POLYNOME VOM GRAD n ALS VOLLSTÄNDIGE INTEGRALE DER ALLGEMEINEN LINEAREN PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER ORDNUNG n

Ilija A. ŠAPKAREV

1. Es sei die allgemeine lineare partielle Differentialgleichung

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{n} \sum_{i} a_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m} \frac{\partial^i z}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_j^{i_j} \ldots \partial x_m^{i_m}} = 0$$

gegeben, wo $a_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m} = a_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m} (x_1, x_2, \ldots x_m)$ $(i_j = 1, 2, \ldots n;$ $j = 1, 2, \ldots, m;$ $\sum_{j=1}^{m} i_j = i)$ differenzierbare Funktionen von $x_1, x_2, \ldots$ x_m sind und $a_{0 \ldots 0} = \text{const} \neq 0$ ist.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass das vollständige Integral der Differentialgleichung (1) ein Polynom von $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vom Grad n sein kann, wenn ihre Koeffizienten $a_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m} (x_1, \ldots x_j, \ldots, x_m) =$ $= P_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m} (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_m)$ Polynome von $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vom Grad i sind (der grösste Grad von x_j ist i_j) und wenn sie die Relationen

$$(2) \qquad P_{i_1 \ldots i_j - i \ldots i_m} = (-1)^i \frac{\partial^i P_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m}}{\partial x_j^i},$$

$$(P_{i_1 \ldots i_j - i \ldots i_m} = 0 \text{ für } i_j - i < 0)$$

$$(3) \qquad \frac{\partial P_{i_1 \ldots i_j - 1 \ldots i_k + 1 \ldots i_m}}{\partial x_k} = \frac{\partial P_{i_1 \ldots i_j \ldots i_k \ldots i_m}}{\partial x_j}$$

$(P_{i_1 \ldots i_j - 1 \ldots i_k + 1 \ldots i_m} = 0$ für $i_j - 1 < 0;$ $k, j = 1, 2, \ldots, m,$ $k \neq j)$ erfüllen.

Es gilt auch umgekehrt, das heisst, dass das vollständige Integral der allgemeinen linearen partiellen Differetialgleichung

$$(4)\qquad \sum_{i=o}^{n}\sum_{n}(-1)^{i}\,\frac{\partial^{i}P_{i_1\ldots i_j\ldots i_m}}{\partial x_j^{i}}\cdot\frac{\partial^{n-i}z}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_j^{i_j-i}\ldots\partial x_m^{i_m}}=0$$

deren Koeffizienten $P_{i_1\ldots i_j\ldots i_m}$ $\left(\sum_{j=1}^{m}i_j=n\right)$ die Relationen

$$(5)\qquad \frac{P_{i_1\ldots i_j-1\ldots i_k+1\ldots i_m}}{\partial x_k}=\frac{\partial P_{i_1\ldots i_j\ldots i_k\ldots i_m}}{\partial x_j}$$

erfüllen, das Polynom

$$(6)\qquad z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i}B_{i_1\ldots i_j\ldots i_m}\,(x_1^{i_1}\ldots x_j^{i_j}\ldots x_m^{i_m}-i_1!\,i_2!\ldots i_m!\,\frac{A_{i_1\ldots i_j\ldots i_m}}{A_{0\ldots 0}}$$

sein kann.

2. Zu diesem Zweck differenzieren wir die Differentialgleichung (1) nach x_j ($j=1, 2,\ldots, m$) und bekommen die folgenden Differentialgleichungen

$$(7)\qquad \sum_{n}a_{i_1\ldots i_j\ldots i_m}\,\frac{\partial^{n+1}z}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_j^{i_j+1}\ldots\partial x_m^{i_m}}+$$

$$+\sum_{i=o}^{n}\sum_{i}\left(\frac{\partial a_{i_1\ldots i_j\ldots i_m}}{\partial x_j}+a_{i_1\ldots i_j-1\ldots i_m}\right)\frac{\partial^{i}z}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_j^{i_j}\ldots\partial x_m^{i_m}}=0.$$

$$(j=1, 2,\ldots, m)$$

Es sei das Polynom $z=P_n\,(x_1, x_2,\ldots, x_m)$ vom Grad n ein vollständiges Integral der Differentialgleichung (1). In diesem Fall hat das vollständige Integral der Gleichung (1) $\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\ldots+\binom{m+n-1}{n}=\binom{m+n}{n}-1$ Polynomlösungen als partikuläre Integrale. Da die vollständigen Integrale der Differentialgleichungen (7) mehr als $\binom{m+n}{n}-1$ Polynomlösungen als partikuläre Integrale enthalten, und da für das Polynom $z=P_n\,(x_1, x_2,\ldots, x_m)$

$$\frac{\partial^{n+1}z}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_j^{i_j+1}\ldots\partial x_m^{i_m}}=0$$

$$\left(j=1, 2,\ldots, m;\ \sum_{j=1}^{m}i_j=n\right)$$

ist, werden die Differentialgleichungen

(8)
$$\sum_{i=o}^{n} \sum_{i} \left(\frac{\partial a_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m}}{\partial x_j} + \right.$$
$$\left. + a_{i_1 \ldots i_j - 1 \ldots i_m} \right) \frac{\partial^i z}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_j^{i_j} \ldots \partial x_m^{i_m}} = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m)$$

indentisch ausgefüllt sein, wenn ihre Koeffizienten die Relationen

(9)
$$\frac{\partial a_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m}}{\partial x_j} + a_{i^1 \ldots i_j - 1 \ldots i_m} = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$
$$\left(\sum_{j=1}^{m} i_j = i; \; a_{i_1 \ldots i_j - 1 \ldots i_m} = 0 \quad \text{für} \quad i_j - 1 < 0 \right)$$

erfüllen.

Aus diesen Relationen folgt unmittelbar, dass die Funktionen $a_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m} (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_m) = P_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m} (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_m)$ $\left(i = 0, 1, \ldots, n; \sum_{j=1}^{m} i_j = i \right)$ Polynome von $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vom Grad i sind (der grösste Grad von x_j ist i_j). Von den Relationen (9) können die Relationen (2) und (3) sehr leicht erhalten werden.

Wenn wir die Differentialgleichung (4) nach x_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ differenzieren, nach (5), erhalten wir die Differentialgleichungen

$$\sum_{n} P_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m} \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x_1^{i_1} \ldots x_j^{i_j+1} \ldots \partial x_m^{i_m}} = 0.$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m)$$

Von diesen Relationen kann man folgern, dass die Differentialgleichung (4) ein Polynom vom Grad n als vollständiges Integral hat.

Wenn das Polynom

$$z = \sum_{i=o}^{n} \sum_{i} B_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m} x_1^{i_1} \ldots x_j^{i_j} \ldots x_m^{i_m}$$

sowie seine Ableitungen in die partielle Differentialgleichung

$$\sum_{i=o}^{n} \sum_{i} P_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m} \frac{\partial^i z}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_j^{i_j} \ldots \partial x_m^{i_m}} = 0,$$

deren Koeffizienten $P_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m}$ die Relationen (2) und (3) erfüllen, eingesetzt werden, und wenn man danach das freie Glied des Polynoms

$$P_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m} \text{ mit } A_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m} \left(i_j = 1, 2, \ldots, \text{n}; \sum_{j=1}^{m} i_j = i \right)$$

bezeichnet, wird dann $B_{00 \ldots 0}$ von der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i} i_1! \ldots i_j! \ldots i_m! \, A_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m} \cdot B_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m} + \\ + A_{00 \ldots 0} B_{00 \ldots 0} = 0$$

durch

$$B_{00 \ldots 0} = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{i} i_1! \ldots i_j! \ldots i_m! \, B_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m} \frac{A_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m}}{A_{00 \ldots 0}}$$

dargestellt.

Also ist das vollständige Integral der Gleichung (4) durch (6) gegeben.

Einige Sonderfälle wurden in [1] und [2] bearbeitet.

Beispiel. Das vollständige Integral der partiellen Differentialgleichung

$$\left(A_{0000} \frac{x_1^2}{2} - A_{1000} \, x_1 + A_{2000} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \\ + \left(A_{0000} \frac{x_2^2}{2} - A_{0100} x_2 + A_{0200} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \\ + \left(A_{0000} \frac{x_3^2}{2} - A_{0010} x_3 + A_{0020} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + \left(A_{0000} \frac{x_4^2}{2} - A_{0001} x_4 + \\ + A_{0002} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x_4^2} + (A_{0000} \, x_1 \, x_2 - A_{0100} x_1 - A_{1000} x_2 + A_{1100}) \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \, \partial x_2} + \\ + (A_{0000} x_1 x_3 - A_{0010} x_1 - A_{1000} x_3 + A_{1010}) \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \, \partial x_3} + (A_{0000} x_1 \, x_4 - \\ - A_{0001} \, x_1 - A_{1000} \, x_4 + A_{1001}) \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \, \partial x_4} + (A_{0000} \, x_2 \, x_3 - A_{0010} \, x_2 - \\ - A_{0100} x_3 + A_{0110}) \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \, \partial x_3} + (A_{0000} x_2 \, x_4 - A_{0001} \, x_2 - A_{0100} \, x_4 + \\ + A_{0101}) \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \, \partial x_4} + (A_{0000} \, x_3 \, x_4 - A_{0001} \, x_3 - A_{0010} \, x_4 + A_{0011}) \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \, \partial x_4} - \\ - (A_{0000} \, x_1 - A_{1000}) \frac{\partial z}{\partial x_1} - (A_{0000} \, x_2 - A_{0100}) \frac{\partial z}{\partial x_2} - (A_{0000} x_3 - \\ - A_{0010}) \frac{\partial z}{\partial x_3} - (A_{0000} x_4 - A_{0001}) \frac{\partial z}{\partial x_4} + A_{0000} \, z = 0$$

autet

$$z = B_{1000}\left(x_1 - \frac{A_{1000}}{A_{0000}}\right) + B_{0100}\left(x_2 - \frac{A_{0100}}{A_{0000}}\right) +$$

$$+ B_{0010}\left(x_3 - \frac{A_{0010}}{A_{0000}}\right) + B_{0001}\left(x_4 - \frac{A_{0001}}{A_{0000}}\right) +$$

$$+ B_{2000}\left(x_1^2 - 2\frac{A_{2000}}{A_{0000}}\right) + B_{0200}\left(x_2^2 - 2\frac{A_{0200}}{A_{0000}}\right) +$$

$$+ B_{0020}\left(x_3^2 - 2\frac{A_{0020}}{A_{0000}}\right) + B_{0002}\left(x_4^2 - 2\frac{A_{0002}}{A_{0000}}\right) +$$

$$+ B_{1100}\left(x_1 x_2 - \frac{A_{1100}}{A_{0000}}\right) + B_{1010}\left(x_1 x_3 - \frac{A_{1010}}{A_{0000}}\right) +$$

$$+ B_{1001}\left(x_1 x_4 - \frac{A_{1001}}{A_{0000}}\right) + B_{0110}\left(x_2 x_3 - \frac{A_{0110}}{A_{0000}}\right) +$$

$$+ B_{0101}\left(x_2 x_4 - \frac{A_{0101}}{A_{0000}}\right) + B_{0011}\left(x_3 x_4 - \frac{A_{0011}}{A_{0000}}\right).$$

LITERATUR

[1] *Mitrinović, D. S.*, O jednoj linearnoj parcijalnoj jednačini, Glasnik matematički fizički i astronomski 1 (1946) 168-182 i 209-226.

[2] *Šapkarev, I. A.*, Polynome vom Grad *n* als vollständige Integrale der linearen partiellen Differentialgleichungen der Ordnung *n*, Mathematica Balkanica, 4, 111 (1974) 583-586.

РЕЗИМЕ

ПОЛИНОМИ ОД СТЕПЕН *n* КАКО ПОТПОЛНИ ИНТЕГРАЛИ НА ОПШТИ ЛИНЕАРНИ ПАРЦИЈАЛНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД n-ти РЕД

Илија А. ШАПКАРЕВ

Во овој труд се разгледува диференцијалната равенка (1) чии коефициенти

$a_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m} = a_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $\left(i_j = 1, 2, \ldots n;\ j = 1, 2, \ldots, m;\ \sum_{j=1}^{n} i_j = i\right)$ се диференцијабилни функции од $x_1, x_2, \ldots, x_m$, при што е $a_{00\ldots0} =$ = конст $\neq 0$.

Се покажува дека потполниот интеграл на равенката (1) ќе биде полином од $x_1, x_2, \ldots, x_m$ од n-ти степен, ако коефициентите $a_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = P_{i_1 \ldots i_j \ldots i_m}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ се полиноми од $x_1, x_2, \ldots, x_m$ од степен i (најголемиот степен од x_j е i_j) и ако тие ги задоволуваат релациите (2) и (3).

Важи и обратно, т. е. потполниот интеграл на равенката (4), чии коефициенти $P_{i_1, \ldots i_j \ldots i_m} \left(\sum_{j=1}^{n} i_j = n \right)$ ги задоволуваат релациите (5), е даден со (6).

Mathematische Fakultät,
Skopje.