)\, y'' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, y' + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\, y = 0$$

in geschlossener Form integriert werden kann, wenn zwischen den Konstanten $a, b, \alpha, \beta, \gamma, A, B, C, D$ die Relationen

$$\begin{aligned}
&4b^2 \alpha + b^2 (a - \gamma)^2 + 3\beta^2 - 4ab\beta = 0,\\
&b^2 (a - \gamma)^2 - \beta^2 + 4bB = 0,\\
&(\beta - ab)\, B + b^2 A = 0,\\
&(a - \gamma)\, b - \beta + 2D = 0,\\
&2(\beta - ab)\, D - bB + b^2 C = 0
\end{aligned}$$

bestehen.

b) Wenn wir aber in der Differentialgleichung (4) $P = px + q$, $Q = r$, $R = s$ setzen, so folgt, dass die Differentialgleichung

$$y''' + (ax + b)\, y'' + (\alpha x + \beta)\, y' + (Ax + B)\, y = 0$$

in geschlossener Form integriert werden kann, wenn zwischen den Konstanten a, b, α, β, A, B die Relationen

$$[(ab - \alpha) A - a^2 B]\, [a^2 (\alpha - B) + (ab - \alpha) A] + a^5 A = 0\,,$$

$$[(ab - \alpha)(a^2 - A) + a^2 B]\, [a^2 (\alpha - B) + (ab - \alpha) A] -$$

$$- a^2 (ab - \alpha)\, [(ab - \alpha) A - a^2 B] = (\beta - a)\, a^6$$

bestehen.

LITERATUR:

[1] *B. S. Popov*, Über die Integration der linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung in geschlossener Form, Bull. Soc. Math. Phys. Macedoine **6** (1956), 17—19,

[2] *I. A. Šapkarev*, Nekoliko primedaba o homogenim linearnim diferencijalnim jednačinama drugog reda čiji se opšti integrali dobijaju pomoću kvadratura, Mat. Vesnik, **5** (**20**) (1968), 505—512.

(Eingegangen am 18. VI 1969)

Elektro-mašinski fakultet
Skopje

O INTEGRACIJI LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE TREĆEG REDA U ZATVORENOM OBLIKU

Ilija A. Šapkarev

Sadržaj

U ovom radu dokazuje se da se jednačina (4) može integrirati u zatvorenom obliku i da je njen integral dat sa (5). Dalje se pokazuje da se jednačine (1), (2), (3) mogu dobiti iz jednačine (4), ako se funkcije P, Q i R pogodno izaberu.