МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
9 (24) 1972. стр. 257—264

Радојко М. Секулоски

УОПШТЕЊЕ ИТЕРАТИВНЕ МЕТОДЕ С. ПРЕШИЋА ЗА ФАКТОРИЗАЦИЈУ ПОЛИНОМА

(Саопштено 17. маја 1972)

1. У овом чланку се уопштавају резултати који су изложени у [2], Наиме, у [2] С. Прешић излаже један итеративни поступак за факторизацију полинома у случају када су тражени фактори $A, B, \ldots, L$, односно тражени корени $a_1, a_2, \ldots, a_n$ међусобно различити.

Задржавамо се на факторизацији $1-1-1-\cdots-1$ и у почетку разматрамо случај двоструког корена.

2. Нека је

$$p=x^n+p_{n-1}x^{n-1}+\cdots+p_1x+p_0 \tag{1}$$

полином на пољу комплексних бројева, који има један двоструки корен a_1, а остали корени $a_3, a_4, \ldots, a_n$ су једноструки.

За одређиввње корена $a_1, a_3, \ldots, a_n$ полинома (1) дефинишемо низове $a_1(k)$, $a_3(k), \ldots, a_n(k)$, где је $k=1, 2, \ldots$, следећим једнакостима:

$$a_i(k+1)=a_i(k)- \tag{2}$$

$$-\frac{P\left(a_i(k)\right)}{\left(a_i(k)-a_1(k)\right)^2\cdots\left(a_i(k)-a_{i-1}(k)\right)\left(a_i(k)-a_{i+1}(k)\right)\cdots\left(a_i(k)-a_n(k)\right)}$$

$$i=3, 4, \ldots, n$$

$$a_1(k+1)=a_1(k)-\frac{P'\left(a_1(k)\right)}{2\left(a_1(k)-a_3(k)\right)\cdots\left(a_1(k)-a_n(k)\right)} \tag{3}$$

Стављајући $Q(x)=\left(x-a_1(k)\right)^2\left(x-a_3(k)\right)\cdots\left(x-a_n(k)\right)$ формуле (2) и (3) постају:

$$a_i(k+1)=a_i(k)-\frac{P\left(a_i(k)\right)}{Q'\left(a_i(K)\right)} \quad \text{за } i=3, 4, \ldots, n \quad \text{и} \tag{4}$$

$$a_1(k+1)=a_1(k)-\frac{P'\left(a_1(k)\right)}{Q''\left(a_1(k)\right)} \tag{5}$$

($'$, $''$ су ознаке извода по x).

Покажимо да постоје извесне околине $V(a_1)$, $V(a_3), \ldots, V(a_n)$ корена $a_1, a_3, \ldots, a_n$ у којима низови дефинисани једнакостима (4) и (5) конвергирају коренима $a_1, a_3, \ldots, a_n$ ако $a_1(1)\in V(a_1)$, $a_3(1)\in V(a_3), \ldots, a_n(1)\in V(a_n)$.

У почетку уводимо ознаку

$$Q(x) = (x - a_1(k))^2 (x - a_3(k)) \cdots (x - a_n(k)) = Q(x, a_1(k), a_3(k), \ldots, a_n(k))$$

За полиноме P и Q важе следећи идентитети:

$$(6) \qquad \begin{cases} P'(a_i) = Q'(a_1, a_3, \ldots, a_n) & i = 3, 4, \ldots, n \\ P''(a_1) = Q''(a_1, a_3, \ldots, a_n) \end{cases}$$

Даље уводимо функције:

$$(7) \qquad \begin{cases} \Phi_1(a_1(k)) = \dfrac{P'(a_1(k))}{a_1(k) - a_1} \\ \Psi_1(a_1(k), a_3(k), \ldots, a_n(k)) = Q''(a_1(k), a_3(k), \ldots, a_n(k)) \\ \Phi_2(a_i(k)) = \dfrac{P(a_i(k))}{a_i(k) - a_i}, \qquad i = 3, 4, \ldots, n \\ \Psi_2(a_1(k), a_3(k), \ldots, a_n(k)) = Q'(a_1(k), a_3(k), \ldots, a_n(k)) \end{cases}$$

На основу једнакости (6) за уведене функције важе следећи идентитети:

$$(8) \qquad \Phi_1(a_1) = \Psi_1(a_1, a_3, \ldots, a_n)$$

$$(9) \qquad \Phi_2(a_i) = \Psi_2(a_1, a_3, \ldots, a_n) \qquad i = 3, 4, \ldots, n.$$

Из једнакости (5) добијамо:

$$a_1(2) = a_1(1) - \frac{(a_1(1) - a_1)\, \Phi_1(a_1(1))}{\Psi_1(a_1(1), a_3(1), \ldots, a_n(1))},$$

односно

$$a_1(2) - a_1 = a_1(1) - a_1 - \frac{(a_1(1) - a_1)\, \Phi_1(a_1(1))}{\Psi_1(a_1(1), a_3(1), \ldots, a_n(1))},$$

односно

$$|a_1(2) - a_1| = |a_1(1) - a_1| \left| 1 - \frac{\Phi_1(a_1(1))}{\Psi_1(a_1(1), a_3(1), \ldots, a_n(1))} \right|$$

Из једнакости (8) следи:

$$\left| 1 - \frac{\Phi_1(a_1(1))}{\Psi_1(a_1(1), a_3(1), \ldots, a_n(1))} \right| = 0$$

за $(a_1(1), a_3(1), \ldots, a_n(1)) = (a_1, a_3, \ldots, a_n)$, а то значи да постоје бројеви $\overset{1}{\varepsilon}_{a_1}, \overset{1}{\varepsilon}_{a_3}, \ldots, \overset{1}{\varepsilon}_{a_n}$ који одређују извесне околине корена $a_1, a_3, \ldots, a_n$ у којима је

$$\left| 1 - \frac{\Phi_1(a_1(1))}{\Psi_1(a_1(1), a_3(1), \ldots, a_n(1))} \right| < \frac{1}{2},$$

па је стога

$$|a_1(2) - a_1| < \frac{1}{2} |a_1(1) - a_1|$$

Аналогојно добијамо:

$$|a_1(3)-a_1|<\frac{1}{2^2}|a_1(1)-a_1|$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$|a_1(k)-a_1|<\frac{1}{2^{k-1}}|a_1(1)-a_1|,$$

а то значи да низ $a_1(k)$ конвергира ка a_1. Са друге стране:

$$a_i(2)=a_i(1)-\frac{(a_i(1)-a_i)\,\Phi_2(a_i(1))}{\Psi_2(a_1(1),a_3(1),\dots,a_n(1))}\qquad i=3,4,\dots,n,$$

односно

$$a_i(2)-a_i=a_i(1)-a_i-\frac{(a_i(1)-a_i)\,\Phi_2(a_i(1))}{\Psi_2(a_1(1),a_3(1),\dots,a_n(1))}$$

односно

$$|a_i(2)-a_i|=|a_i(1)-a_i|\left|1-\frac{\Phi_2(a_i(1))}{\Psi_2(a_1(1),a_3(1),\dots,a_n(1))}\right|$$

Из једнакости (9) непосредно следи:

$$\left|1-\frac{\Phi_2(a_i(1))}{\Psi_2(a_1(1),a_3(1),\dots,a_n(1))}\right|=0$$

за $(a_1(1),a_3(1),\dots,a_n(1))=(a_1,a_3,\dots,a_n)$ а то значи да постоје бројеви: $\varepsilon^2_{a_1},\varepsilon^2_{a_3},\dots,\varepsilon^2_{a_n}$ који одређују извесне околине корена $a_1,a_3,\dots,a_n$ у којима је:

$$\left|1-\frac{\Phi_2(a_i(1))}{\Psi_2(a_1(1),a_3(1),\dots,a_n(1))}\right|<\frac{1}{2},$$

па је стога

$$|a_i(2)-a_i|<\frac{1}{2}|a_i(1)-a_i|$$

аналогно добијамо:

$$|a_i(3)-a_i|<\frac{1}{2^2}|a_i(1)-a_i|,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$|a_i(k)-a_i|<\frac{1}{2^{k-1}}|a_i(1)-a_i|,$$

а то значи да низови $a_i(k)$, $(i=3,4,\dots,n)$, конвергирају редом ка a_i. За околине $V(a_1)$, $V(a_3),\dots,V(a_n)$ одабраћемо оне околине које су редом одређене бројевима:

$$\min(\varepsilon^1_{a_1},\varepsilon^2_{a_1}),\quad \min(\varepsilon^1_{a_3},\varepsilon^2_{a_3}),\ \dots,\ \min(\varepsilon^1_{a_n},\varepsilon^2_{a_n}).$$

Прелазимо на општи случај, односно на случај вишеструких корена.

3. Нека су сада $a_p, a_q,\dots,a_r, a_s$ корени полинома (1) са одговарајућим вишеструкостима $p, q,\dots,r, s$, тако да је $p+q+\dots+r+s=n$ и

$$P=(x-a_p)^p(x-a_q)^q\cdots(x-a_r)^r(x-a_s)^s.$$

За одређивање корена $a_p, a_q, \ldots, a_s$, дефинишемо низове $a_p(k)$, $a_q(k), \ldots, a_s(k)$ следећим једнакостима:

$$
(10) \qquad \begin{cases}
a_p(k+1) = a_p(k) - \dfrac{P^{(p-1)}_{(a_p(k))}}{p!\,(a_p(k)-a_q(k))^q \cdots (a_p(k)-a_s(k))^s} \\
a_q(k+1) = a_q(k) - \dfrac{P^{(q-1)}_{(a_q(k))}}{q!\,(a_q(k)-a_p(k))^p \cdots (a_q(k)-a_s(k))^s} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_s(k+1) = a_s(k) - \dfrac{P^{(s-1)}_{(a_s(k))}}{s!\,(a_s(k)-a_p(k))^p \cdots (a_s(k)-a_r(k))^r}
\end{cases}
$$

Стављајући $Q(x) = (x-a_p(k))^p (x-a_q(k))^q \cdots (x-a_s(k))^s$ формуле (10) добијају облик:

$$
(11) \qquad \begin{cases}
a_p(k+1) = a_p(k) - \dfrac{P^{(p-1)}_{(a_p(k))}}{Q^{(p)}_{(a_p(k))}} \\
a_q(k+1) = a_q(k) - \dfrac{P^{(q-1)}_{(a_q(k))}}{Q^{(q)}_{(a_q(k))}} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_s(k+1) = a_s(k) - \dfrac{P^{(s-1)}_{(a_s(k))}}{Q^{(s)}(a_s(k))}
\end{cases}
$$

Покажимо да и сада постоје извесне околине $V(a_p), V(a_q), \ldots, V(a_s)$ корена $a_p, a_q, \ldots, a_s$ у којима низови дефинисани једнакостима (11) конвергирају ка коренима $a_p, a_q, \ldots, a_s$ ако $a_p(1) \in V(a_p)$, $a_q(1) \in V(a_q), \ldots$, $a_s(1) \in V(a_s)$.

Уводимо ознаку:

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= (x-a_p(k))^p (x-a_q(k))^q \cdots (x-a_s(k))^s \\
&= Q(x, a_p(k), \ldots, a_s(k))
\end{aligned}
$$

За полиноме P и Q сада важе следећи идентитети:

$$
(12) \qquad \begin{cases}
P^{(p)}_{(a_p)} = Q^{(p)}_{(a_p, a_q, \ldots, a_s)} \\
P^{(q)}_{(aq)} = Q^{(q)}_{(ap, a_q, \ldots, a_s)} \\
\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots \\
P^{(s)}_{(a_s)} = Q^{(s)}_{(a_p, a_q, \ldots, a_s)}
\end{cases}
$$

Аналогно уводимо функције:

$$
(13)\quad
\begin{cases}
\Phi_p\left(a_p(k)\right) = \dfrac{P^{(p-1)}_{(a_p(k))}}{a_p(k)-a_p} \\
\Psi_p\left(a_p(k), a_q(k), \ldots, a_s(k)\right) = Q^{(p)}_{(a_p(k), a_q(k), \ldots, a_s(k))} \\
\Phi_q\left(a_q(k)\right) = \dfrac{P^{(q-1)}_{(a_q(k))}}{a_q(k)-a_q} \\
\Psi_q\left(a_p(k), a_q(k), \ldots, a_s(k)\right) = Q^{(q}_{(a_p(k), a_q(k), \ldots, a_s(k))} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi_s\left(a_s(k) = \dfrac{P^{(s-1)}_{(a_s(k))}}{a_s(k)-a_s} \\
\Psi_s\left(a_p(k), a_q(k), \ldots, a_s(k)\right) = Q^{(s)}_{(a_p(k), a_q(k), \ldots, a_s(k))}
\end{cases}
$$

На основу једнакости (12) за уведене функције важе следећи идентитети:

$$
(14)\quad
\begin{cases}
\Phi_p(a_p) = \Psi_p(a_p, a_q, \ldots, a_s) \\
\Phi_q(a_q) = \Psi_q(a_p, a_q, \ldots, a_s) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi_s(a_s) = \Psi_s(a_p, a_q, \ldots, a_s)
\end{cases}
$$

Аналогним путем (као 2.) доказујемо:

а) да постоје бројеви $\varepsilon^p_{a_p}, \varepsilon^p_{a_q}, \ldots, \varepsilon^p_{a_s}$ који одређују извесне околине корена $a_p, a_q, \ldots, a_s$ у којима важе неједнакости:

$$
(15)\quad
\begin{cases}
|a_p(2)-a_p| < \dfrac{1}{2}\,|a_p(1)-a_p| \\
|a_p(3)-a_p| < \dfrac{1}{2^2}\,|a_p(1)-a_p| \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
|a_p(k)-a_p| < \dfrac{1}{2^{k-1}}\,|a_p(1)-a_p|
\end{cases}
$$

б) да постоје бројеви $\varepsilon^q_{a_p}, \varepsilon^q_{a_q}, \ldots, \varepsilon^q_{a_s}$ који одређују извесне околине корена $a_p, a_q, \ldots, a_s$ у којима важе иеједнакости:

$$(16)\qquad \begin{cases} |a_q(2)-a_q|<\dfrac{1}{2}\,|a_q(1)-a_q| \\ |a_q(3)-a_q|<\dfrac{1}{2^2}\,|a_q(1)-a_q| \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ |a_q(k)-a_q|<\dfrac{1}{2^{k-1}}\,|a_q(1)-a_q| \end{cases}$$

ц) да постоје бројеви: $\varepsilon^s_{a_p}, \varepsilon^s_{a_q}, \ldots, \varepsilon^s_{a_s}$ који одређују извесне околине корена $a_p, a_q, \ldots, a_s$ којима важе неједнакости:

$$(17)\qquad \begin{cases} |a_s(2)-a_s|<\dfrac{1}{2}\,|a_s(1)-a_s| \\ |a_s(3)-a_s|<\dfrac{1}{2^2}\,|a_s(1)-a_s| \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ |a_s(k)-a_s|<\dfrac{1}{2^{k-1}}\,|a_s(1)-a_s| \end{cases}$$

На основу неједнакости (15), (16), и (17) закључујемо да низови $a_p(k)$, $a_q(k), \ldots, a_s(k)$ конвергирају редом ка $a_p, a_q, \ldots, a_s$. За околине $V(a_p)$, $V(a_q), \ldots, V(a_s)$ одабирамо оне околине које су редом одређене бројевима:

$$\min\left(\varepsilon^p_{a_p}, \varepsilon^q_{a_p}, \ldots, \varepsilon^s_{a_p}\right),\ \min\left(\varepsilon^p_{a_q}, \varepsilon^q_{a_q}, \ldots, \varepsilon^s_{a_q}\right), \ldots, \min\left(\varepsilon^p_{a_s}, \varepsilon^q_{a_s}, \ldots, \varepsilon^s_{a_s}\right).$$

4. На крају наводимо и неколико примера. Коришћена је машина IBM 1130 Електро-машинског факултета у Скопљу.

У „таблицама" које наводимо прве врсте одређују прве чланове низова који имају граничне вредности наведене корене.

Пример 1.

Полином $P=x^4-10\,x^3+32\,x^2-38\,x+15$ има двоструки корен 1 и једноструке корене 3 и 5.

(1)	0	0,5	2,6	4,2
	1	1,336551	2,948299	4,648796
	2	1,008883	3,039451	5,062039
	3	1,000334	3,000875	4,998513
	4	1,000000	2,999998	5,000001
	5	1,000000	2,999998	5,000000
	6	1,000000	3,000000	5,000000
	7	1,000000	3,000000	5,000000

(2)	0	0,0	1,8	7,0
	1	1,507936	1,945869	5,869702
	2	0,4590214	5,773410	5,076878
	3	0,7556014	3,288942	5,255544
	4	0,9768282	3,083713	4,993437
	5	0,9993075	8,005549	5.000209
	6	0,9999994	3,000003	5,000000
	7	1,000000	3,000000	0,000000
	8	1,000000	3,000000	5,000000

Пример 2.

Полином $P=x^4-9x^3+30x^2-44x+24$ има троструки корен 2 и једноструки 3.

(1)	0	1,9	2,9
	1	2,214285	2.926567
	3	2,042374	3,088214
	4	2,005291	2,988837
	5	1,999968	3,000181
	6	1,999999	3,000000
	7	1,999999	3,000000

(2)	0	0	1
	1	$0,1000000\cdot10^2$	$-0,1000000\cdot10^1$
	2	$-0,9090909\cdot10^0$	$-0,9188580\cdot10^0$
	3	$-0,2031677\cdot10^4$	$0,1045928\cdot10^9$
	4	$-0,2031598\cdot10^4$	$0,6103687\cdot10^4$
	5	$-0,1014660\cdot10^4$	$0,3529677\cdot10^4$
	6	$-0,5595417\cdot10^3$	$0,1879918\cdot10^4$
	7	$-0,5595417\cdot10^3$	$0,1879918\cdot10^4$
	8	$-0,3007879\cdot10^3$	$0,1023680\cdot10^4$
	9	$-0,1621180\cdot10^3$	$0,5551797\cdot10^3$
	10	$-0,8878869\cdot10^2$	$0,3019115\cdot10^3$
	11	$-0,4599722\cdot10^2$	$0,1646092\cdot10^3$
	12	$-0,2389218\cdot10^2$	$0,9022400\cdot10^2$
	13	$-0,1191577\cdot10^2$	$0,4991941\cdot10^2$
	14	$-0.5427343\cdot10^1$	$0,2808306\cdot10^2$
	15	$-0,1913264\cdot10^1$	$0,1625490\cdot10^2$
	16	$-0,1210710\cdot10^{-1}$	$0,9852603\cdot10^1$
	17	$+0,1012682\cdot10^1$	$0,6396047\cdot10^1$
	18	$0,1558235\cdot10^1$	$0,4546781\cdot15^1$
	19	$0,1836657\cdot10^1$	$0,3589534\cdot10^1$
	20	$0,1969285\cdot10^1$	$0,3149927\cdot10^1$
	21	$0,1996320\cdot10^1$	$0,3014519\cdot10^1$
	22	$0,1999960\cdot10^1$	$0,3000156\cdot10^1$
	23	$0,1999999\cdot10^1$	$0,28999999\cdot10^1$
	24	$0,1999999\cdot10^1$	$0,3000000\cdot10^1$

Пример 3.

Полином $P=x^6-10x^5+40x^4-82x^3+91x^2-52x+12$ има троструки корен 1, двоструки 2 и једноструки 3.

0	1,1	2,1	3,1
1	1,043580	1,970506	2,959919
2	1,001522	2,004617	3,000281
3	1,000019	1,999963	3,000014
4	1,000004	2,000028	2,999991
5			

ЛИТЕРАТУРА

[1] Prešić, S. B., Un procédé itératif pour la factorisation des polynomes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, p. 862—863.

[2] Прешић, С. Б. Један итеративни поступак за факторизацију полинома, Математички весник 5 (20) Св. 2, 1968.

GENERALIZATION OF S. PREŠIĆ' ITERATIVE METHOD FOR FACTORIZATION OF POLYNOMIALS

R. M. Sekuloski

Summary

The S. Prešić'iterative method [2] for factorization of polynomials is generalized in the case of multiple roots.