ЕДНА ЗАБЕЛЕШКА ВО ВРСКА СО ПОЛИНОМНИ РЕШЕНИЈА НА ХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ*)

Илија А. Шапкарев

1. Нека ја предочиме хомогената линеарна диференцијална равенка

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, y^{(i)} = 0 \tag{1}$$

каде што коефициентите $a_i = a_i(x)$ се m пати диференцијабилни функции во интервалот $[a,b]$.

Во [2], во случај кога равенката (1) има полиномно решение од степен m, покажано е дека коефициентите $a_i(x)$ треба да исполнуваат една релација која е дадена во вид на детерминанта.

Во [1] се разгледува еден специјален вид од равенката (1) и се добиваат услови при кои таа има општо решение полином од степен $n+m-1$.

Во [3] е покажано како се добиваат и добиени се условите што треба да ги исполнуваат коефициентите $a_i(x)$ на равенката (1) во случај кога таа има општо решение полином од степен n'.

Ние, во овој труд, применувајќи една друга постапка за добивање услови, за равенката (1) да има полиномни решенија, докажуваме две теореми.

Ако ставиме

$$\frac{a_i}{a_0} = a_{i,0} \tag{2}$$

и

$$a_{i,m} = \frac{a'_{i+1,m-1} + a_{i,m-1}}{a'_{1,m-1} + a_{0,m-1}} \tag{3}$$

$$(i=0,1,\dots,n,\ a_{n+1} = 0),$$

---

*) Овој труд е финансиран од Републичката заедница за научни дејности на СР Македонија

можеме да ја искажеме следната

Теорема 1. Диференцијалната равенка (1) во случај кога има партикуларно решение полином од степен m нејзините коефициенти a_i ја задоволуваат релацијата

$$a'_{1,m-1} + a_{o,m-1} = 0. \tag{4}$$

Важи и обратното т.е. ако коефициентите на равенката (1) ја задоволуваат релацијата (4), таа има полиномно решение од степен m, под претпоставка дека нема полиномно решение од пониска степен.

Теорема 2. Диференцијалната равенка (1) ако има n полиномни решенија чии степени се од m до $n+m-1$ заклучено т.е. ако има соодветен општ интеграл полином од степен $n+m-1$, нејзините коефициенти ги задоволуваат релациите

$$a'_{i+1,m-1} + a_{i,m-1} = 0 \quad (i=0,1,\ldots,n-1). \tag{5}$$

Важи и обратното т.е. ако коефициентите на равенката (1) ги задоволуваат релациите (5) таа има n полиномни решенија чии степени се од m до $n+m-1$ заклучно т.е. има соодветен општ интеграл полином од степен $n+m-1$.

2. Со цел да ги докажеме искажаните теореми, претпоставуваме дека равенката (1) нема полиномно решение чиј степен е помал од m, ја делиме со $a_o \neq 0$ и во врска со (2) таа станува

$$\sum_{i=o}^{n} a_{i,o} y^{(i)} = 0.$$

Со диференцирање во однос на x, од оваа равенка ја добиваме равенката

$$a_{n,o} y^{(n+1)} + \sum_{i=o}^{n-1} (a'_{i+1,o} + a_{i,o}) y^{(i+1)} = 0,$$

која после делењето со $a'_{1,o} + a_{o.o} \neq 0$, , во врска со (3), станува

$$a_{n,1}\, y^{(n+1)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,1}\, y^{(i+1)} = 0 .$$

Ако оваа равенка ја диференцираме во однос на x, ја добиваме равенката

$$a_{n,1}y^{(n+2)}+\sum_{i=o}^{n-1}(a'_{i+1,1}+a_{i,1})y^{(i+2)}=0,$$

која после делењето со $a'_{1,1}+a_{o,1}\neq 0$, во врска со (3), станува

$$a_{n,2}y^{(n+2)}+\sum_{i=o}^{n-1}a_{i,2}y^{(i+2)}=0.$$

Со повторно диференцирање во однос на x, ја добиваме равенката

$$a_{n,2}y^{(n+3)}+\sum_{i=o}^{n-1}(a'_{i+1,2}+a_{i,2})y^{(i+3)}=0,$$

која, после делењето со $a'_{1,2}+a_{o,2}\neq 0$, во врска со (3), може да се напише во вид

$$a_{n,3}y^{(n+3)}+\sum_{i=o}^{n-1}a_{i+1,3}y^{(i+3)}=0.$$

Повторувајќи ја оваа постапка m пати ја добиваме равенката

$$a_{n,m-1}y^{(m+n)}+\sum_{i=o}^{n-1}(a'_{i+1,m-1}+a_{i,m-1})y^{(i+m)}=0.$$

Од оваа равенка се заклучува дека ако равенката (1) има полиномно решение од степен m, нејзините коефициенти a_i треба да ја задоволуваат релацијата (4) и обратно, ако коефициентите a_i на равенката (1) ја задоволуваат релацијата (4) таа има полиномно решение од степен m.

Значи, теоремата 1 е докажана.

Од последнава равенка исто така се заклучува дека ако равенката (1) има n полиномни решенија, чии степени се од m до $n+m-1$ заклучено, како партикуларни интеграли т.е. ако таа има соодветен општ интеграл полином од степен $n+m-1$, нејзините коефициенти a_i ги задоволуваат релациите (5).

Важи и обратното т.е. ако коефициентите a_i на равенката (1) ги задоволуваат релациите (5), таа има n полиномни решенија чии степени се од m до $n+m-1$ заклучно како партикуларни интеграли т.е. таа има соодветен општ интеграл полином од степен $n+m-1$.

Со тоа е докажана теоремата 2.

Пример 1. Диференцијалната равенка

$$a_1y' + a_oy = 0$$

има партикуларен интеграл полином од:

1° прв степен ако

$$\left(\frac{a_1}{a_o}\right)'+1 = 0;$$

2° втор степен ако

$$\left[\frac{(a_1/a_o)}{(a_1/a_o)'+1}\right]'+1 = 0;$$

3° трет степен ако

$$\left\{\frac{\dfrac{(a_1/a_o)}{(a_1/a_o)'+1}}{\left[\dfrac{(a_1/a_o)}{(a_1/a_o)'+1}\right]'+1}\right\}'+1 = 0.$$

Пример 2. Диференцијалната равенка

$$a_2y''+a_1y'+a_oy = 0$$

има партикуларен интеграл полином од:

1° втор степен ако

$$\left[\frac{(a_2/a_o)'+(a_1/a_o)}{(a_1/a_o)'+1}\right]'+1 = 0;$$

2° трет степен ако

$$\left\{\frac{\left[\frac{(a_2/a_o)}{(a_1/a_o)'+1}\right]'+\frac{(a_2/a_o)'+(a_1/a_o)}{(a_1/a_o)'+1}}{\left[\frac{(a_2/a_o)'+(a_1/a_o)}{(a_1/a_o)'+1}\right]'+1}\right\}'+1=0.$$

Пример 3. Диференцијалната равенка

$$a_3y'''+a_2y''+a_1y'+a_oy=0$$

има партикуларно решение полином од трет степен ако

$$\left\{\frac{\left[\frac{(a_3/a_o)'+(a_2/a_o)}{(a_1/a_o)'+1}\right]'+\frac{(a_2/a_o)'+(a_1/a_o)}{(a_1/a_o)'+1}}{\left[\frac{(a_2/a_o)'+(a_1/a_o)}{(a_1/a_o)'+1}\right]'+1}\right\}'+1=0.$$

Пример 4. Диференцијалната равенка

$$a_2y''+a_1y'+a_oy=0$$

има полиномни решенија од втор и трет степен ако нејзините коефициенти ги задоволуваат релациите

$$\left[\frac{(a_2/a_o)'+(a_1/a_o)}{(a_1/a_o)'+1}\right]'+1=0,\quad \left[\frac{(a_2/a_o)}{(a_1/a_o)'+1}\right]''-1=0.$$

Пример 5. Диференцијалната равенка

$$a_3y'''+a_2y''+a_1y'+a_oy=0$$

има полиномни решенија од степен 2,3,4 ако нејзините коефициенти ги задоволуваат релациите

$$\left[\frac{(a_2/a_o)'+(a_1/a_o)}{(a_1/a_o)'+1}\right]'+1=0,\quad \left[\frac{(a_3/a_o)'+(a_2/a_o)}{(a_1/a_o)'+1}\right]''-1=0,$$

$$\left[\frac{(a_3/a_o)}{(a_1/a_o)'+1}\right]'''+1=0.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лазов Петар Р., Димитровски Драган С., За една класа на линеарни диференцијални равенки чиј општ интеграл е полином, Билтен на ДМФ на СРМ, книга XXV, 1974.

[2] Šapkarev Ilija A.,Über Polynomlösungen der linearen Differentialgleichungen, Mathematica Balkanica 3(1973)

[3] Šapkarev Ilija A., Sur une équation différentiell linéaire d'ordre n dont la solution générale est un polynôme de n-ème degré., Matematički vesnik 1(16) 1964, 49-50.

Ilija A. Šapkarev

EINE BEMERKUNG UBER POLYNOMLOSUNGEN DER HOMOGENEN LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass die Differentialgleichung (1) ein Polynom vom Grad m als Losung haben wird, wenn die Koeffizienten a_i und ihre Ableitungen durch die Relation (4) verbunden sind.

Weiter wird gezeigt, dass dieselbe Differentialgleichung n Polynomlösungen, deren Grade von m bis n+m-1 sind, das heist allgemeines. Integral des Grades n+m-1 haben wird, wenn die Koeffizienten a_i die Relationen (5) erfüllen.

Es sei noch bemerkt, dass einige Sonderfälle angeführt werden.