ЗА РЕШАВАЊЕТО НА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ СО КВАДРАТУРИ

Илија А. Шапкарев

1. Во овој труд покажуваме дека решавањето на линеарната диференцијална равенка

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & y^{(n)}+(f_1+f_n)\, y^{(n-1)}+(f'_1+f_2+f_1f_n)\, y^{(n-2)} \\
& +(f'_2+f_3+f_2 f_n)\, y^{(n-2)}+\ldots\ldots+(f'_{k-1}+f_k+f_{k-1} f_n)\, y^{(n-k)} \\
& +\ldots+(f'_{n-2}+f_{n-1}+f_{n-2} f_n)\, y'+(f'_{n-1}+f_{n-1} f_n)\, y=0
\end{aligned}
$$

се сведува на решавање на линеарната равенка

$$
(2)\quad y^{(n-1)}+f_1 y^{(n-2)}+\ldots+f_{n-1} y=e^{-\int f_n\, dx},
$$

каде што f_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ се диференцијабилни функции од x.

За $n=4$ покажуваме дека диференцијалната равенка

$$
\begin{aligned}
(3)\quad & y^{(4)}+(P+R+S)\, y'''+[2P'+R'+PR+PS+RS-(Q'+PQ+Q^2)]\, y'' \\
& +[P''+P'R+PR'+P'S+PRS-2(Q'+PQ+Q^2)'-(R+S)(Q'+PQ+Q^2)]y' \\
& -[(Q'+PQ+Q^2)''+(R+S)(Q'+PQ+Q^2)'+(R'+RS)\,(Q'+PQ+Q^2)]y=0
\end{aligned}
$$

има општ интеграл

$$
\begin{aligned}
(4)\quad & y=C_1 \exp\int Q dx+C_2 \exp\int Q dx \int \exp\left[-\int (P+2Q)\, dx\right] dx \\
& +C_3 \exp\int Q dx \int \left[-\int (P+2Q)\, dx\right] dx \int \exp\left[\int (P+Q-R) dx\right] dx+C_4\, \delta(x)
\end{aligned}
$$

каде што $\delta(x)$ е едно партикуларно решение на равенката

$$
\begin{aligned}
(5)\quad & \delta'''+(P+R)\, \delta''+[P'+PR-(Q'+PQ+Q^2)]\, \delta' \\
& -[R\,(Q'+PQ+Q^2)+(Q'+PQ+Q^2)']\, y=e^{-\int S(x)\, dx}.
\end{aligned}
$$

За погодно избраните функции $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ и $S(x)$, добиени се услови за интеграбилност на некои диференицјални равенки од четврти ред.

2. За да го докажеме ова поаѓаме од равенката (2), која може да се напише во вид:

$$e^{\int f_n dx}\,[y^{(n-1)}+f_1 y^{(n-2)}+\ldots+f_{n-1}y]=1,$$

од каде што, со диференцирање, ја добиваме равенката (1). Од начинот на кој ја добивме равенката (1) следува дека нејзиниот општ интеграл се состои од општиот интеграл на соодветната хомогена равенка на равенката (2) и од едно партикуларно решение на равенката (2).

За $n=4$ равенката (1) станува

$$(6)\quad y^{(4)}+(f_1+f_4)\,y'''+(f'_1+f_2+f_1f_4)\,y''+(f'_2+f_3+f_2f_4)\,y'+(f'_3+f_3f_4)\,y=0,$$

а равенката (2) станува:

$$y'''+f_1y''+f_2\,y'+f_3y=e^{-\int f_4\,dx}.$$

Во [1] имаме покажано дека диференцијалната равенка

$$y'''+(P+R)\,y''+[P'+PR-(Q'+PQ+Q^2)]\,y'$$
$$-[R\,(Q'+PQ+Q^2)+(Q'+PQ+Q^2)']\,y=0$$

има општ интеграл

$$y=C_1\,exp\int Qdx+C_2\,exp\int Qdx\int exp\,[-\int(P+2Q)\,dx]dx$$
$$+C_3\,exp\int Qdx\int exp\,[-\int(P+2Q)\,dx]\,dx\int[exp\,(P+Q-R)\,dx]\,dx.$$

Ако сега ставиме

$$f_1=P+R,\ f_2=P'+PR-(Q'+PQ+Q^2),$$
$$f_3=-[R\,(Q'+PQ+Q^2)+(Q'+PQ+Q^2)'],\ f_4=S,$$

равенката (6) станува (3) и нејзиниот општ интеграл, според она што го рековме погоре, ќе биде (4).

Равенката (3) може да се искористи за добивање услови за решавање на линеарни диференцијални равенки од четврти ред, ако погодно се изберат функциите $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ и $S(x)$.

Примери: 1^0. Ако во равенката (3) ставиме $P=a_1$, $R=b_1$, $Q=c_1$,

$S=\dfrac{\alpha_1 x+\beta_1}{\alpha_2 x+\beta_2}$, каде што a_1, b_1, c_1, α_1, α_2, β_1, β_2 се параметри, таа станува

$$(7)\qquad (A_1x+B_1)\,y^{(4)}+(A_2x+B_2)\,y'''+(A_3x+B_3)\,y'' +(A_4x+B_4)\,y'+(A_5x+B_5)\,y=0$$

при што

$$\begin{aligned}
A_1&=\alpha_2\, r,\\
B_1&=\beta_2\, r,\\
A_2&=(\alpha_1+a_1\,\alpha_2+b_1\,\alpha_2)\, r,\\
B_2&=(\beta_1+a_1\,\beta_2+b_1\,\beta_2)\, r,\\
A_3&=(a_1\,b_1\,\alpha_2+a_1\,\alpha_1+b_1\,\alpha_1-a_1\,c_1\,\alpha_2-c_1^2\,\alpha_2)\, r,\\
B_3&=(a_1\,b_1\,\beta_2+a_1\,\beta_1+b_1\,\beta_1-a_1\,c_1\,\beta_2-c_1^2\,\beta_2)\, r,\\
A_4&=(a_1\,b_1\,\alpha_1-a_1\,b_1\,c_1\,\alpha_2-b_1c_1^2\,\alpha_2-a_1\,c_1\,\alpha_1-c_1^2\,\alpha_1)\, r,\\
B_4&=(a_1\,b_1\,\beta_1-a_1\,b_1\,c_1\,\beta_2-b_1c_1^2\,\beta_2-a_1\,c_1\,\beta_1-c_1^2\,\beta_1)\, r,\\
A_5&=-(a_1\,b_1\,c_1\,\alpha_1+b_1c_1^2\,\alpha_1)\, r,\\
B_5&=-(a_1\,b_1\,c_1\,\beta_1+b_1c_1^2\beta_1)\, r.
\end{aligned}$$

Со елиминацијата на параметрите a_1, b_1, c_1, α_1, α_2, β_1, β_2 и r од овие равенки ги добиваме помеѓу константите A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5 релациите

$$\begin{gathered}
(A_5B_2-A_2B_5)\,(A_2B_1-A_1B_2)-(A_5B_1-A_1B_5)\,(A_3B_1-A_1B_3)=0,\\
B_1(A_2B_1-A_1B_2)\,(A_4B_1-A_1B_4)-B_1(A_3B_1-A_1B_3)^2\\
+B_2\,(A_3B_1-A_1B_3)\,(A_2B_1-A_1B_2)-B_3\,(A_2B_1-A_1B_2)^2=0,\\
(A_2B_1-A_1B_2)\,(A_3B_5-A_5B_3)+(A_4B_1-A_1B_4)\,(A_5B_1-A_1B_5)=0,
\end{gathered}$$

што претставуваат услов за интеграбилност на равенката (1) со квадратури.

2°. Ако пак во равенката (3) ставиме $P=ax+b$, $Q=\alpha x$, $R=\beta x$, $S=\gamma x$ таа станува

$$(8)\qquad y^{(4)}+(A_1x+A_2)y'''+(B_1x^2+B_2\,x+B_3)\,y'' +(C_1\,x^3+C_2\,x^2+C_3\,x+C_4)\,y'+(D_1x^4+D_2x^3+D_3x^2+D_4x+D_5)y=0,$$

каде што

$$\begin{aligned}
A_1&=a+\beta+\gamma,\\
A_2&=b,\\
B_1&=a\beta+a\gamma-\alpha^2-\alpha a+\beta\gamma,\\
B_2&=b\beta+b\gamma-\alpha b,\\
B_3&=2a+\beta-\alpha,\\
(9)\qquad C_1&=a\beta\gamma-\alpha\,(\alpha+a)\,(\beta+\gamma),
\end{aligned}$$