МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
5 (20) 1968. стр. 505—512

Илија А. Шайкарев

НЕКОЛИКО ПРИМЕДАБА О ХОМОГЕНИМ ЛИНЕАРНИМ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА ДРУГОГ РЕДА ЧИЈИ СЕ ОПШТИ ИНТЕГРАЛ ДОБИЈА ПОМОЋУ КВАДРАТУРА

(Саопштено 10. маја 1968.)

I

У овом раду показујемо да се општи интеграл диференцијалне једначине

$$y''+f(x)\,y'+g(x)\,y=0, \tag{1}$$

где су $f(x)$ и $g(x)$ произвољне диференцијабилне функције од x, може добити помоћу квадратура, ако међу функцијама $f(x)$ и $g(x)$ постоји једна од релација:

$$\sqrt{\frac{\varphi}{g}}\,(\varphi+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{g}\right)'+f\left(\frac{\varphi}{g}\right)=0, \tag{2}$$

$$\psi^2\left[f\left(\frac{g}{\psi}\right)-\left(\frac{g}{\psi}\right)'\right]^2+2g\psi\left[f\left(\frac{g}{\psi}\right)-\left(\frac{g}{\psi}\right)'\right]'-4g^3=0, \tag{3}$$

$$\theta^2+\left(\frac{\theta'+f\theta}{2g}\right)'\theta-g\left(\frac{\theta'+f\theta}{2g}\right)^2=0, \tag{4}$$

$$h'+fh+h^2+g=0. \tag{5}$$

Притом су $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\theta(x)$ и $h(x)$ произвољне диференцијабилне функције од x.

У случају када је испуњена релација (2) односно (5), диференцијална једначина (1) постаје

$$y''+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{g}{\varphi}\right)\left(\frac{\varphi}{g}\right)'-\sqrt{\frac{g}{\varphi}}\,(\varphi+1)\right]y'+gy=0, \tag{6}$$

односно

$$y''+f(x)\,y'-(h'+h^2+fh)\,y=0. \tag{7}$$

Општи интеграл једначине (6) је

$$y=\left[C_1+C_2\int\exp\left\{-\int\left(f+2\sqrt{\frac{g}{\varphi}}\right)dx\right\}dx\right]\exp\int\sqrt{\frac{g}{\varphi}}\,dx, \tag{8}$$

а једначине (7)

$$y=[C_1+C_2\int \exp\{-\int (f+2h)\,dx\}\,dx]\exp\int h\,dx. \tag{9}$$

Општи интеграл једначине (1), када је испуњена релација (3) односно (4), гласи

$$y=\left[C_1+C_2\int\frac{\psi}{g}\,dx\right]\sqrt{\frac{g}{\psi}\exp\left(-\int f\,dx\right)} \tag{10}$$

односно

$$y=\left\{C_1+C_2\int\frac{\exp\left(-\int f\,dx\right)dx}{\left[\int\sqrt{\theta\exp\left(-\int f\,dx\right)}\,dx\right]^2}\right\}\int\sqrt{\theta\exp\left(-\int f\,dx\right)}\,dx. \tag{11}$$

II

Како што је познато, ако су $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ два линеарно независна партикуларна решења једначине (1), а C_1 и C_2 произвољне константе, њен општи интеграл гласи

$$y=C_1\,\alpha(x)+C_2\,\beta(x). \tag{12}$$

Елиминацијом констаната C_1 и C_2 из једначине (12) и из њене две прве изводне једначине, добијамо диференцијалну једначину

$$y''-\frac{\alpha\beta''-\alpha''\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}\,y'+\frac{\alpha'\beta''-\alpha''\beta'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}\,y=0. \tag{13}$$

Упоређењем једначина (1) и (13) добијамо релације

$$f(x)=-\frac{\alpha\beta''-\alpha''\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},\qquad g(x)=\frac{\alpha'\beta''-\alpha''\beta'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},$$

које можемо да напишемо у облику

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta=A\exp\left(-\int f\,dx\right), \tag{14}$$

$$g(x)=\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\frac{\left(\dfrac{\beta'}{\alpha'}\right)'}{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)'}, \tag{15}$$

где је $A\,(\neq 0)$ произвољна константа.

1. Ако узмемо

$$\frac{\beta'}{\alpha'}=\varphi(x)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)', \tag{1.1}$$

тада из (15) добијамо

$$\alpha=B\exp\int\sqrt{\frac{g}{\varphi}}\,dx, \tag{1.2}$$

а из (14) и (1.2)

$$\beta=\left[BC+\frac{A}{B}\int\exp\left\{-\int\left(f+2\sqrt{\frac{g}{\varphi}}\right)dx\right\}dx\right]\exp\int\sqrt{\frac{g}{\varphi}}\,dx. \tag{1.3}$$

Притом $B(\neq 0)$ и C су произвољне константе.

Елиминацијом α и β из (1.1), (1.2) и (1.3) добијамо релацију (2). У вези стим следује да општи интеграл једначине (6) је (8).

Пример. Диференцијална једначина

$$e^{4x}y''-(x-2)\,e^{4x}y'+(xe^{2x}-1)\,y=0$$

има општи интеграл

$$y=e^{(-1/2)e^{-2x}}\,[C_1+C_2\int e^{x^2/2-2x+e^{-2x}}dx].$$

2. Ако сада узмемо

$$(\alpha'/\alpha)^2\,(\beta'/\alpha')'=\psi(x), \tag{2.1}$$

тада из (15) добијамо

$$\frac{\beta}{\alpha}=\int\frac{\psi}{g}\,dx+A_1, \tag{2.2}$$

где је A_1 произвољна константа.

Затим из (14) и (2.2) имамо

$$\alpha=A_2\sqrt{\frac{g}{\psi}\exp\left(-\int f dx\right)}, \tag{2.3}$$

$$\beta=A_2\sqrt{\frac{g}{\psi}\exp\left(-\int fdx\right)}\cdot\left(\int\frac{\psi}{g}\,dx+A_1\right). \tag{2.4}$$

Притом је $A_2(\neq 0)$ произвољна константа.

Помоћу елиминације α и β из (2.1), (2.3) и (2.4) добијамо тачно релацију (3).

Значи, општи интеграл једначине (1), када њени коефицијенти задовољавају релацију (3), је (10).

Пример. Диференцијална једначина

$$x^2y''-2\,xy'-2\,(2\,x^4+x^2-1)\,y=0$$

има општи интеграл

$$y=xe^{x^2}\,(C_1+C_2\int e^{-2x^2}\,dx).$$

3. Ако ставимо

$$\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2=\theta(x)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)', \tag{3.1}$$

релација (15) постаје

$$\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)'=\frac{g(x)}{\theta(x)}. \tag{3.2}$$

Из (14) и (3.1) добијамо

$$\alpha = B_1 \int \sqrt{\theta \exp\left(-\int f dx\right)}\, dx, \tag{3.3}$$

$$\beta = \left[\int \frac{\exp\left(-\int f dx\right)}{\left\{\int \sqrt{\theta \exp\left(-\int f dx\right)}\, dx\right\}^2}\, dx + B_2 \right] B_1 \int \sqrt{\theta \exp\left(-\int f dx\right)}\, dx, \tag{3.4}$$

где су $B_1\,(\neq 0)$ и B_2 произвољне константе.

Елиминацијом α и β из (3.2), (3.3) и (3.4) добијамо управо релацију (4)

Значи, општи интеграл једначине (1), када њени коефицијенти задовољавају (4), је (11).

Пример. Диференцијална једначина

$$y'' + 2\, e^x y' + e^x (e^x + 1)\, y = 0$$

има општи интеграл

$$y = e^{-e^x} (C_1 + C_2\, x).$$

4. Ако сада узмемо

$$f(x) = \frac{\alpha''\beta - \alpha\beta''}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \quad h(x) = \frac{\alpha'}{\alpha}, \tag{4.1}$$

добијамо

$$g(x) = -(h' + h^2 + fh),$$

$$\alpha = D_1\, e^{\int h dx},$$

$$\beta = \left[\frac{D_2}{D_1^2} \int e^{-\int (f+2h) dx}\, dx + D_3 \right] D_1 e^{\int h dx},$$

где су $D_1\,(\neq 0)$, $D_2\,(\neq 0)$ и D_3 произвољне константе.

У вези стим следује да је општи интеграл једначине (7) дат са (9).

Врло је лако утврдити да већи број диференцијалних једначина, које се налазе у познатој књизи Е. Камкеа [1], претстављају специјалан случај једначине (7).

Исто тако лако се добијају, односно појачавају постојећи критеријуми неких диференцијалних једначина, које се налазе у поменутој књизи, ако се искористи диференцијална једначина (7).

Ми ћемо то овде показати само на две диференцијалне једначине.

4.1. У поменутој књизи [1] наводи се да диференцијална једначина

$$(e^x + 1)\, y'' = y \tag{4.1.1}$$

има општи интеграл

$$y = C_1 (1 + e^{-x}) + C_2 [-1 + (1 + e^{-x}) \ln (1 + e^{-x})]. \tag{4.1.2}$$

Д. С. Митриновић [2] наводи да диференцијална једначина

$$\left(a e^{bx} + \frac{1}{b^2}\right) y'' = y \tag{4.1.3}$$

има партикуларни интеграл облика

$$y_1 = e^{-bx} + ab^2. \tag{4.1.4}$$

Овде ми показујемо да се диференцијална једначина

$$(ae^{bx} + c)\, y'' = y, \tag{4.1.5}$$

може интегралити, ако константе b и c задовољавају релацију

$$4\, b^2 c - 1 = 0. \tag{4.1.6}$$

Да бисмо то показали, упоређујемо једначину (4.1.5) са (7) и у односу на h добијамо Riccati-јеву једначину

$$(ae^{bx} + c)\, h' + (ae^{bx} + c)\, h^2 - 1 = 0, \tag{4.1.7}$$

која помоћу смене $e^{bx} = t$ постаје

$$(abt^2 + bct)\, h' + (at + c)\, h^2 - 1 = 0. \tag{4.1.8}$$

Даље, одредимо константе a_1, a_2, a_3 и a_4 тако да

$$h = \frac{a_1 t + a_2}{t^2 + a_3 t + a_4} \tag{4.1.9}$$

буде партикуларни интеграл једначине (4.1.8).

Ако сада h из (4.1.9) унесемо у (4.1.8), добијамо релацију

$$\begin{aligned} &-(a_1 ab + 1)\, t^4 + (a_1^2 a - 2\, a_2 ab - a_1 bc - 2\, a_3)\, t^3 \\ &+ (a_1 a_4 ab - a_2 a_3 ab - 2\, a_2 bc + 2\, a_1 a_2 a + a_1^2 c - a_3^2 - 2\, a_4)\, t^2 \\ &+ (a_1 a_4 bc - a_2 a_3 bc + a_2^2 a + 2\, a_1 a_2 c - 2\, a_3 a_4)\, t + a_2^2 c - a_4^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Обзиром на то да релација (4.1.10) треба да представља идентитет у односу на t, за одређивање констананта a_1, a_2, a_3 и a_4 добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} &a_1 ab + 1 = 0, \\ &a_1^2 a - 2\, a_2 ab - a_1 bc - 2\, a_3 = 0, \\ &a_1 a_4 ab - a_2 a_3 ab - 2\, a_2 bc + 2\, a_1 a_2 a + a_1^2 c - a_3^2 - 2\, a_4 = 0, \\ &a_1 a_4 bc - a_2 a_3 bc + a_2^2 a + 2\, a_1 a_2 c - 2\, a_3 a_4 = 0, \\ &a_2^2 c - a_4^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

За $a_2 = a_4 = 0$ из прве две једначине из система (4.1.11), добијамо

$$a_1 = -\frac{1}{ab}, \quad a_3 = \frac{1 + b^2 c}{2\, ab^2}$$

и у вези стим из треће једначине овог система између b и c добијамо релацију

$$b^2 c - 1 = 0.$$

$$
\begin{aligned}
&2 b_0 b_4 - 2 b_3 + 2 b_0 b_3 + 2 b_1 b_2 + (a+b) b_3 + (a+b) b_2 b_4 + b_1 b + b_0 b_4 b + 2 b_4 c = 0, \\
(4.2.9) \quad & b_1 b_4 - b_2 - b_3 b_4 + b_2^2 + 2 b_1 b_3 + (a+b) b_3 b_4 + b_2 b + b_1 b_4 b + b_4^2 c = 0, \\
& 2 b_2 b_3 - 2 b_3 + b_3 b + b_2 b_4 b = 0, \\
& b_3 b_4 b + b_3^2 - b_3 b_4 = 0.
\end{aligned}
$$

За $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$ из (4.2.9) елиминацијом b_0 добијамо (4.2.2).

За $b_1 = b_3 = b_4 = 0$ елиминацијом b_0 и b_2 из (4.2.9) добијамо (4.2.3) и (4.2.4).

За $b_3 \neq 0$ из система (4.2.9) добијамо

$$b_0 = \frac{(1-b)(a+b-1)+c}{b-3}, \quad b_1 = b_0 b_4, \quad b_2 = 1-b, \quad b_3 = (1-b) b_4$$

и елиминацијом констаната b_0, b_1, b_2, b_3 и b_4 из тог система добијамо релацију

$$
\begin{aligned}
(4.2.10) \quad & [(a+b-1)(1-b)+c]^2 + (a+b+1)[(a+b-1)(1-b)+c](b-3) + \\
& + (b-3)^2 c = 0.
\end{aligned}
$$

Значи, партикуларни интеграли једначине (4.2.1) могу се добити помоћу квадратура и у случају када између констаната a, b и c постоји релација (4.2.10).

Овај се поступак може применити и на једначине: 2.11, 2.11 *a*, 2.24, 2.39, 2.41 *a*, 2.76 *a*, 2.77, 2.107, 2.125 *b*, 2.212 *a*, 2.304 *a*, 2.318, 2.363 *a*, као и на друге једначине које се налазе у поменутој Камкеовој књизи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Москва (1961), с. 526 и 531.

[2] Д. С. Митриновић, Публикације Електротехничког факултета Универзитета у Београду, серија: математика и физика. № 27 (1959), с. 3.

EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER HOMOGENE LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER ZWEITEN ORDNUNG DEREN INTEGRALE IN DER GESCHLOSSENEN FORM ERHALTEN WERDEN KÖNNEN

Ilija A. Šapkarev

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$(1) \qquad y'' + f y' + g y = 0,$$

wo $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbare Functionen von x sind, kann in der geschlossenen Form erhalten werden, wenn zwischen die Functionen $f(x)$ und $g(x)$ eine der folgenden Relationen besteht:

$$\sqrt{\frac{\varphi}{g}}(\varphi+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{g}\right)'+f\left(\frac{\varphi}{g}\right)=0, \tag{2}$$

$$\psi^2\left[f\left(\frac{g}{\psi}\right)-\left(\frac{g}{\psi}\right)'\right]^2+2g\psi\left[f\left(\frac{g}{\psi}\right)-\left(\frac{g}{\psi}\right)'\right]'-4g^3=0, \tag{3}$$

$$\theta^2+\left(\frac{\theta'+f\theta}{2g}\right)'\theta-g\left(\frac{\theta'+f\theta}{2g}\right)^2=0, \tag{4}$$

$$h'+fh+h^2+g=0, \tag{5}$$

dabei sind $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\theta(x)$ und $h(x)$ beliebige differenzierbare Functionen von x.

Wenn die Relation (2) bzw (5) ausgefüllt wird, wird die Differentialgleichung (1)

$$y''+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{g}{\varphi}\right)\left(\frac{\varphi}{g}\right)'-\sqrt{\frac{g}{\varphi}}(\varphi+1)\right]y'+gy=0, \tag{6}$$

beziehungsweise

$$y''+f(x)y'-(h'+h^2+fh)y=0. \tag{7}$$

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (6) ist

$$y=\left[C_1+C_2\int\exp\left\{-\int(f+2\sqrt{g/\varphi})\,dx\right\}dx\right]\exp\int\sqrt{g/\varphi}\,dx,$$

und der Differentialgleichung (7)

$$y=[C_1+C_2\int\exp\{-\int(f+2h)\,dx\}\,dx]\exp\int h dx.$$

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1), wenn die Relation (3) bzw (4) ausgefüllt wird, ist

$$y=\left[C_1+C_2\int(\psi/g)\,dx\right]\sqrt{(g/\psi)\exp(-\int f dx)},$$

beziehungsweise

$$y=\left[C_1+C_2\int\frac{\exp(-\int f dx)\,dx}{\left(\int\sqrt{\theta\exp(-\int f dx)}\,dx\right)^2}\right]\int\sqrt{\theta\exp(-\int f dx)}\,dx.$$