ЕДНА ЗАБЕЛЕШКА ЗА ИНТЕГРАЦИЈАТА НА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ СО КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Илија А. Шапкарев

1. Хомогени линеарни диференцијални равенки

Нека ни е дадена хомогената линеарна диференцијална равенка

$$y^{(n)}+a_{n1}\,y^{(n-1)}+\cdots+a_{nn}\,y=0, \tag{1.1}$$

при која $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$ се константи. Таа, за $n=2$, станува

$$y''+a_{21}\,y'+a_{22}\,y=0 \tag{1.2}$$

и може уште да се напише во вид

$$(y'-r_2\,y)'-r_1\,(y'-r_2\,y)=0, \tag{1.3}$$

каде што r_1 и r_2 се засега неопределени константи.

Ако во равенката (1.3) се воведе смената $y'-r_2\,y=z$, се добива равенката

$$z'-r_1\,z=0,$$

чиј општ интеграл е

$$z=A_1\,e^{r_1x}.$$

Во врска со тоа, општиот интеграл на равенката (1.2), имајќи ја во вид извршената смена, ќе биде

$$y=A_2\,e^{r_2x}+A_1\,e^{r_2x}\int e^{(r_1-r_2)x}\,dx.$$

Равенката (1.3), ако во неа се извршат означените операции, станува

$$y''-(r_1+r_2)\,y'+r_1\,r_2\,y=0.$$

Оваа равенка ќе биде идентична со равенката (1.2), ако

$$r_1 + r_2 = -a_{21}, \qquad (1.4)$$
$$r_1\, r_2 = a_{22},$$

т.е. ако r_1 и r_2 се корени на равенката

$$r^2 + a_{21}\, r + a_{22} = 0.$$

Ако во равенката (1.1) ставиме $n=3$, таа станува

$$y''' + a_{31}\, y'' + a_{32}\, y' + a_{33}\, y = 0 \qquad (1.5)$$

и може уште да се напише во вид

$$(y' - r_3\, y)'' + a_{21}\, (y' - r_3\, y)' + a_{22}\, (y' - r_3\, y) = 0. \qquad (1.6)$$

Последната равенка, со смената $y' - r_3\, y = z$, станува

$$z'' + a_{21}\, z' + a_{22}\, z = 0$$

чиј општ интеграл е

$$z = A_2\, e^{r_2 x} + A_1\, e^{r_2 x} \int e^{(r_1 - r_2)x}\, dx.$$

Во врска со тоа и имајќи ја во вид извршената смена, општиот интеграл на равенката (1.5) ќе биде

$$y = A_3\, e^{r_3 x} + A_2\, e^{r_3 x} \int e^{(r_2 - r_3)x}\, dx + A_1\, e^{r_3 x} \int \left(e^{(r_2 - r_3)x} \int e^{(r_1 - r_2)x}\, dx\right) dx.$$

Ако во равенката (1.6) ги извршиме означените операции, таа станува

$$y''' - (a_{21} - r_3)\, y'' + (a_{22} - a_{21}\, r_3)\, y' - a_{22}\, r_3\, y = 0.$$

Равенката (1.5) ќе биде идентично еднаква со последнава равенка, ако

$$a_{31} = a_{21} - r_3,$$
$$a_{32} = a_{22} - a_{21}\, r_3,$$
$$a_{33} = -a_{22}\, r_3$$

или, имајќи ги во вид релациите (1.4) следува

$$r_1+r_2+r_3=-a_{31},$$

$$r_1 r_2+r_1 r_3+r_2 r_3=a_{32},$$

$$r_1 r_2 r_3=-a_{33}$$

т.е. следува дека r_1, r_2, r_3 се корени на равенката

$$r^3+a_{31} r^2+a_{32} r+a_{33}=0.$$

Ако пак во равенката (1.1) ставиме $n=k$, таа станува

$$y^{(k)}+a_{k1} y^{(k-1)}+\cdots+a_{kk} y=0 \tag{1.7}$$

и нека, по претпоставка, нејзиниот општ онтеграл биде

$$y=A_k e^{r_k x}+A_{k-1} e^{r_k x}\int e^{(r_{k-1}-r_k)x}\,dx+A_{k-2} e^{r_k x}\int \left(e^{(r_{k-1}-r_k)x}\int e^{(r_{k-2}-r_{k-1})x}\,dx\right)dx$$

$$+\cdots+A_1 e^{r_k x}\int\left(e^{(r_{k-1}-r_k)x}\int\left(e^{(r_{k-2}-r_{k-1})x}\int\left(\ldots\int e^{(r_1-r_2)x}\underbrace{dx)\,dx\ldots)\,dx}_{k-1}\right.\right.\right.$$

каде што $r_1, r_2, \ldots, r_k$ се корени на равенката

$$r^k+a_{k1} r^{k-1}+\cdots+a_{kk}=0$$

т.е.

$$\begin{aligned}
&r_1+r_2+\cdots+r_k=-a_{k1}\\
&r_1 r_2+\cdots+r_1 r_k+\cdots+r_{k-1} r_k=a_{k2},\\
&r_1 r_2 r_3+r_1 r_2 r_4+\cdots+r_{k-2} r_{k-1} r_k=-a_{k3},\\
&.\\
&.\\
&.\\
&(-1)^k r_1 r_2\ldots r_k=a_{kk}.
\end{aligned}\tag{1.8}$$

Равенката (1.1), за $n=k+1$, станува

$$y^{(k+1)}+a_{k+1,1} y^{(k)}+\cdots+a_{k+1,k+1} y=0 \tag{1.9}$$

и може уште да се напише во вид

$$(1.10)\quad (y' - r_{k+1}\, y)^{(k)} + a_{k1}\,(y' - r_{k+1}\, y)^{(k-1)} + \cdots + a_{kk}\,(y' - r_{k+1}\, y) = 0.$$

Последната равенка, со смената $y' - r_{k+1}\, y = z$, станува

$$z^{(k)} + a_{k1}\, z^{(k-1)} + \cdots + a_{kk}\, z = 0$$

чиј општ интеграл, според направената претпоставка, е

$$z = A_k\, e^{r_k x} + A_{k-1}\, e^{r_k x} \int e^{(r_{k-1} - r_k)x}\, dx + A_{k-2}\, e^{r_k x} \int (e^{(r_{k-1} - r_k)x} \int e^{(r_{k-2} - r_{k-1})x}\, dx)\, dx$$

$$+ \cdots + A_1\, e^{r_k x} \int (e^{r_{k-1} - r_k)x} \int (e^{(r_{k-2} - r_{k-1})x} \int (\ldots \int e^{(r_1 - r_2)x} \underbrace{dx)\, dx \ldots)\, dx}_{k-1}.$$

Во врска со тоа и со извршената смена, општиот интеграл на равенката (1.9) ќе биде

$$y = A_{k+1}\, e^{r_{k+1} x} + A_k\, e^{r_{k+1} x} \int e^{(r_k - r_{k+1})x}\, dx$$

$$+ A_{k-1}\, e^{r_{k+1} x} \int e^{(r_k - r_{k+1})x} \int e^{(r_{k-1} - r_k)x}\, dx)\, dx$$

$$+ \cdots + A_1\, e^{r_{k+1} x} \int (e^{r_k - r_{k+1})x} \int (e^{(r_{k-1} - r_k)x} \int (\ldots \int e^{(r_1 - r_2)x} \underbrace{dx)\, dx \ldots.)\, dx.}_{k}$$

Равенката (1.10), ако во неа се извршат означените операции, станува

$$y^{(k+1)} + (a_{k1} - r_{k+1})\, y^{(k)} + (a_{k2} - a_{k1}\, r_{k+1})\, y^{(k-1)}$$
$$+ \cdots + (a_{kk} - a_{kk-1}\, r_{k+1})\, y' - a_{kk}\, r_{k+1}\, y = 0.$$

Последнава равенка ќе биде идентична со равенката (1.9) ако

$$a_{k1} - r_{k+1} = a_{k+1,\, 1},$$

$$a_{k2} - a_{k1}\, r_{k+1} = a_{k+1,\, 2},$$

$$\vdots$$

$$a_{kk} - a_{k,\, k-1}\, r_{k+1} = a_{k+1,\, k},$$

$$a_{kk}\, r_{k+1} = - a_{k+1,\, k+1}$$

од каде, во врска со (1.8) следува

$$\begin{aligned} & r_1 + r_2 + \cdots + r_{k+1} = -a_{k+1,\,1}, \\ & r_1 r_2 + \cdots + r_1 r_{k+1} + \cdots + r_k r_{k+1} = a_{k+1,\,2}, \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & (-1)^{k+1} r_1 r_2 \ldots r_{k+1} = a_{k+1,\,k+1} \end{aligned}$$

т.е. следува дека $r_1, r_2, \ldots, r_{k+1}$ се корени на равенката

$$r^{k+1} + a_{k+1,\,1} r^k + \cdots + a_{k+1,\,k+1} = 0.$$

Во врска со сето напред изнесено, со помош на математичката индукција, ја докажавме следната

Теорема 1. Диференцијалната равенка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \tag{1.11}$$

при која $a_1, a_2, \ldots, a_n$ се константи, има општ интеграл

$$\begin{aligned} y = {} & A_n e^{r_n x} + A_{n-1} e^{r_n x} \int e^{(r_{n-1} - r_n)x} \, dx \\ & + A_{n-2} e^{r_n x} \int (e^{(r_{n-1} - r_n)x} \int e^{(r_{n-2} - r_{n-1})x} \, dx) \, dx \\ & + \cdots + A_1 e^{r_n x} \int (e^{(r_{n-1} - r_n)x} \int (e^{(r_{n-2} - r_{n-1})x} \int (\ldots \int e^{(r_1 - r_2)x} \underbrace{dx) \, dx) \ldots) \, dx}_{n-1} \end{aligned} \tag{1.12}$$

каде што $r_1, r_2, \ldots, r_n$ се корени на равенката

$$\varphi(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{1.13}$$

Равенката (1.13) се вика карактеристична равенка за диференцијалната равенка (1.11).

Понатака, нека ги разгледаме случаите кога карактеристичната равенка $\varphi(r) = 0$ има еднократни и повеќекратни корени.

1° Нека сите корени на карактеристичната равенка (1.13) се еднокатни. Во тој случај од (1.12) следува

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n e^{r_n x},$$

каде што

$$C_1 = \frac{A_1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)\ldots(r_1-r_n)},\ C_2 = \frac{A_2}{(r_2-r_3)(r_2-r_4)\ldots(r_2-r_n)},\ldots, C_n = A_n.$$

Ако равенката (1.13) има комплексни еднокатни корени, а бидејќи нејзините коефициенти се реални броеви, ако $r_1 = \alpha + i\beta$ е нејзин корен, исто така и нему коњугираниот комплексен број $r_2 = \alpha - i\beta$ ќе биде нејзин корен. За овие два коњугирано комплексни корени имаме

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x).$$

На сличен начин се постапува и со другите коњугирано комплексни корени.

2° Нека r_1 биде m-катен корен на равенката (1.13). Во тој случај од (1.12) непосредно следува дека нему му одговараат партикуларните интеграли

$$e^{r_1 x},\ xe^{r_1 x},\ x^2 e^{r_1 x}, \ldots, x^{m-1} e^{r_1 x}.$$

На сличен начин се добиваат партикуларните интеграли што им одговараат и на другите повеќекатни корени.

Ако карактеристичната равенка (1.13) има комплексен корен $r_1 = \alpha + i\beta$ од катност m, тогаш и нему коњугираниот комплексен број $r_2 = \alpha - i\beta$ ќе биде нејзин корен од катност m. За двата овие m-катни корени партикуларни интеграли се

$$e^{\alpha x} \cos \beta x,\ xe^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x,\ xe^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Слично се добиваат и другите партикуларни интеграли што одговараат на другите повеќекатни коњугирано комплексни корени.

2. Нехомогени линеарни диференцијални равенки

Нека ни е дадена нехомогената линеарна диференцијална равенка

$$y^{(n)} + a_{n1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{nn} y = f(x), \tag{2.1}$$

при која $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$ се константи. Таа, за $n=2$, станува

$$y''+a_{21}\,y'+a_{22}\,y=f(x) \tag{2.2}$$

и може уште да се напише во вид

$$(y'-r_2\,y)'-r_1\,(y'-r_2\,y)=f(x),$$

чиј општ интеграл е

$$z=e^{r_1 x}\,(C_1+\int e^{-r_1 x} f(x)\,dx).$$

Во врска со тоа, општиот интеграл на равенката (2.2), ќе биде

$$y=C_2\,e^{r_2 x}+C_1\,e^{r_2 x}\int e^{(r_1-r_2)x}\,dx+e^{r_2 x}\int (e^{(r_1-r_2)x}\int e^{-r_1 x} f(x)\,dx)\,dx.$$

Равенката (2.1), за $n=3$, станува

$$y'''+a_{31}\,y''+a_{32}\,y'+a_{33}\,y=f(x) \tag{2.3}$$

и може да се напише во вид

$$(y'-r_3\,y)''+a_{21}\,(y'-r_3\,y)'+a_{22}\,(y'-r_3\,y)=f(x).$$

Оваа равенка, со смената $y'-r_3\,y=z$, преваѓа во равенката

$$z''+a_{21}\,z'+a_{22}\,z=f(x),$$

чиј општ интегра е

$$z=C_2\,e^{r_2 x}+C_1\,e^{r_2 x}\int e^{(r_1-r_2)x}\,dx+e^{r_2 x}\int (e^{(r_1-r_2)x}\int e^{-r_1 x} f(x)\,dx)\,dx.$$

Во врска со тоа општиот интеграл на равенката (2.3) ќе биде

$$y=C_3\,e^{r_3 x}+C_2\,e^{r_3 x}\int e^{(r_1-r_2)x}\,dx+C_1\,e^{r_3 x}\int (e^{(r_2-r_3)x}\int e^{(r_1-r_2)x}\,dx)\,dx$$
$$+\,e^{r_3 x}\int (e^{(r_2-r_3)x}\int (e^{(r_1-r_2)x}\int e^{-r_1 x} f(x)\,dx)\,dx)\,dx.$$

Ако во равенката (2.1) ставиме $n=k$, таа станува

$$y^{(k)}+a_{k1}\,y^{(k-1)}+\cdots+a_{kk}\,y=f(x) \tag{2.4}$$

и нека нејзиниот општ интеграл, по претпоставка, биде

$$y=C_k\,e^{r_k x}+C_{k-1}\,e^{r_k x}\int e^{(r_{k-1}-r_k)x}\,dx+\cdots+$$

$$C_1\,e^{r_k x}\int\left(e^{(r_{k-1}-r_k)x}\int\left(\ldots\int e^{(r_1-r_2)x}\,\underbrace{dx\right)dx\ldots\right)dx}_{k-1}$$

$$+\,e^{r_k x}\int\left(e^{(r_{k-1}-r_k)x}\int\left(e^{(r_{k-2}-r_{k-1})x}\int\left(\ldots\int\left(e^{(r_1-r_2)x}\int e^{-r_1 x}f(x)\,\underbrace{dx\right)dx\ldots\right)dx.}_{k}\right.\right.$$

Ако пак во истата равенка (2.1) ставиме $n=k+1$, таа станува

$$y^{(k+1)}+a_{k+1,\,1}\,y^{(k)}+\cdots+a_{k+1,\,k+1}\,y=f(x) \tag{2.5}$$

и може да се напише во вид

$$(y'-r_{k+1}\,y)^{(k)}+a_{k1}\,(y'-r_{k+1}\,y)^{(k-1)}+\cdots+a_{kk}\,(y'-r_{k+1}\,y)=f(x).$$

Последнава равенка, со смената $y'-r_{k+1}\,y=z$, преваѓа во равенката

$$z^{(k)}+a_{k1}\,z^{(k-1)}+\cdots+a_{kk}\,z=f(x),$$

чиј општ интеграл, според направената претпоставка, ќе биде

$$z=C_k\,e^{r_k x}+C_{k-1}\,e^{r_k x}\int e^{(r_{k-1}-r_k)x}\,dx+\cdots+$$

$$+\,C_1\,e^{r_k x}\int\left(e^{(r_{k-1}-r_k)x}\int\left(\ldots\int e^{(r_1-r_2)x}\,\underbrace{dx)\,dx)\ldots\right)dx}_{k-1}\right.$$

$$+\,e^{r_k x}\int\left(e^{(r_{k-1}-r_k)x}\int\left(e^{(r_{k-2}-r_{k-1})x}\int\left(\ldots\int\left(e^{(r_1-r_2)x}\int e^{-r_1 x}f(x)\,\underbrace{dx\right)dx\ldots\right)dx.}_{k}\right.\right.$$

Во врска со тоа, општиот интеграл на равенката (2.5), ќе биде

$$y = C_{k+1}\, e^{r_{k+1}x} + C_k\, e^{r_{k+1}x} \int e^{(r_k - r_{k+1})x}\, dx + \cdots +$$

$$+ C_1\, e^{r_{k+1}x} \int (e^{(r_k - r_{k+1})x} \int (\ldots \int e^{(r_1 - r_2)x} \underbrace{dx)\, dx \ldots)\, dx}_{k}$$

$$+ e^{r_{k+1}x} \int (e^{(r_k - r_{k+1})x} \int (e^{(r_{k-1} - r_k)x} \int (\ldots \int (e^{(r_1 - r_2)x} \int e^{-r_1 x} f(x) \underbrace{dx)\, dx \ldots)\, dx}_{k+1}.$$

На тој начин, со примена на математичката индукција, ја докажавме следната

Теорема 2. Диференцијалната равенка

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + \cdots + a_n\, y = f(x), \tag{2.6}$$

при која $a_1, a_2, \ldots, a_n$ се константи, има општ интеграл

$$y = C_n\, e^{r_n x} + C_{n-1}\, e^{r_n x} \int e^{(r_{n-1} - r_n)x}\, dx + \cdots + \tag{2.7}$$

$$+ C_1\, e^{r_n x} \int (e^{(r_{n-1} - r_n)x} \int (\ldots \int e^{(r_1 - r_2)x} \underbrace{dx)\, dx \ldots)\, dx}_{n-1}$$

$$+ e^{r_n x} \int (e^{(r_{n-1} - r_n)x} \int (e^{(r_{n-2} - r_{n-1})x} \int (\ldots \int (e^{(r_1 - r_2)x} \int e^{-r_1 x} f(x) \underbrace{dx)\, dx) \ldots)\, dx}_{n}.$$

Од (2.7) се гледа дека општиот интеграл на нехомогената равенка (2.6) се состои од еден нејзин партикуларен интеграл

$$y_p = e^{r_n x} \int (e^{(r_{n-1} - r_n)x} \int (e^{(r_{n-2} - r_{n-1})x} \int (\ldots \int (e^{(r_1 - r_2)x} \tag{2.8}$$

$$\int e^{-r_1 x} f(x) \underbrace{dx)\, dx) \ldots)\, dx}_{n}$$

и од општиот интеграл

$$y_g = C_n e^{r_n x} + C_{n-1} e^{r_n x} \int e^{(r_{n-1} - r_n)x} dx + \cdots +$$

$$+ C_1 e^{r_n x} \int (e^{(r_{n-1} - r_n)x} \int (\ldots \int e^{(r_1 - r_2)x} \underbrace{dx) \, dx) \ldots) \, dx}_{n-1}$$

на нејзината соодветна хомогена равенка (1.11).

Од (2.8) непосредно следуваат следните особини на партикуларниот интеграл на равенката (2.6).

1° Ако функцијата $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x)$, нејзиниот партикуларен интеграл ќе биде збир од партикуларните интеграли на диференцијалните равенки

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f_1(x),$$
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f_2(x),$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f_k(x).$$

2° Ако $f(x) = e^{\alpha x} [P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x]$,

каде што $P_1(x)$ и $P_2(x)$ се полиноми од x, нејзиниот партикуларен интеграл ќе има вид

$$y_p = x^k e^{\alpha x} [Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x],$$

каде што $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ се полиноми од x со степен еднаков со поголемиот степен од полиномите $P_1(x)$ и $P_2(x)$, а k е катноста на коренот $\alpha + \beta i$ на карактеристичната равенка (1.13).

Ilija A. Šapkarev

UNE REMARQUE SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES DIFFÉRENTIELLES A COEFFICIENTS CONSTANTES

Résumé

Dans cet article on démontre des théorèmes suivantes:

Théorème 1. L'équation linéaires différentielle

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

où $a_i\,(i=1, 2, \ldots, n)$ sont des constantes, a comme solution générale

$$y = A_n e^{r_n x} + A_{n-1} e^{r_n x} \int e^{(r_{n-1}-r_n)x}\, dx$$

$$+ A_{n-2} e^{r_n x} \int (e^{(r_{n-1}-r_n)x} \int e^{(r_{n-2}-r_{n-1})x}\, dx)\, dx$$

$$+ \cdots + A_1 e^{r_n x} \int (e^{(r_{n-1}-r_n)x} \int (e^{(r_{n-2}-r_{n-1})x} \int (\ldots \int e^{(r_1-r_2)x} \underbrace{dx)\, dx \ldots)\, dx}_{n-1}.$$

Théorème 2. L'équation linéaire différentielle

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$$

a comme solution génàrale

$$y = C_n e^{r_n x} + C_{n-1} e^{r_n x} \int e^{(r_{n-1}-r_n)x}\, dx$$

$$+ \cdots + C_1 e^{r_n x} \int (e^{(r_{n-1}-r_n)x} \int (\ldots \int e^{(r_1-r_2)x}\, dx)\, dx \ldots)\, dx$$

$$+ e^{r_n x} \int (e^{(r_{n-1}-r_n)x} \int (e^{(r_{n-2}-r_{n-1})x} \int (\ldots \int (e^{(r_1-r_2)x} \int e^{-r_1 x} f(x) \underbrace{dx)\, dx \ldots)\, dx}_{n}.$$

Les nombres r_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ sont définis par l'équation

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$