POLYNOME ALS ALLGEMEINE INTEGRALE DER HOMOGENEN LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Ilija A. ŠAPKAREV

I

Es sei die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = 0 \tag{1}$$

gegeben, wo $a_i = a_i(x)$ $(a_n \neq 0)$ m-mal differenzierbare Funktionen im Intervall $[a, b]$ sind.

In [1, 2, 3, 4, 5] werden einige Relationen zwischen den Funktionen $a_i(x)$ und ihre Ableitungen erhalten, damit die gegebene Differentialgleichung (1) Polynome als Lösungen besitzt.

In dieser Arbeit erhalten wir die Relationen, die die Koefizienten $a_i(x)$ der Differentialgleichung (1) erfüllen müssen, damit sie Polynomlösungen als allgemeine Integrale besitzt.

Da der Fall $a_0 = 0$ kein besonderes Interesse darstellt, geben wir ferner die Voraussetzung, dass $a_0 \neq 0$ ist.

Wenn wir jetzt die Differentialgleichung (1) mit a_0 dividieren, so kann sie in der Gestalt

$$a_{n,0} y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_{i-1,0} y^{(i-1)} = 0 \tag{2}$$

geschrieben werden, wo $a_{i-1,0} = \dfrac{a_{i-1}}{a_0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$.

Es seien weiter m_s $(s = 1, 2, \ldots, r;\ r = 1, 2, \ldots, n)$ natürliche Zahlen und $m_{s+1} > m_s$.

Wenn wir noch

$$a_{i-1,j} = \frac{a'_{i,j-1} + a_{i-1,j-1}}{a'_{1,j-1} + a_{0,j-1}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m_1 - 1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n+1; \quad a_{n+1,j-1} = 0) \tag{3}$$

und

$$a_{i-1,j}=\frac{a'_{i,j-1}+a_{i-1,j-1}}{a'_{k_s+1,j-1}+a_{k_s,j-1}} \quad (j=m_s, m_s+1,\ldots, m_{s+1}-1) \tag{4}$$

$$(i=k_{s-1}+1,\ k_{s-1}+2,\ldots,\ k_s+1;\ a_{n+1,j-1}=0;$$

$$k_s=k_{s-1}+1,\ldots,\ n;\ k_0=0,\ k_r=n)$$

setzen, dann können wir das folgende Theorem aussagen.

Theorem. Die Differentialgleichung (1) wird dann und nur dann Polynomlösungen vom Grad

$$m_s+i-1 \tag{5}$$

haben, wenn ihre koeffizienten $a_i(x)$ die Relationen

$$a'_{i,m_s-1}+a_{i-1,m_s-1}=0$$
$$(i=k_{s-1}+1,\ k_{s-1}+2,\ldots,k_s) \tag{6}$$

erfüllen.

In diesem Fall wird das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) Polynom vom Grad $m=m_r+n-1$ sein.

Dabei ist Voraussetzung dass die Ausdrücke, die in den Nennern auftreten, ungleich von Null sind.

II

Wenn man die Differentialgleichung (2) differenziert, erhält man die Differentialgleichung

$$a_{n,0}\,y^{(n+1)}+\sum_{i=1}^{n}(a'_{1,0}+a_{i-1,0})\,y^{(i)}=0.$$

Wenn wir diese Gleichung mit $a'_{1,0}+a_{0,0}\neq 0$ dividieren, nach (3), für $j=1$, geht sie in die Differentialgleichung

$$a_{n,1}\,y^{(n+1)}+\sum_{i=1}^{n}a_{i-1,1}\ y^{(i)}=0$$

über.

Von dieser Differentialgleichung, durch Differenzieren, erhält man die Differentialgleichung

$$a_{n,1}\,y^{(n+2)}+\sum_{i=1}^{n}(a'_{i,1}+a_{i-1,1})\,y^{(i+1)}=0.$$

Wenn wir diese Differentialgleichung mit $a'_{1,1} + a_{0,1} \neq 0$ dividieren, nach (3), für $j=2$, können wir sie in der Gestalt

$$a_{n,2}\, y^{(n+2)} + \sum_{i=1}^{n} a_{i-1,2}\, y^{(i+1)} = 0$$

aufschreiben.

Wenn man dieses Verfahren m_1-mal wiederholt, ist es sehr leicht zu beweisen, dass die Differentialgleichung

$$a_{n,m_1-1}\, y^{(m_1+n)} + \sum_{i=1}^{n} (a'_{i,m_1-1} + a_{i-1,m_1-1})\, y^{(m_1+i-1)} = 0$$

bekommen wird.

Von dieser Differentialgleichung kann man folgern, dass die Differentialgleichung (1) dann und nur dann Polynomlösungen vom Grad m_1+i-1 haben wird, wenn ihre Koeffizienten $a_i(x)$ die Relationen

$$a'_{i,m_1-1} + a_{i-1,m_1-1} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k_1;\ k_1 = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllen und wenn $a'_{k_1+1,m_1-1} + a_{k_1,m_1-1} \neq 0$ ist.

In diesem Fall wird die letzte Differentialgleichung

$$a_{n,m_1-1}\, y^{(m_1+n)} + \sum_{i=k_1+1}^{n} (a'_{i,m_1-1} + a_{i-1,m_1-1})\, y^{(m_1+i-1)} = 0$$

die, durch Dividieren mit $a'_{k_1+1,m_1-1} + a_{k_1,m_1-1}$, nach (4), für $s=1$, $j=m_1$, in der Gestalt

$$a_{n,m_1}\, y^{(m_1+n)} + \sum_{i=k_1+1}^{n} a_{i-1,m_1}\, y^{(m_1+i-1)} = 0$$

geschrieben werden kann.

Wenn wir dieses Verfahren m_s-mal wiederholen, erhalten wir die Differentialgleichung

$$a_{n,m_s-1}\, y^{(m_s+n)} + \sum_{i=k_{s-1}+1}^{n} (a'_{i,m_s-1} + a_{i-1,m_s-1})\, y^{(m_s+i-1)} = 0. \tag{7}$$

Von dieser Gleichung kann man folgern, dass die Differentialgleichung (1) dann und nur dann Polynomlösungen vom Grad (5) haben wird, wenn ihre Koeffizienten $a_i(x)$ die Relationen (6) erfüllen und wenn

$$a_{k_s+1,m_s-1} + a_{k_s,m_s-1} \neq 0$$

ist.

Damit in Verbindung wird die Differentialgleichung

$$a_{n, m_s-1}\, y^{(m_s+n)} + \sum_{i=k_s+1}^{n} (a'_{i, m_s-1} + a_{i, m_s-1})\, y^{(m_s+i-1)} = 0$$

die, durch Dividieren mit $a'_{k_s+1, m_s-1} + a_{k_s, m_s-1}$, nach (4), für $j=m_s$, in die Differentialgleichung

$$a_{n, m_s}\, y^{(m_s+n)} + \sum_{i=k_s+1}^{n} a_{i-1, m_s}\, y^{(m_s+i-1)} = 0$$

übergeht.

Wenn wir jetzt in der Differentialgleichung (7) $s=r$ setzen, erhalten wir die Differentialgleichung

$$a_{n, m_r-1}\, y^{(m_r+n)} + \sum_{i=k_{r-1}+1}^{n} (a'_{i, m_r-1} + a_{i-1, m_r-1})\, y^{(m_r+i-1)} = 0.$$

Von dieser Gleichung kann man folgern, dass die Differentialgleichung (1) dann und nur dann Polynomlösungen vom Grad m_r+i-1 haben wird, wenn ihre Koeffizienten $a_i(x)$ die Relationen

$$a'_{i, m_r-1} + a_{i-1, m_r-1} = 0$$

$$(i = k_{r-1}+1,\ k_{r-1}+2, \ldots, k_r)$$

erfüllen.

Damit in Verbindung wird die letzte Differentialgleichung

$$a_{n, m_r-1}\, y^{(m_r+n)} = 0.$$

Also ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) ein Polynom vom Grad $m=m_r+n-1$.

Damit ist das ausgesagte Theorem völlig bewiesen.

Ferner werden wir einige Sonderfälle betrachten.

III

1. $n=1$. In diesem Fall wird die Differentialgleichung (1)

$$a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{1.1}$$

und nach (5) und (6) können wir das folgende Theorem aussagen.

Theorem 1. Die Differentialgleichung (1.1) wird dann und nur dann Polynomlösung vom Grad m_1 haben, das heisst sie wird das allgemeine Integral ein Polynom vom Grad m_1 haben, wenn ihre Koeffizienten $a_1(x)$ und $a_0(x)$ die Relation

$$a'_{1, m_1-1} + a_{0, m_1-1} = 0$$

erfüllen.

Diese Relation, für $a_{0, m_1-1} = 1$, wird

$$a_{1, m_1-1} + \int dx = 0.$$

Wenn wir hier $a_{1, m_1-1} = \dfrac{a_{1, m_1-2}}{a'_{1, m_1-2}+1}$ setzen, erhalten wir

$$a_{1, m_1-2} \int dx + \int\int dx^2 = 0.$$

Es ist weiter sehr leicht zu beweisen, dass

$$a_{1, k} = \frac{\int dx^{m_1-k}}{\int dx^{m_1-k-1}} \qquad \Big(\int dx^k = \underbrace{\int \ldots \int}_{k-\text{mal}} dx^k\Big)$$

gilt.

Also besitzt die Differentialgleichung

$$\Big(\int dx^{m_1}\Big) y' - \Big(\int dx^{m_1-1}\Big) y = 0$$

eine Polynomlösung vom Grad m_1.

2. $n=2$. In diesem Fall wird die Differentialgleichung (1)

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{2.1}$$

Diese Gleichung nach (5) und (6) wird dann und nur dann Polynomlösungen vom Grad $m_s + i - 1$ ($i = k_{s-1} + 1, k_{s-1} + 2, \ldots, k_s$) haben, wenn ihre Koeffizienten $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ die Relationen

$$a'_{i, m_s-1} + a_{i-1, m_s-1} = 0$$

$$(k_s = k_{s-1} + 1, \ldots, 1; \; s = 1, \ldots, r; \; r = 1, 2; \; k_r = 2).$$

erfüllen.

Damit in Verbindung können wir die folgenden Theoreme aussagen.

Theorem 2.1. Die Differentialgleichung (2.1) wird dann und nur dann Polynomlösungen vom Grad m_1 und m_1+1 haben, wenn ihre Koeffizienten $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ die Relationen

$$a'_{1, m_1-1} + a_{0, m_1-1} = 0,$$

$$a'_{2, m_1-1} + a_{1, m_1-1} = 0$$

erfüllen.

Also ist das allgemeine Integral ein Polynom vom Grad m_1+1.

Theorem 2.2. Die Differentialgleichung (2.1) wird dann und nur dann Polynomlösungen vom Grad m_1 und m_2+1 haben, wenn ihre Koeffizienten $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ die Relationen

$$a'_{1, m_1-1} + a_{0, m_1-1} = 0,$$

$$a'_{2, m_2-1} + a_{1, m_2-1} = 0$$

erfüllen.

Also ist das allgemeine Integral ein Polynom vom Grad m_2+1.

3. $n=3$. In diesem Fall wird die Differentialgleichung (1)

$$a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0. \tag{3.1}$$

Diese Gleichung, nach (5) und (6), wird dann und nur dann Polynomlösungen vom Grad $m_s + i-1$ $(i=k_{s-1}+1, \ldots, k_s)$ haben, wenn ihre Koeffizienten $a_3(x)$, $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ die Relationen

$$a'_{i, m_s-1} + a_{i-1, m_s-1} = 0$$

$$(k_s = k_{s-1} + 1, \ldots, 3;\ k_r = 3;\ s = 1, \ldots, 3;\ r = 1, 2, 3)$$

erfüllen.

Damit in Verbindung kann man die folgenden Theoreme aussagen.

Theorem 3.1. Die Differentialgleichung (3.1) wird dann und nur dann Polynomlösungen vom Grad m_1, m_1+1, m_1+2 haben, wenn ihre Koeffizienten $a_3(x)$, $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ die Relationen

$$a'_{1, m_1-1} + a_{0, m_1-1} = 0,$$

$$a'_{2, m_1-1} + a_{1, m_1-1} = 0,$$

$$a'_{3, m_1-1} + a_{2, m_1-1} = 0$$

erfüllen.

Also ist das allgemeine Integral ein Polynom vom Grad m_1+2.

Theorem 3.2. Die Differentialgleichung (3.1) wird dann und nur dann Polynomlösungen vom Grad m_1, m_1+1, m_2+2 haben, wenn ihre Koeffizienten $a_3(x)$, $a_2(x)$ $a_1(x)$, $a_0(x)$ die folgenden Relationen

$$a'_{1, m_1-1} + a_{0, m_1-1} = 0,$$

$$a'_{2, m_1-1} + a_{1, m_1-1} = 0,$$

$$a'_{3, m_2-1} + a_{2, m_2-1} = 0$$

erfüllen.

Also ist das allgemeine Integral ein Polynom vom Grad m_2+2.

Theorem 3.3. Die Differentialgleichung (3.1) wird dann und nur dann Polynomlösungen vom Grad m_1, m_2+1, m_2+2 haben, wenn ihre Koeffizienten $a_3(x)$, $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ die folgenden Relationen

$$a'_{1, m_1-1} + a_{0, m_1-1} = 0,$$

$$a'_{2, m_2-1} + a_{1, m_2-1} = 0,$$

$$a'_{3, m_2-1} + a_{2, m_2-1} = 0$$

erfüllen.

Also ist das allgemeine Integral ein Polynom vom Grad m_2+2.

Theorem 3.4. Die Differentialgleichung (3.1) wird dann und nur dann Polynomlösungen vom Grad m_1, m_2+1, m_3+2 haben, wenn ihre Koeffizienten $a_3(x)$, $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ die folgenden Relationen

$$a'_{1, m_1-1} + a_{0, m_1-1} = 0,$$

$$a'_{2, m_2-1} + a_{1, m_2-1} = 0,$$

$$a'_{3, m_3-1} + a_{2, m_3-1} = 0$$

erfüllen.

Also ist das allgemeine Integral ein Polynom vom Grad m_3+2.

LITERATUR

1. *Vicente Gonsalves, J.*, Sur la formul de Rodrigues, Portugaliae Math. 4, 52—64 (1934) [MF 9130].
2. *Šapkarev I. A.*, Sur une équation différentielle linéaire d'ordre *n* dont la solution générale est un pôlynom de *n*-ème degré, Matematički vesnik 1 (16) 49—50, 1964.
3. *Šapkarev I. A.*, Über Polynomlösungen der linearen Differentialgleichungen, Mathematika Balkanica 3 (1973).
4. *Lazov P. R., Dimitrovski D.* S., Za edna klasa na linearni diferencijalni ravenki čij opšt integral e polinom, Bilten na DMF na SRM, kniga XXV (1974).
5. *Šapkarev I. A.*, Eine Bemerkung über Polynomlösungen der homogenen linearen Differentialgleichungen, Bilten na DMF na SRM, kn. XXVI (1976).

РЕЗИМЕ

ПОЛИНОМИ КАКО ОПШТИ ИНТЕГРАЛИ НА ХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Илија А. ШАПКАРЕВ

Во трудот се покажува дека диференцијалната равенка (1) ќе има полиномни решенија од степен (5), ако и само ако нејзините коефициенти $a_i(x)$ ги задоволуваат релациите (6). Во тој случај општиот интеграл на равенката (1) е полином од степен $m = m_r + n - 1$. Коефициентите $a_{i-1,\, j}$ се определени со (3) и (4).

Понатаму, посебно се разгледани случаите $n = 1, 2, 3$ и се дадени условите кои што треба да ги исполнуваат коефициентите на равенките (1.1), (2.1) и (3.1) за да истите имаат полиноми од соодветен степен како општи интеграли.

Institut für Mathematik,
„Kiril i Metodij"-Universität,
Skopje.