ЗА НЕКОИ КРИТЕРИУМИ ЗА ИНТЕГРАБИЛНОСТ НА ЛАПЛАСОВАТА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ТРЕТИ РЕД

Илија А. Шапкарев

1. Лапласовата диференцијална равенка

$$(a_0 x+b_0)\, y'''+(a_1 x+b_1)\, y''+(a_2 x+b_2)\, y'+(a_3 x+b_3)\, y=0 \qquad (1.1)$$

при која a_i, b_i $(i=0, 1, 2, 3)$ се константи, може да се напише во вид

$$\begin{aligned}&[(A_0 x+B_0)\, y''+(A_1 x+B_1)\, y'+(A_2 x+B_2)\, y]'+\\&+A\,[(A_0 x+B_0)\, y''+(A_1 x+B_1)\, y'+(A_2 x+B_2)\, y]=0,\end{aligned} \qquad (1.2)$$

каде што A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2 и A се засега неопределени константи.

Ако ставиме

$$(A_0 x+B_0)\, y''+(A_1 x+B_1)\, y'+(A_2 x+B_2)\, y=z,$$

равенката (1.2) станува

$$z'+Az=0$$

чиј општ интеграл е

$$z=Ce^{-Ax}.$$

Во врска со тоа следува дека општиот интеграл на равенката (1.1), во случај кога таа може да се напише во вид (1.2), се добива со помош на општиот интеграл на диференцијалната равенка

$$(A_0 x+B_0)\, y''+(A_1 x+B_1)\, y'+(A_2 x+B_2)\, y=Ce^{-Ax}. \qquad (1.3)$$

Ако во равенката (1.2) го извршиме означеното диференцирање, по средувањето таа станува

$$\begin{aligned}&(A_0 x+B_0)\, y'''+[(A_0 A+A_1)\, x+B_0 A+B_1+A_0]\, y''+\\&+[(A_1 A+A_2)\, x+B_1 A+B_2+A_1]\, y'+(A_2 Ax+B_2 A+A_2)\, y=0.\end{aligned}$$

Оваа равенка ќе биде еквивалентна со равенката (1.1), ако равенствата

$$A_0\,x+B_0=a_0\,x+b_0,$$
$$(A_0\,A+A_1)\;x+B_0\,A+B_1+A_0=a_1\,x+b_1,$$
$$(A_1\,A+A_2)\,x+B_1\,A+B_2+A_1=a_2\,x+b_2,$$
$$A_2\,Ax+B_2\,A+A_2=a_3\,x+b_3$$

претставуваат идентитети во однос на x.

Од овие равенства следува

$$\begin{aligned}&A_0=a_0,\\&B_0=b_0,\\&A_0\,A+A_1=a_1,\\&B_0\,A+B_1+A_0=b_1,\\&A_1\,A+A_2=a_2,\\&B_1\,A+B_2+A_1=b_2,\\&A_2\,A=a_3,\\&B_2\,A+A_2=b_3.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Од првите шест равенки од (1.4) се добива

$$\begin{aligned}&A_0=a_0,\\&B_0=b_0,\\&A_1=a_1-a_0\,A,\\&B_1=b_1-a_0-b_0\,A,\\&A_2=a_2-a_1\,A+a_0\,A^2,\\&B_2=b_2-a_1+(2\,a_0-b_1)\,A+b_0\,A^2,\end{aligned}$$

а во врска со тоа последните две равенки од тој систем стануваат

$$a_0\,A^3-a_1\,A^2+a_2\,A-a_3=0,$$
$$b_0\,A^3-(b_1-3\,a_0)\,A^2+(b_2-2\,a_1)\,A+a_2-b_3=0.$$

Од овие две равенки, за $a_0 a \neq 0$, се добиваат равенките

$$aA^2 - bA + c = 0, \tag{1.5}$$

$$(a_0 b^2 - a_0 ac - a_1 ab + a_2 a^2)\ A = a_3 a^2 - a_1 ac + a_0 bc, \tag{1.6}$$

каде што

$$a = 3 a_0^2 - a_0 b_1 + a_1 b_0,$$

$$b = 2 a_0 a_1 - a_1 b_2 + a_2 b_0,$$

$$c = a_0 a_2 - a_0 b_3 + a_3 b_0.$$

Значи, равенката (1.1) може да се напише во вид (1.2), ако константите a_i, b_i ($i=0, 1, 2, 3$) ја задоволуваат релацијата (1.5) и во тој случај нејзината интеграција се сведува на интепрацијата на равенката (1.3).

Равенката (1.3) ќе може да се интегира, ако константите A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2 ја задоволуваат релацијата [1]

$$\begin{gathered}[A_0 B_2 + A_2 B_0 + B_1 r + A_0 (2r + A_1) n]^2 + \\ + (A_0 - B_1)(2r + A_1)[A_0 B_2 + A_2 B_0 + B_1 r + A_0 (2r + A_1) n] + \\ + (2r + A_1)^2 [B_0 B_2 + B_0 (2n+1) r + A_1 B_0 n] = 0,\end{gathered} \tag{1.7}$$

при која

$$r_{1,2} = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_0 A_2}}{2}, \tag{1.8}$$

а n е природен број или нула.

Пример 1.1. Лапласовата диференцијална равенка

$$(x+1)\ y''' + (3x+2)\ y'' + (3x+1)\ y' + xy = 0 \tag{1.1.1}$$

може да се напише во вид

$$[(x+1)\ y'' + 2xy' + (x-1)\ y]' + [(x+1)\ y'' + 2xy' + (x-1)\ y] = 0.$$

Ако ставиме

$$(x+1)\ y'' + 2xy' + (x-1)\ y = z$$

таа станува

$$z' + z = 0.$$

Бидејќи општиот интеграл на оваа равенка е

$$z = Ae^{-x},$$

општиот интеграл на равенката (1.1.1) се добива со помош на општиот интеграл на равенката

$$(x+1)\ y''+2\,xy'+(x-1)\ y=Ae^{-x}. \tag{1.1.2}$$

Оваа равенка со смената $y=ue^{-x}$ се трансформира во равенката

$$(x+1)\ u''-2u'=A,$$

чиј општ интеграл е

$$u=B\,(x+1)^3+C-\frac{A}{2}\,x.$$

Општиот интеграл на равенката (1.1.2) ќе биде

$$y=\left(B\,(x+1)^3+C-\frac{A}{2}\,x\right)e^{-x},$$

а на равенката (1.1.1)

$$y=e^{-x}\,[C_1\,(x+1)^3+C_2+C_3\,x].$$

Пример 1.2. Лапласовата диференцијална равенка

$$(x+2)\ y'''-2\,(3\,x+4)\ y''+(11\,x+7)\ y'-(6\,x-1)\,y=0 \tag{1.2.1}$$

може да се напише во вид

$$[(x+2)\ y''-(4x+5)\ y'+(3x+1)\ y]'-2\,[(x+2)\ y''-(4x+5)\ y'+(3x+1)y]=0$$

и со смената

$$(x+2)\ y''-(4x+5)\ y'+(3x+1)\ y=z$$

станува

$$z'-2\,z=0.$$

Бидејќи општиот интеграл на оваа равенка е

$$z=Ae^{2x},$$

општиот интеграл на равенката (1.2.1) може да се добие со помош на општиот интеграл на рвенката

$$(x+2)\ y''-(4\,x+5)\ y'+(3x+1)\ y=Ae^{2x}. \tag{1.2.2}$$

Соодветната хомогена равенка

$$(x+2)\ y''-(4\,x+5)\ y'+(3\,x+1)\ y=0 \tag{1.2.3}$$

на равенката (1.2.2), со смената $y=\dfrac{ue^x}{(x+2)^2}$ се трансформира во равенката

$$(x+2)\ u''-(2x+5)\ u'+2u=0. \tag{1.2.4}$$

Последнава равенка, со диференцирање, станува

$$u'''-2\,u''=0$$

чиј општ интеграл е

$$u=\frac{B}{4}\,e^{2x}+Cx+D.$$

Во врска со тоа, општиот интеграл на равенката (1.2.4) ќе биде

$$u=\frac{Be^{2x}}{4}+\frac{C}{2}\,(2x+5).$$

Општиот интеграл на равенката (1.2.3), во врска со извршената смена, ќе биде

$$y=C_1\,\frac{e^{3x}}{(x+2)^2}+C_2\,\frac{e^x\,(2x+5)}{(x+2)^2}\,.$$

Со примена на Лагранжовата метода на варијација на константи се добива општиот интеграл на равенката (1.2.2),

$$y=A_1\,\frac{e^{3x}}{(x+2)^2}+A_2\,\frac{e^x\,(2x+5)}{(x+2)^2}-A\,\frac{(x+3)\,e^{2x}}{(x+2)^2}\,,$$

а во врска со него и општиот интеграл на равенкта (1.2. 1),

$$y=A_1\,\frac{e^{3x}}{(x+2)^2}+A_2\,\frac{e^x\,(2x+5)}{(x+2)^2}+A_3\,\frac{e^{2x}\,(x+3)}{(x+2)^2}\,.$$

2. Нека сега равенката (1.1) ја напишеме во вид

$$(\gamma x+\delta)\ [(A_0\,x+B_0)\ y''+(A_1\,x+B_1)\ y'+(A_2\,x+B_2)\ y]'+$$

$$(\alpha x+\beta)\ [(A_0\,x+B_0)\ y''+(A_1\,x+B_1)\ y'+(A_2\,x+B_2)\ y]=0, \tag{2.1}$$

каде што се A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, α, β, γ δ засега неопределени константи.

Ако ставиме

$$(A_0 x+B_0)\ y''+(A_1 x+B_1)\ y'+(A_2 x+B_2)\ y=z,$$

равенката (2.1) станува

$$(\gamma x+\delta)\ z'+(\alpha x+\beta)\ z=0.$$

Бидејќи општиот интеграл на оваа равенка е

$$z=C\,e^{-\int \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\,dx} \qquad (|\gamma|+|\delta|\neq 0)$$

следува дека општиот интеграл на рвенката (1.1), во случај кога таа може да се напише во вид (2.1), се добива од општиот интеграл на диференцијалната равенка

$$(A_0 x+B_0)\ y''+(A_1 x+B_1)\ y'+(A_2 x+B_2)\ y=C\,e^{-\int \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\,dx}. \qquad (2.2)$$

Равенката (2.1), ако во неа се изврши означеното диференцирање, по средувањето станува

$$[A_0 \gamma x^2+(A_0 \delta+B_0 \gamma)\ x+B_0 \delta]\ y'''+$$

$$+[(A_1 \gamma+A_0 \alpha)\ x^2+(A_1 \delta+B_1 \gamma+A_0 \gamma+A_0 \beta+B_0 \alpha)\ x+B_1\ \delta+A_0 \delta+B_0 \beta]y''+$$

$$+[(A_2 \gamma+A_1 \alpha)\ x^2+(A_2\ \delta+B_2 \gamma+A_1 \gamma+A_1 \beta+B_1 \alpha)\ x+B_2\ \delta+A_1\ \delta+B_1 \beta]\ y'+$$

$$+[A_2 \alpha x^2+(A_2 \gamma+A_2 \beta+B_2 \alpha)\ x+A_2\ \delta+B_2 \beta]\ y=0.$$

Оваа равенка ќе биде еквивалентна со равенката (1.1), ако се исполнети равенствата

$$A_0 \gamma x^2+(A_0 \delta+B_0 \gamma)\ x+B_0 \delta=a_0^2 x^2+2a_0 b_0 x+b_0^2,$$

$$(A_1 \gamma+A_0 \alpha)\ x^2+(A_1 \delta+B_1 \gamma+A_0 \gamma+A_0 \beta+B_0 \alpha)\ x+$$

$$+B_1 \delta+A_0 \delta+B_0 \beta=a_0 a_1 x^2+(a_0 b_1+a_1 b_0)\ x+b_0 b_1,$$

$$(A_2 \gamma+A_1 \alpha)\ x^2+(A_2 \delta+B_2 \gamma+A_1 \gamma+A_1 \beta+B_1 \alpha)\ x+$$

$$+B_2 \delta+A_1 \delta+B_1 \beta=a_0 a_2 x^2+(a_0 b_2+a_2 b_0)\ x+b_0 b_2,$$

$$A_2 \alpha x^2+(A_2 \gamma+A_2 \beta+B_2 \alpha)\ x+A_2 \delta+B_2 \beta=$$

$$=a_0 a_3 x^2+(a_0 b_3+a_3 b_0)\ x+b_0 b_3.$$

Со оглед на тоа што овие равенства треба да бидат идентитети во однос на x, следува:

$$
\begin{aligned}
&A_0\gamma=a_0^2,\\
&A_0\delta+B_0\gamma=2a_0b_0,\\
&B_0\delta=b_0^2,\\
&A_1\gamma+A_0\alpha=a_0a_1,\\
&A_1\delta+B_1\gamma+A_0\gamma+A_0\beta+B_0\alpha=a_0b_1+a_1b_0,\\
&B_1\delta+A_0\delta+B_0\beta=b_0b_1,\\
&A_2\gamma+A_1\alpha=a_0a_2,\\
&A_2\delta+B_2\gamma+A_1\gamma+A_1\beta+B_1\alpha=a_0b_2+a_2b_0,\\
&B_2\delta+A_1\delta+B_1\beta=b_0b_2,\\
&A_2\alpha=a_0a_3,\\
&A_2\gamma+A_2\beta+B_2\alpha=a_0b_3+a_3b_0,\\
&A_2\delta+B_2\beta=b_0b_3.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Од првите пет равенки од (2.3), за $\gamma\delta\neq0$, следуваат релациите

$$
\begin{aligned}
A_0&=\frac{a_0^2}{\gamma},\\
B_0&=\frac{b_0^2}{\delta},\\
\delta&=\frac{b_0}{a_0}\gamma,\\
A_1&=\frac{a_0a_1}{\gamma}-\frac{a_0^2}{\gamma}\alpha,\\
B_1&=\frac{a_0b_1}{\gamma}-\frac{a_0^2}{\gamma}-\frac{a_0^2\beta}{\gamma},
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

а во врска со нив, шестата равенка е идентично исполнета.

Од седмата и осмата равенка од (2.3), во врска со (2.4), се добива:

$$A_2 = \frac{a_0\, a_2}{\gamma} - \frac{a_0\, a_1}{\gamma^2}\alpha + \frac{a_0^{\,2}}{\gamma^3}\alpha^2, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} B_2 = {} & \frac{a_0\, b_2 - a_0\, a_1}{\gamma} - \frac{(a_0\, b_1 - a_1\, b_0 - 2a_0^{\,2})}{\gamma^2}\alpha - \frac{a_0\, a_1}{\gamma^2}\beta - \\ & - \frac{a_0\, b_0}{\gamma^3}\alpha^2 + 2\frac{\alpha\beta}{\gamma^3}a_0^{\,2}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Деветтата равенка од (2.3), во врска со последните три равенки од (2.4) и (2.6), станува

$$\left(a_0\frac{\beta}{\gamma} - b_0\frac{\alpha}{\gamma}\right)\left(a_0\, b_1 - a_1\, b_0 - a_0^{\,2} - a_0^{\,2}\frac{\beta}{\gamma} + a_0\, b_0\frac{\alpha}{\gamma}\right) = 0. \tag{2.7}$$

Од (2.7) следува

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0 - a_0^{\,2}}{a_0^{\,2}} + \frac{b_0}{a_0}\,\frac{\alpha}{\gamma}, \tag{2.8}$$

бидејќи случајот $a_0\,\beta - b_0\,\alpha = 0$, заедно со третата равенка од (2. 4), дава

$$\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} = A.$$

Овој случај е разгледан во овој труд под 1.

Десеттата равенка од (2.3), во врска со (2.5),станува

$$a_0\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^3 - a_1\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + a_2\frac{\alpha}{\gamma} - a_3 = 0, \tag{2.9}$$

а единаесеттата, во врска со (2.5), (2.6) и (2.8), станува

$$\begin{aligned} & 2a_0\,(a_0\, b_1 - a_1\, b_0)\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + [a_0\,(a_0\, b_2 - a_2\, b_0) - 2a_1\,(a_0\, b_1 - a_1\, b_0)]\frac{\alpha}{\gamma} + \\ & + a_2\,(a_0\, b_1 - a_1\, b_0) - a_0\,(a_0\, b_3 - a_3\, b_0) = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Во врска со третата равенка од (2.4), и со (2.5), (2.6), (2.8), (2.9) и (2.10), последната равенка од (2.3) станува

$$\begin{aligned} & a_0(a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_0\, b_1 - a_1 b_0 - a_0^{\,2})\frac{\alpha}{\gamma} + a_0\,(a_0 b_2 - a_2 b_0)\,(a_0 b_1 - a_1 b_0 - a_0^{\,2}) + \\ & + a_1\,(a_0\, b_1 - a_1\, b_0)\,(a_0 + a_1\, b_0 - a_0\, b_1) = 0. \end{aligned}$$

Ако $a_0 b_1 - a_1 b_0 - a_0^2 = 0$, од (2.8) следува $\beta = \frac{b_0}{a_0} \alpha$. Овој случај, исто така, е разгледан под 1. од овој труд.

За $a_0 b_1 - a_1 b_0 - a_0^2 \neq 0$, од последнава равенка следува

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{a_1}{a_0} - \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0}. \tag{2.11}$$

Случајот $a_0 b_1 - a_1 b_0 = 0$ не претставува интерес бидејќи тогаш равенката (1.1) станува равенка со константни коефициенти.

Од (2.10) во врска со (2.11) се добива релацијата

$$\begin{aligned} & a_0 (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 - a_1 (a_0 b_1 - a_1 b_0) (a_0 b_2 - a_2 b_0) - \\ & - a_0 (a_0 b_1 - a_1 b_0) (a_0 b_3 - a_3 b_0) + a_2 (a_0 b_1 - a_1 b_0)^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Значи, равенката (1.1) може да се напише во вид (2.1), ако константите a_i, b_i (i=0, 1, 2, 3) ги задоволуваат релациите (2.9) и (2,12). Во тој случај нејзината интеграција се сведува на интеграцијата на равенката (2.2).

Во врска со третата равенка од (2.4) и со (2.8), следува

$$B_0 = \frac{a_0}{\gamma} b_0,$$

$$B_1 = \frac{b_0}{\gamma}\left(a_1 - a_0 \frac{\alpha}{\gamma}\right),$$

$$B_2 = \frac{b_0}{\gamma}\left[a_2 - a_1 \frac{\alpha}{\gamma} + a_0 \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2\right]$$

т.е. следува

$$B_0 = \frac{b_0}{a_0} A_0,$$

$$B_1 = \frac{b_0}{a_0} A_1,$$

$$B_2 = \frac{b_0}{a_0} A_2.$$

И во овој случај соодветната хомогена равенка на равенката (2.2) станува равенка со константни коефициенти.

Пример 2.1. Лапласовата диференцијална равенка

$$(x+3)\ y'''+(2x+5)\ y''+(3x+8)\ y'+(2x+4)\ y=0 \tag{2.1.1.}$$

може да се напише во вид

$$(x+3)\ [(x+3)\ y''+(x+3)\ y'+2\,(x+3)\ y]'+$$

$$+(x+1)\ [(x+3)\ y''+(x+3)\ y'+2\,(x+3)\ y]=0$$

и со смената

$$(x+3)\ y''+(x+3)\ y'+2\,(x+3)\ y=z$$

станува

$$(x+3)\ z'+(x+1)\ z=0.$$

Бидејќи општиот интеграл на оваа равенка е

$$z=A\,(x+3)^2\,e^{-x},$$

општиот интеграл на равенката (2.1.1) се добива со помош од општиот интеграл на рвенката

$$y''+y'+2\,y=A\,(x+3)\,e^{-x}.$$

Општиот интеграл на оваа равенка е

$$y=e^{-x/2}\left((C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)+\frac{A}{4}\,(2x+7)\,e^{-x}.$$

Општиот онтеграл на равенката (2.1.1) ќе биде

$$y=e^{-x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)+C_3\,(2x+7)\,e^{-x}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шапкарев И. А., Sur une équation linéaire différentielle du second ordre resoluble par quadratures, Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите од СР Македонија, книга XIX, Скопје, 1968.

Ilia A. Šapkarev

SUR DES CRITERIUMS QUELQONQUES Ð'INTEGRABILITE DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE DE LAPLACE DU TROISIEME ORDRE

Résumé

Dans cet article, on démontre que l'équation différentielle de Laplace (1.1) on peut ecrire sous la forme (1.2), si les constantes a_i, b_i (i=0, 1, 2, 3) et A satisvont aux relations (1.5) et (1.6).

Dans ce cas, l'équation différentielle (1.1) on peut intégrer, si les constantes A_i, B_i (i=0, 1, 2) satisvont á la relation (1.7), ou r est deffini par (1.8) et n est un nombre naturele ou zero.

Puis on démontre que l'équation différentielle (1.1) on peut ecrire sous la forme (2.1) si les constantes a_i, b_i (i=0, 1, 2, 3) satisvont aux relations (2.9) et (2.12).

Dans ce cas, l'intégration de l'équation (1.1) peut **etre reduite** á l'intégration de l'équation (2.2).